

～ 今年の入試問題を題材にした授業 北海道本別高等学校 阿部 彰

はじめに

本校では3年生の選択授業で「数学研究」という設定科目があり、少し難易度の高い問題集を使用した演習中心の授業がある。少なくとも私が赴任してからの4年間は数学を大学受験で必要とする生徒がおらず、この授業では定期テストのための取り組みとして展開されていた。今年の3年生は、2年数学IIの授業で課題学習型の授業を多く取り入れ、考えさせる機会を増やしてきた。難易度の高い入試問題に取り組むプロセスのなかで、少しでも問題解決のエッセンスを感じてもらふことと、自分たちでもできると自信をつけさせたいという思いから、今年度の北大理系の入試問題を授業のレポート課題にして取り組んでみた。そして、解答に至るまでの生徒の思考のプロセスを追ってみた。

1 授業について

- 【教科】 数学研究 (学校設定科目・選択授業)
 【生徒】 13人 (3学年30人中)
 【内容】 レポート課題
 ※新型コロナの影響で休校や分散登校の影響で前期中間考査が実施できず。

2 授業の内容

2.1 レポート課題 SP (special)

n を 2 以上の自然数とする。
 1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い、出た目を順に X_1, X_2, \dots, X_n とする。
 (1) X_1, X_2, \dots, X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。
 (2) X_1, X_2, \dots, X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。
 (3) X_1, X_2, \dots, X_n の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ。
 < 2020 年度 北大理系入試問題 >

2.2 生徒の状況と分析のためのグループ分け

- ※ 思考の癖や傾向を、把握するための一つの指針とし、13 人を下記のように 3 グループに分けた。
グループ A : 中学時より数学が得意
グループ B : 中学時より標準レベル
グループ C : 中学時は苦手な方

※ B,C グループの生徒でも、高校に進学してから数学を得意にしている生徒や、考査等は点が取れなくても視点が鋭い生徒も何人かいる。

2.3 導入～レポート課題 SP 配布

- ※ 下記の表記については、
【目標】 その場面で導きたい方向
【生徒】 生徒の動き
【教員】 教員の投げかけや動き
【分析】 生徒の動きを見ての判断や分析

生徒に配布。20 分間ノーヒント (の予定)。じっくり机間巡視で様子を見る。

【目標】
 1. 行き詰まるとこまで粘る
 ・ 諦めずに考えている時間はなるべく保証する。
 ・ 20～30 分を目安に次のステップへ。
 2. 全く手がつかない生徒への指南
 ・ 答えを言い過ぎず少しずつ前進させる工夫。
 ・ 他と積極的に交流させる。
 (相手の邪魔にならないように気をつける)
 3. 他と共有、自力思考の保証
 ・ 生徒にとっては一番大事な時間。なるべく口出さない。

生徒の様子。

【生徒】
<グループ A >
 1. 確率なのでまず分母が必要。 6^n は即理解。
 2. 最大公約数が 3 や 1 になるということはどういう場合になるか、を考え始めている。
 (余事象を利用した解法には至っていない)
 3. (3) にはまだ着手せず。
<グループ B,C >
 1. いわゆる n 恐怖症。 n があるとペンが進まない生徒がほとんど。
 2. A グループの会話に聞き耳を立てて、「ああそうか！」ワンテンポ遅れて、分母を理解。
 3. (3) に着手して、20 を素因数分解している生徒がグループ B で 1 名いた。

いつもなら n に具体的な数字を入れて、「さいころを1回、2回、3回と投げたときどうなる？」と、かなり強い誘導（具体化の方法を指示）で考えさせてしまう。また、その後も「じゃあ、 n 回投げたときは？」というところ（法則性を考える）まで取り組めないことが多い。

だから今回始めから n 回投げの方を課題にしてみた。身につけさせたい力としては、

【大目標】

1. **考えることを面白がる姿勢を**
 - ・ 問題に詰まっても、向き合い続ける
2. **思考の幅と深さの領域を広げること**
 - ・ 解くための「道具」を増やす（幅）
 - ・ 一つの「道具」の使い方を増やす（深さ）
3. **思考を他に適用させる力**
 - ・ 道具を選ぶ（解くための指針を見つける）

※ 「道具」→ 考え方のストックや知識のストックなど。

【分析】

- ・ 最大公約数が微妙にわかっていない人が数名。（机間巡視で個別対応）
- ・ 「4, 8, 10 の最大公約数は何？」はわかるが、「最大公約数が4になる3つの数を作れ」は苦勞する。（自分で具体的な例をいくつか書いてみて気付く… これも、教員が「実際に書いてみたら？」の投げかけでやり始める）

机間巡視をして、各生徒の思考の状態を聞きだしながら、アドバイスも含めて約30分。一部では、「最大公約数が3ということはさあ」「この数入っちゃダメだよ」「この数は必ず入るんじゃない？」と盛り上がっている。その傍、交流もせず全くペンも動かさずの生徒もいるが投げ出してはいない。これは2年からの課題学習の継続での成果か。しかし、何に着手すれば前進するのか、見当もつかない感じ。導入としては、ここが限界だろうか。

2.4 展開～具体化

【教員】

1. レポート課題 ST の配布

- ・ さいころを5回投げることにして具体的に計算できるようにする。
- ・ プロセスを分けて小問を増やし、各問いを簡単にする。

2. レポート課題 ST のねらい

- ・ 「SP レポート着手への橋渡し（具体化）」
- ・ 「SP レポートへの適用（一般化）」

の思考を自分で気づいて欲しいため、最初はあえて一切何も言わずに取り組ませる。

※ 後に生徒の取り組みで紹介するが上記2の意識が極めて重要であると考えられる。

2.5 レポート課題 ST (standard) 配布

n を2以上の自然数とする。

1個のさいころを続けて5回投げる試行を行い、出た目を順に X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 とする。

- (1) X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 の目の出方は全部で何通りあるか。
- (2) X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 の最大公約数が2, 3, 4, 5, 6となる確率をそれぞれ求めよ。
- (3) X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 の最大公約数が1となる確率を求めよ。
- (4) X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 の最小公倍数が20となる確率を求めよ。

【教員】【目標】～机間巡視におけるポイント

1. **まずは、たっぷり時間を確保すること**
2. **答えを出すことがゴールになっているか、法則性を見つけるのがゴールになっているか**
 - ・ 解答がゴールになっている人には、
→ 「 n 回投げたらどうなる？」の投げかけ。

投げる回数の「5」を残して計算すると面倒になるが、5をあえて残しながら計算を進めて公式を導き、最終的に5の部分を n に変えればよいという観点を持たせるかが重要。

ここで、生徒の取り組みを見て、下記のタイプに分けて、傾向に着目してみた。

【生徒の思考タイプ】

1. **法則性を優先して思考するタイプ**
 - (a) 自分なりの解き方で答え（だけ）を出す
(他の応用につながりにくい)
 - (b) 公式化することを意識して、答えを導く
(他の応用や適用につながる)
2. **書き出すことを優先するタイプ**
 - (a) ルールを作り、全て書き出そうとしている
 - (b) 思いつきで、とにかく書いてみる
3. **バランスタイプ**
 - ・ 「例を書き出す」「思考する」を状況で使い分ける（反例も見つけやすい傾向に）

※ 方向性がずれやすいので注意
(目的が入れ替わる)

【分析】

< 1(a) タイプの傾向 >

1. 公式的なものは見当たらない。
2. 視点はいいものを持っている生徒が多い。
3. 規則性、法則性を見つけるのが得意。
4. 直感と感覚で素早く答えを出すので、紙面の解答では論理的な流れがわかりにくいことがある。
5. 必要な説明が欠けているか、または不要な部分が多い。
6. 「さいころ n 回振ったらどうなる？」と質問したとき、即答できない場合も多い。
7. グループ A の生徒もいる。

※ 2 年次からの課題学習の継続により、かなり一般化・公式化の意識が出てきたが・・・。

などなど

< 1(b) タイプの傾向 >

1. 視点が鋭い時がある。
2. 計算力が不足している場合、いい流れで解答していても途中で力尽きる事もある。
3. 解答の中に、公式化を意識している記述がある。
※ この問いで言えば、面倒であるがえてサイコロを投げる回数の 5 という数を残しつつ、なるべく計算をしないで式中に残している。
4. 題意を満たさない例外を引くことに気づく生徒は最初いかなかった。(最大公約数が 2 となる場合 3^5 から、5 回とも 4 または 6 になる 2 通りを引くなどの気づき)

【さらに分析】

意識的に公式を考えて計算している生徒(グループ A,B が多い) もいるが、無意識に公式を考えている生徒(グループ C にも) もいる。途中式がなく、いきなり公式を書く生徒もいる。「なんでここの部分を計算しないであえて残して進めているの？」の問いには、「なんとなく」とか「5 回振るから 5 乗かなーっと思っつて」という漠然とした答えが返ってくる時もある。
こういう場面は貴重で、本人も気づいてない力を気づかせてあげることでその思考が「使える道具」になっていくと思われる。

< 2(a) タイプの傾向 >

1. 工夫をして、全てを書き出そうという取組が見られる。
2. 結果を「予想」して書き出すという意識は弱い。
3. 途中で法則性は考えるが、考え中に本線から脱線してしまう事もしばしば。

< 2(b) タイプの傾向 >

1. 樹形図等で全てを書き出すことに終始するが多い。
2. 数え上げのルール等も確立していないので、全てを数え上げられない場合も多い。

< 3 タイプの傾向 >

1. 思考段階でも、全体の流れを把握している様子が伺え、書き方にも工夫が見られる。
2. 正式な解答作りの段階でも、余計な部分は省き、ポイントを絞った流れのある解答である。

2.6 レポート課題 ST のまとめ～解答と確認

【教員】

1. (1)(2) について

- ・ 前述の通り

2. (3) について

- ・ 始めは皆、(2) と同様に考えていた
- ・ ほとんどの生徒が、途中行き詰まっていた。
- ・ 「さいころ 5 回投げて、最大公約数になりうる全ての数を考えたら？」の質問で 1,2,3,4,5,6 しかないことはすぐ理解。まだ (3) の方針には気づかない。次に、「じゃあ、何で最大公約数 1 の問いだけ (3) の別小問になってると思う？」の投げかけで、ようやく余事象の考え方に気づいた生徒がいた。

このタイミングで SP レポートに戻り、ST プリントの (2)(3) の問いが、5 回が n 回になり、実際の入試問題では SP プリントの (1)(2) のように出題されていることを説明。

「本番でこんな出され方されたら、こんな解き方絶対気づかないわ」と、入試問題の求めるレベルを実感していた。

3. (4) について

- ・ 最小公倍数が 20 になる出方を、全員一人 2 個ずつ答えてもらった。
- ・ 目が 1,2,4,5 のみで、かつ 4,5 それぞれ少なくとも 1 度は出るということを全体で確認。
※ この先自由に 1 時間取り組んでもらった。行き詰まっている生徒、数え上げたら大変と気づいた生徒多数。ヒントとして答えだけを伝え、解答の提出をしてもらった。
- ・ 集合の余事象を利用した解答が、生徒から自然に出てきた。※ (2)(3) の成果か。
- ・ 「同じものを含む順列」を利用したものなど、数え上げに工夫が見られた。

2.7 レポート課題 SP への取り組み～仕上げ

提出期日が迫り、SP レポートの方に取り組む時間が少なく、ST レポートの提出で今回は打ち切りと思っていたが・・・

【生徒】

- ・ほとんどの生徒が、ST レポートと同時に、SP レポートにも取り組んで、ほぼ解答していた。
- ・一番早く提出したのは、グループ C の 1b タイプの生徒であった。(解答は、正解でした)
- ・ST レポートの方だけ提出すると最初から割り切っていた生徒もいた。
- ・1a タイプの生徒は、式の一般化・公式化に苦労していた。自力で解答に至れなかった生徒もいる。

2.8 タイプ別指導についてのまとめ

【分析】

1. < 1(a) タイプ >

- ・ゴールを常に意識させる働きかけ。
- ・視点や観点を重視した働きかけ。
※ 今回で言えば、5 回振る場合がゴールではなく、 n 回振った時にどうなるか。

2. < 1(b) タイプ >

- ・公式化・一般化に意識が強すぎて時間がかかることが多い。実際に数を代入したり、実際に計算してみることで簡単にわかることもあるということを理解させたい。
- ・視点を変える場面やタイミングを重視した働きかけ。
※ 今回で言えば 3 回投げる場合は？ 4 回なら？という投げかけをするタイミングなど。

3. < 2(a) タイプ >

- ・全く見当違いの自分ルールでやり始めることもあるので注意が必要。
- ・声かけのタイミングが難しい。
※ 法則性や規則性を見出そうとして意識して書き出している場合はあまり口を出さない。法則性を見出す意識が低い人は、ほっといたら徒労に終わることもあるので、適切なタイミングで声かけ。

4. < 2(b) タイプ >

- ・何を求めるために計算をするのかをしつこく確認する。
- ・どんなルールで計算をするのかを確認しながら進める。

5. < 3 タイプ >

- ・論理の流れや、表現等ちょっとでも不備があれば、絶対に逃さない。
納得のいくまで話し合い、解答にこだわって完成させる。

2.9 おわりに

現 3 年生は 2 年次の後半より数学 II の授業で、ほぼ毎時間アクティブラーニングを取り入れてきました。数学を通して「物事を思考する力」をどうしても身につけてほしいという思いがあったからです。

ネタがなければ、新しい単元の例題をいきなりノーヒントでテーマで設定する、さらにネタがなければ、難しくても公式の証明を導くなど、とにかく授業で「考える」ことを継続して取り組んできました。

始めは生徒の半数以上が 1 時間の授業中ほとんど手が動かないという状態もあったり、生徒も教員もきつい状態が続きましたが、こちらの準備次第で、難しい問いでも少しずつ持っていく方向に導けることがわかりました。また、生徒のポテンシャルも思った以上に高いこともわかりました。

結果的に、授業で扱う教科書の問いはかなり減り、宿題や演習等を利用して自主的に生徒に取り組ませ対応してきました。そのため定期考査の結果が心配でしたが、従来のようにしつかり全てを説明した時と結果はほとんど変わりませんでした。このような理由で、現在も継続して取り組んでいます。

昨年度から、授業で難易度の高い入試問題等を題材にして自分で解決していくプロセスを自己認識させ、解決する能力が自分にはあるということを少しでも示せればと考えていました。

昨年度 2 月、北大理系の入試問題を解き、5 問中 1 問出題されていた数学 IA の問題について、来年度の授業のどこかで必ず取り組むことを決め、3 年選択授業による今回の導入に至りました。