

大学の経済学系科目における 数学との関係

経済学ではどのように数学を使うか？

小樽商科大学 商学部経済学科 天野大輔

小樽商科大学 商学部 経済学科 から来ました

過去の大学案内：学科紹介（経済学科）「より

学科紹介

Department of Economics

経済学科

変化する経済社会で活躍する 知識と実行力のあるリーダーとなろう

新しい日本の教育制度のもとで1949年に小樽商科大学が誕生し、同時に経済学科が誕生してから60年以上が経過しました。現在、もっとも多くの教員を擁する学科として、前身の小樽高等商業学校時代からの自由で実践的な教育という伝統を大切にしながら、基礎的知識の獲得と経済社会の変化に対応できる力の向上を目指した経済学教育を進めています。

教育方針として、次の3つを掲げています。

1. 論理的な思考力を育成する。
2. 国際的な視野を養う。
3. 実践的な能力を育成する。

国際経験、実務経験を有する教員も多く、学びながら教え、教えながら学ぶ、という姿勢で研究教育活動を行っています。教員の紹介が経済学科のWebページにありますのでご覧ください。

URL <http://www.otaru-uc.ac.jp/dept/econ/welcome.html>

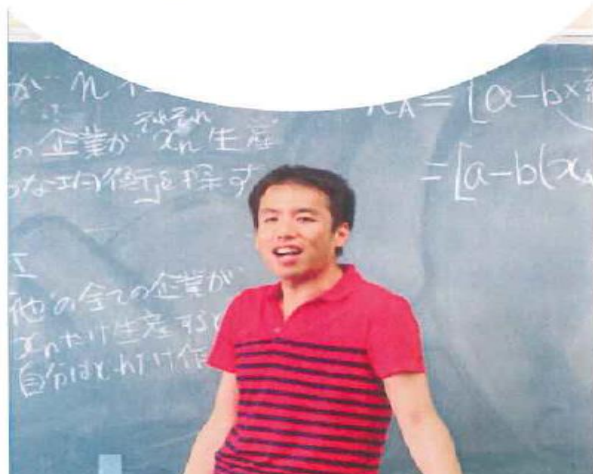
経済学科の特徴

経済学は、世界中の大学で研究教育されており、教育の内容はかなり標準化されつつあります。経済学の基本的な概念は各国の人に共通のものとなってきています。

本学科では、独自の研究成果を踏まえつつ、国内外の経済学の成果をバランスよく教える工夫をしています。多数の教員が国内外の大学で博士号、Ph.D.を取得しており、体系的な枠組みを保ちながら現代の課題に取り組む授業を組んでいます。グローバルな経済を視野に入れた国際マクロ経済学、現代ファイナンス理論はその一例です。

経済学科は商学部の4つの学科の中の1つであることから、他学科の科目も並行して履修することができます。

また、単位互換の取り決めにより、北海道大学経済学部の特定の科目を履修することができます。



担当科目は財政学ですが、数学を使う科目は様々

主な授業科目

- ミクロ経済学
- マクロ経済学
- 現代経済理論Ⅰ・Ⅱ
- 統計学
- 経済史
- 国際経済学
- 財政学**
- 金融論
- 国際貿易理論
- 国際マクロ経済学

「経済数学」という科目もあります



昼間主コースのカリキュラム・マップより

追加資料

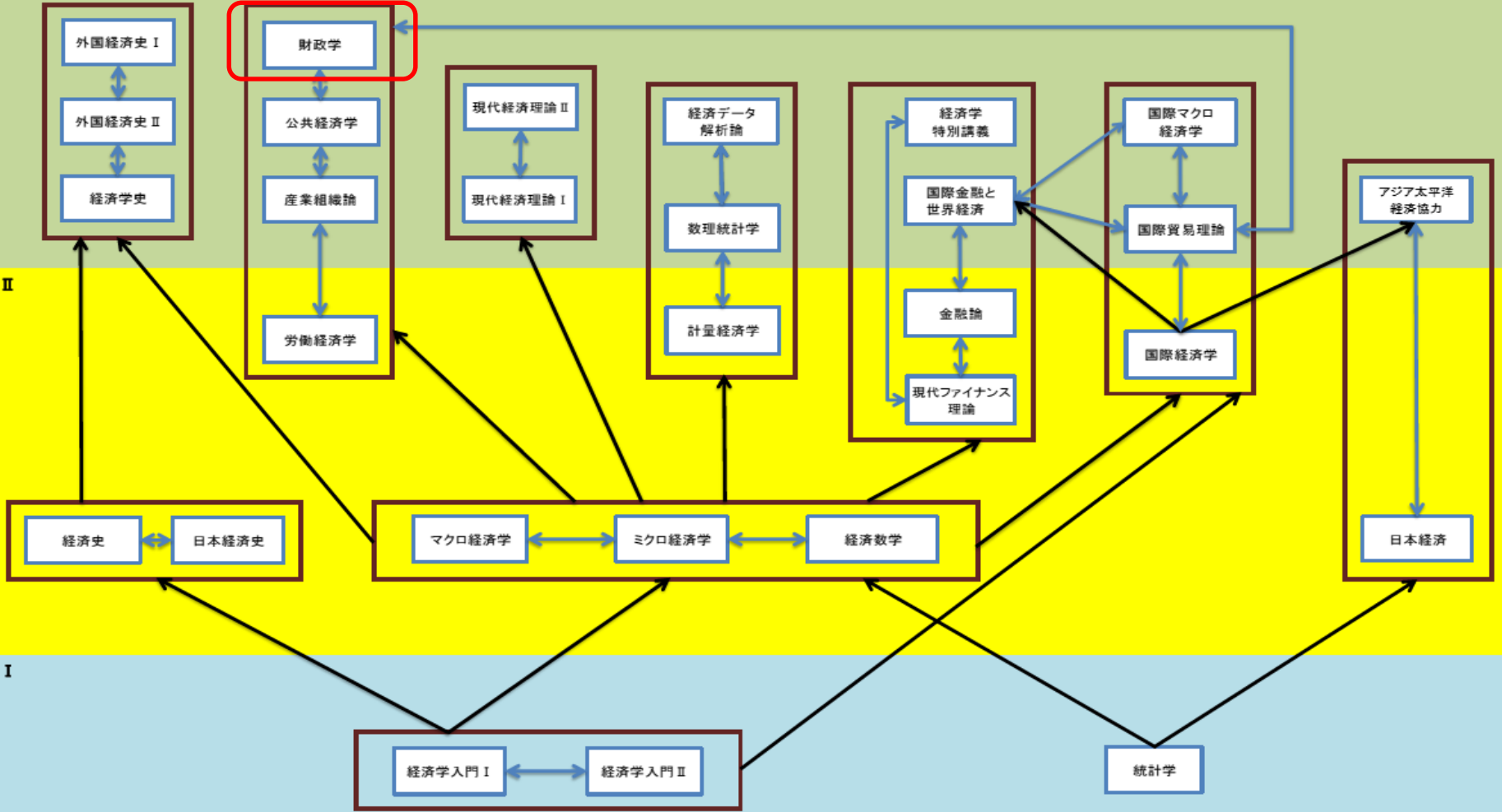
経済学科

研究指導（Ⅲ年ゼミ、Ⅳ年ゼミ、卒業論文）


Ⅲ・Ⅳ

Ⅱ

Ⅰ



ミクロ経済学(経済学入門Ⅰ)と マクロ経済学(経済学入門Ⅱ)の違い

- 資本主義経済では、一国の経済は「家計・企業・政府(&銀行)」などの**経済主体**や、それらが取引や決済をする場である「**財(生産物)市場・労働市場・資本市場**」などの**市場(しじょう)**から構成
- 
- **ミクロ経済学**では、**各市場における個々の経済主体の意思決定**について考える
 - **マクロ経済学**では、**一国全体で集計化された価値(=集計値)の動き**(短期の変動や長期の傾向)を考える
 - **経済モデルの分析=思考実験⇒将来の予測が可能**

様々な「目に見えない」市場から見たミクロ経済

追加資料

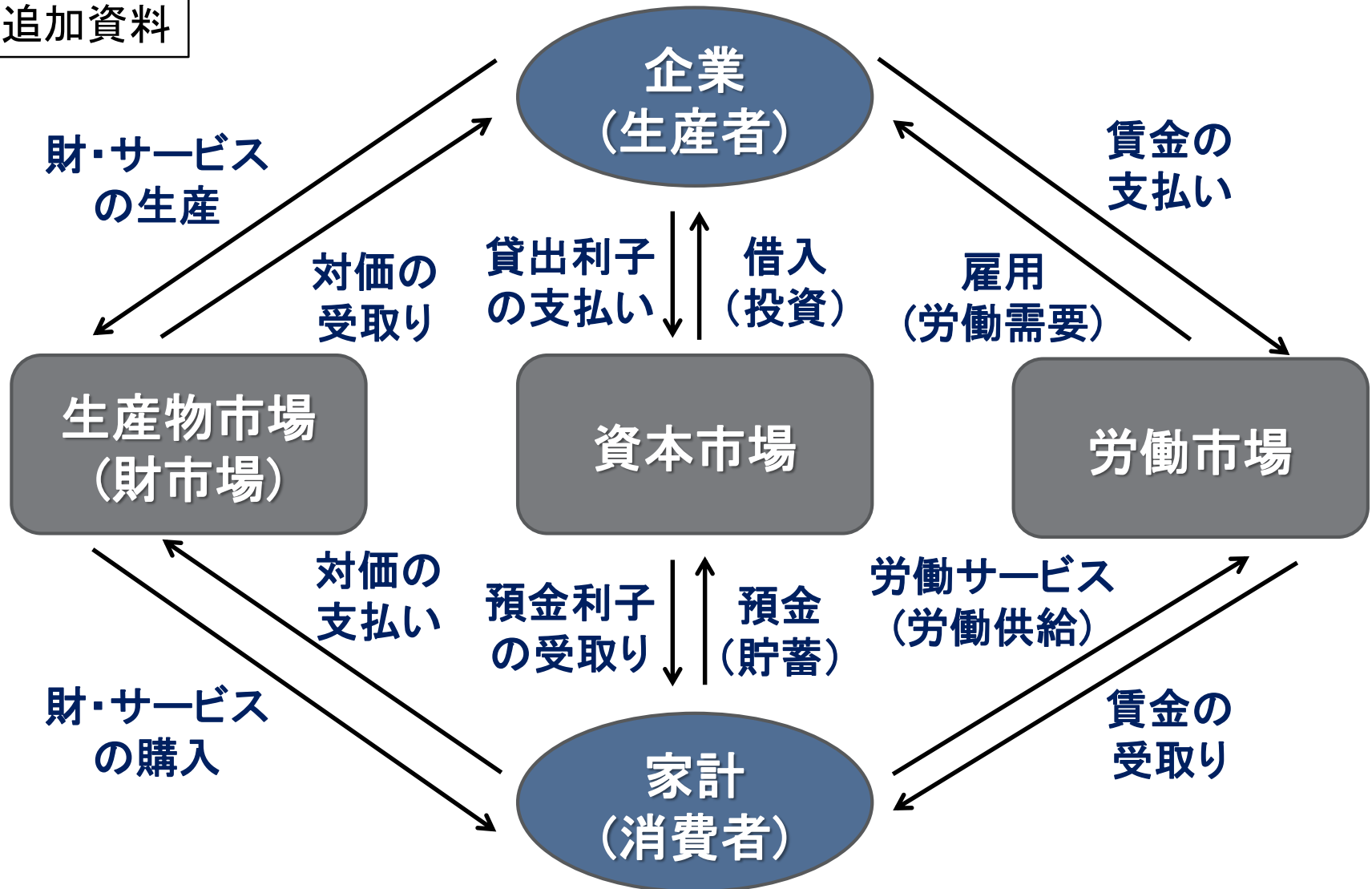
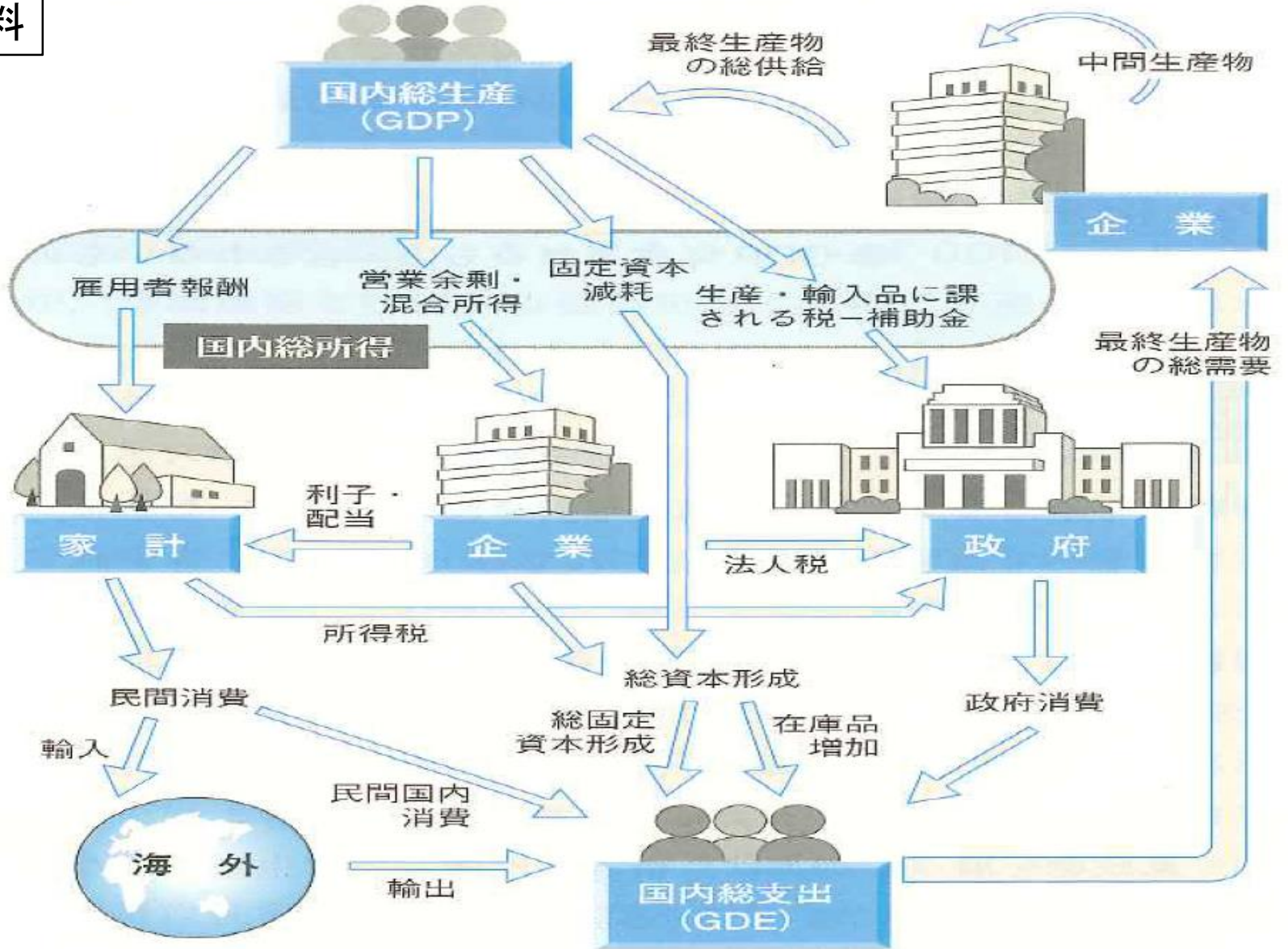


図 1-3 国民経済計算でみたマクロ経済の循環

追加資料



〔出典〕マクロ経済学・入門第5版
(著)福田・照山 2016年有斐閣

大学入試における数学のウエイト

- 国公立大学の中には、社会科学系＝文系の学部でも、
⇒ 入学試験の『センター』あるいは『二次』において、数学の成績を重要視する大学は存在する
 - **小樽商大も、入試で数学のウエイトが高い大学の1つ**
- 前期(一般・昼間主) ⇒ センター & 二次で「数学」を課す
 - 後期(一般・昼間主) ⇒ センターで「数学」を課す
- 専門・総合学科(昼間主) or 推薦(昼間主) でも
⇒ センターで「英・国・数」のうち最も高い1つを採用
 - 他方、前期(一般・夜間主) ⇒ センターで「数学」を課す
 - 以後3年間は不変 ⇒ 今の高校生が卒業するまで同じ

例：小樽商大昼間コースH28年度の入試情報

	センター試験	二次試験	募集人員
一般入試前期日程	<p>外 数^{①②} 国</p> <p>地歴・公民</p> <p>理科</p> <p>地歴、公民、理科から3科目 ただし、「地歴・公民」において、同一名称を含む科目は選択できません。</p>	<p>英 英語のリスニングは行いません。</p> <p>数 国語、数学のうち得点の低い教科を1/2に換算します。</p> <p>国</p>	280人
一般入試後期日程	<p>外 数^{①②} 国</p> <p>地歴・公民</p> <p>理科</p> <p>地歴、公民、理科から3科目 ただし、「地歴・公民」において、同一名称を含む科目は選択できません。</p>	二次試験は行いません。	90人
総合学科 専門学科	<p>英 数^{①②} 国</p> <p>上記のうち、最も得点の高い1教科を採用します。 (外国語は英語のみ)</p>	小論文	5人
推薦入試	<p>英 数^{①②} 国</p> <p>上記のうち、最も得点の高い1教科を採用します。 (外国語は英語のみ)</p>	面接は行いません。 推薦書と志望理由書が必要です。	90人

例：一般・前期日程の入試情報

	センター試験	二次試験															
一般入試前期日程	<table border="1"> <tr> <td>外</td> <td>数^①_②</td> <td>国</td> </tr> <tr> <td colspan="2">地歴・公民</td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="2">理科</td> <td></td> </tr> </table> <p>地歴、公民、理科から3科目 ただし「地歴・公民」において、同一名称を含む科目は選択できません。</p>	外	数 ^① _②	国	地歴・公民			理科			<table border="1"> <tr> <td>英</td> <td>英語のリスニングは行いません。</td> </tr> <tr> <td>数</td> <td>国語、数学のうち得点の低い教科を1/2に換算します。</td> </tr> <tr> <td>国</td> <td></td> </tr> </table>	英	英語のリスニングは行いません。	数	国語、数学のうち得点の低い教科を1/2に換算します。	国	
	外	数 ^① _②	国														
地歴・公民																	
理科																	
英	英語のリスニングは行いません。																
数	国語、数学のうち得点の低い教科を1/2に換算します。																
国																	


- 『センター』は900点満点で評価：「外・数・国」は各200点、「地・公・理」から3科目選んで各100点
- 『二次』は500点：「英」は200点固定、「数・国」は300点（粗点は各200点だが、スコアの悪い方は半分で評価）
- 小論のみの夜間主推薦の人気↑だが、他は**数学必須!!**

私(天野)の所属は経済学科、科目は『財政学』を担当、ゼミでは『経済成長理論』を勉強


- 近代経済学(modern economics)は、アメリカからの輸入品 ... 別名: 主流派経済学、新古典派経済学
- 学部では財政学・租税理論を講義 (⇒ グラフと数式を用いて理論的に説明された日本のテキストを解説) 『コア・テキスト 公共経済学』板谷・佐野(共著) 新世社 2013年
- ゼミ(演習)では経済成長理論に関して研究指導
- 海外の大学で使用されている著名なテキストを輪読 (⇒ 学生による口頭発表、文章は英語、説明はグラフと数式) Jones, C.I. and Vollrath, D., “Introduction to Economic Growth, 3rd”, Norton, 2013.

社会科学としての経済学: 「物理学は自然科学の王」に対して「経済学は社会科学の女王」

by ポール・サムエルソン (アメリカの経済学者):
“近代経済学(新古典派経済学)の父” 著書『経済学』

- 【社会科学の目的】: 社会や共同体のメンバーが幸せになるために、社会問題の解決や制度の在るべき姿を科学的に(→数学を使って論理的に)明らかにする
- 
- ゆえに、理論経済学は社会科学系(文系)なのに、どの大学でも同様の内容の講義が行われる珍しい学問
 - つまり、どの国公立大学の経済学部(or学科)に入っても、(高卒程度の)『数学』に直面すると思われる

経済学を学ぶ際に、数学を使わなければならない現実的な状 ⇒ 公務員試験

- ✓ 商大のキャリア支援課の方からの【聞き取り】:
 - 札幌市・小樽市・道職員等採用(道庁)など
- 
- 「**数的処理・判断推理**」: → 教養試験として出題
 - 一般的には、中学数学程度の知識で回答可能
 - しかし、『**確率**』の問題では、『**順列**』の知識が必要な場合もある
 - 「**経済学**」(ミクロ・マクロ・財政など): → 専門試験
 - 『**微分**』の知識がないと解けない問題も存在
 - “**私立文系で苦勞した**” ⇒ **数学の知識はあった方が**良い

資料:小樽商大生全体の就職状況 1

多様な選択肢

⇒ 伝統的に金融(銀行・証券)に強く、
公務員も増加傾向

加筆修正

学生の就職先は実に多様です。メーカー、金融、流通が多くを占めますが、それ以外にも様々な分野で活躍しています。卒業生の半分近くは、北海道外に本社のある企業に就職します。

北海道外の高校から本学に入学して、卒業するときは、道外の企業に就職することも充分可能です。

2014年度就職内定率

(9月卒業含む)

96.7%

区分	昼間コース			夜間主コース			合計		
	男子	女子	計	男子	女子	計	男子	女子	計
内定率	97.3%	96.3%	96.9%	85.7%	100%	94.9%	96.7%	96.7%	96.7%

区分	男子	女子	全体
道内本社企業	55.4%	45.7%	51.1%
道外本社企業	44.6%	54.3%	48.9%

資料:小樽商大生全体の就職状況 2

[主な就職先]

道内

- 北海道電力 ●札幌市役所
- 北洋銀行 ●北海道銀行 ●ニトリ
- 北海道労働金庫 ●JR 北海道
- ホクレン農業協同組合連合会
- 北海道ガス ●六花亭製菓

道外

- 三井住友銀行 ●日本生命保険
- りそな銀行 ●北陸銀行
- あいおいニッセイ同和損害保険
- 東京海上日動火災保険
- SMBC 日興証券
- 日本政策金融公庫

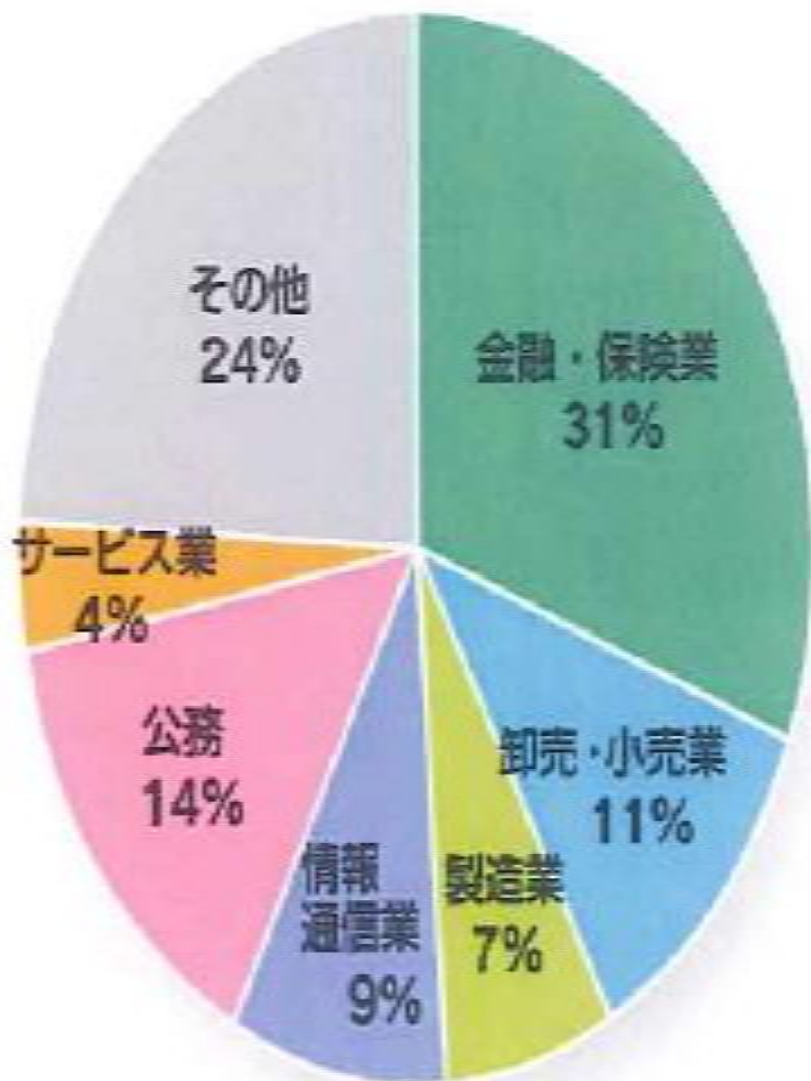
就職に強い
大学ランキング
国立で6位!!



週刊ダイヤモンド
平成25年10月12日号
(ダイヤモンド社)

1位	一橋大学
2位	名古屋工業大学
3位	お茶の水女子大学
4位	東京大学
5位	東京外国語大学
6位	小樽商科大学

資料:小樽商大生全体の就職状況 3



経済学科

- 1 金融・保険業
- 2 公務
- 3 製造業

商学科

- 1 金融・保険業
- 2 卸売・小売業
- 3 公務

企業法学科

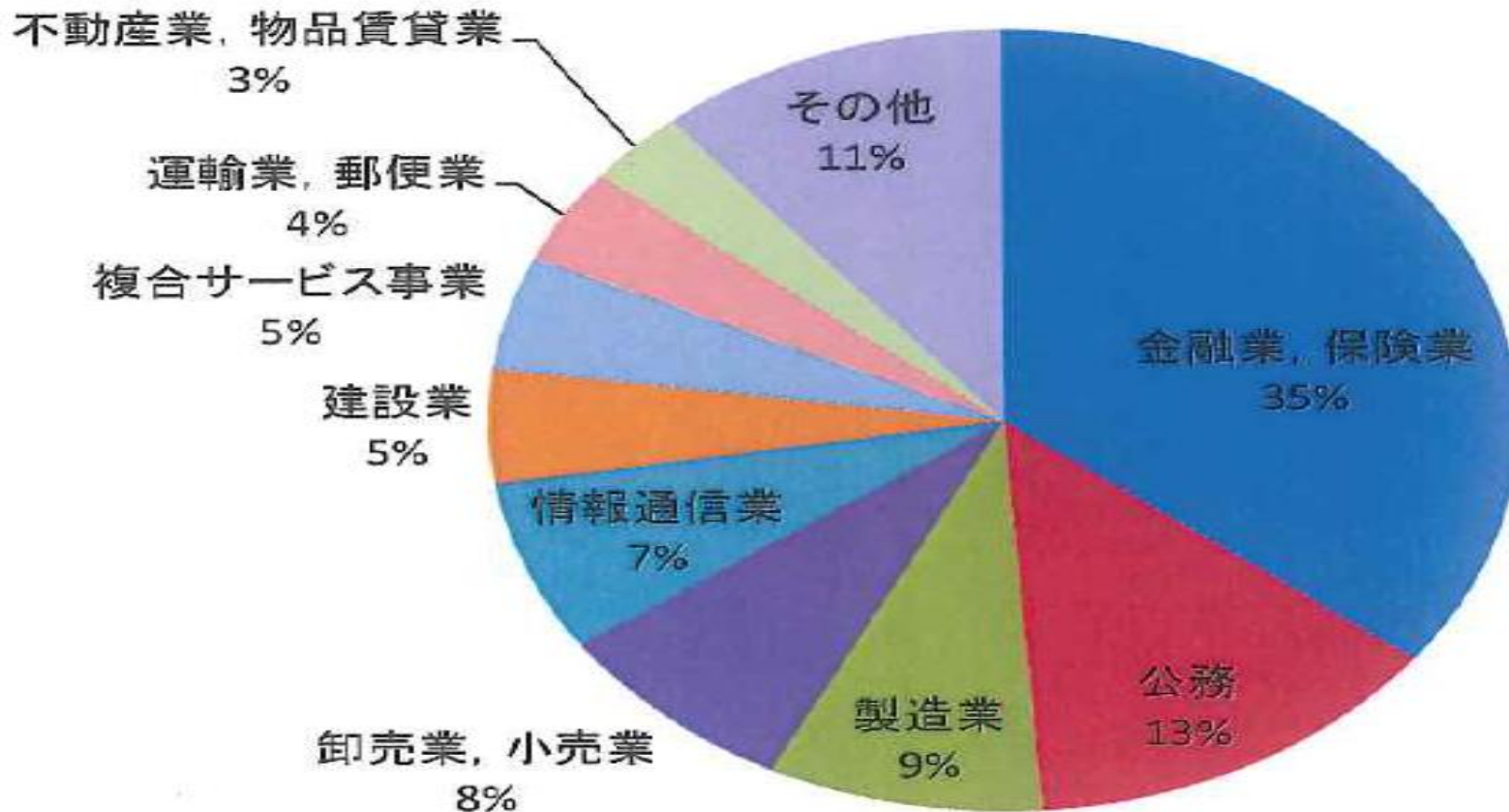
- 1 金融・保険業
- 2 公務
- 3 卸売・小売業

社会情報学科

- 1 金融・保険業
- 2 情報通信業
- 3 公務

資料:経済学科卒業生のケース


H27.3 経済学科卒業生就職先 (業種別)※進学等を除く



現在では、公務員を志望する学生が増加傾向

小樽商大の教育理念は、高い就職率の実現ではなく、あくまで『現代社会の問題解決への貢献と人類普遍の真理探求（憲章より）』

➤ 就活で最終段階までに残るためには、大学での成績だけでなく、コミュニケーション能力や、サークル&ボランティア活動での実績、という傾向が強いが…

- 
- 少なくとも、「大学卒業」をクリアしなければならない
 - 卒業のためには、規定量の単位の取得が要請され（→商大では、124単位＝講義で112＋ゼミ&卒論で12）
 - 商大では学科（他大学では学部）ごとに科目が異なる
 - それぞれの講義の単位を取得するためには、大学に入学してからだけでなく、事前の「学力や知識」が必要

なぜ、数学を学ぶのか？①

- **経済学の役割(貢献)**とは、(社会)科学の一分野として、私たちの社会に潜む社会問題を新たに掘り起こし、問題の本質を理解し、その解決策を示唆すること
- その経済学的示唆に基づいて、すべてのメンバーが幸福で豊かな生活ができる社会の実現に貢献すること



- しかしながら、**経済学のテキストを見ると、その内容は受講生(高卒の新生に限らず社会人でも)が事前に想像していたものとは大きなギャップがある、らしい**
- 私見では、夜間主コースの社会人入試で入った学生(社会人)の多くが、初年度でこのギャップに戸惑う

なぜ、数学を学ぶのか？②

- 経済学は文系の科目なのに、なぜ数学が多いのか？
- 経済学部の新入生が大学での勉強につまづくきっかけ

- 経済学では、(受験勉強における数学のように)既に解が存在すると分かっている問題の解法を覚えたり、多くの定理や法則を暗記すれば対応できるとは限らない

加筆修正

- ① **分析ツールとしての数学** ⇒ 社会問題をモデル化し、そのメカニズムを明らかにして、解決策を示唆する
- ② **科学の言語としての数学** ⇒ 自分の考えを説得的に伝え、他者と論理的な議論するために必要

商大の経済学科の現場では

- 自分は社会とどのように関わっているのかor関わるべきか、(自分とは何か、という哲学的な問題も含めて)社会問題の本質を見極めるためには、『**ツール**』が必要
- そのような問題に取り組むための**分析ツール**として、『**論理的かつ説得的な思考力=数学**』が必要 ...と説得


Voice!

経済学で学ぶことで身につける
世の中の本質を見極めるための力

Q.この学科を選んだ理由は何ですか？

A.経済=カネと思っていましたが、1年次に履修した経済学入門の講義で経済学に触れるうちに、経済というのは世の中の本質を見極めるための力なのだと気づき、興味を持ちました。

（難関）国立大学では、近年の景気回復により、経済学科目を受講する学生数は回復傾向という

- **他の国立大学の先生方からの【聞き取り】**
 - **1990年代以降のいわゆる「失われた20年」の不況期間は、学生に経済学を受講する余裕はなく、資格取得に直結したり、資格取得が有利になる科目に学生が集中**
- 
- **近年の景気回復により、徐々に（理論）経済学を受講する学生数が回復しつつある**
 - **しかし、大学には危機感：『2018年問題→横ばいだった18歳人口が再び↓』…私の場合、ゼミで数学と英語を使用すると宣伝すると、第1希望者=0になる傾向**

経済学の講義において数学を使う意義： なぜ経済学で数学が必要か？

- **数学**を使う＝**論理的**である … 第三者が論証できる
- 巷の経済の書籍と経済学のテキストは全く異なる
- 経済学で扱う理論モデルは、『思考実験』⇒現実(現状)と理想像(在るべき姿)との間に、どのような乖離(ギャップ)があるか？ …を明らかにできる
- 現実(現状)の問題点と、解決のための経済政策の示唆を提示するためには、**モデルの理論的分析**が必要
- **経済モデルの理論的分析**を前提にして初めて、財政政策の効果の示唆や経済の将来予測がある程度は可能


NUMBE3RS “ナンバーズ 天才数学者の事件ファイル” より

- オープニングより: “数学、それは日常の中にある。天気予報、時間を決める。お金のやり取りにも。数学は単なる方程式ではない。ロジック(論理)であり、理性的な思考。数学を使えばどんな謎も解決できる。”
- Season4より: “この数学理論は誰もが頭で感じていることを証明した。つまり、理性的な人間がわざわざ不利な行動をとることがある。数学が持っている力は、ただ単に現実を数値で表すだけでなく、人間性そのものを解明できるということ。いつかは人の心の奥底にあるものを数学で解き明かせるかもしれない。”


NUMBE3RS “ナンバーズ 天才数学者の事件ファイル” より

- 2nd season 第22話より: “フットボールは、自分のエンドゾーンへボールを運ぶとともに、相手チームの動きを封じる。それぞれの役割を果たしつつ、相手のプレイヤーを見て次の動きを予測するんだ。ゲームの目的は明白だ。行動分析で選手や監督の考えがわかる。ニューイングランド・ペイトリオッツを率いるベリチック監督は、**成功の秘訣は『経済学』**と言った”
- ...これは実話: ベリチックは大学で**経済学**の学位を取得。4年で3回(2001、03、04年)のスーパーボウルを制覇(=NFLリーグ・チャンピオン)した監督


経済学で挫折しないための工夫と苦勞

- 私が学生の頃(90年代)とは異なり、今では『入門(レベルの)経済学』や『経済(学で使う)数学』に関する様々なテキストやワークブックが出版されている
- 
- 逆に言うと、経済学部生は経済学で苦勞する前に、**数学や統計学**で苦勞するケースが多いことを証明
 - 経済学を学ぶ際には、数学に興味を持たなくても、最低限として、『**数学アレルギー**』が出ないことが必要
 - 数学ができる学生でも**数学や統計学**を使う講義を避けるケースがある → それらを履修しないまま専門科目へ
 - 私の講義(財政学)では**数学の復習**を講義の中で行う

経済数学のテキストあれこれ

- 『経済数学早わかり』 西村和雄(著) 日本評論社 1982年
 - 『現代経済学の数学基礎』 A.C.チャン(著) CAP出版 1995年
 - 『初歩からの経済数学』 三土修平(著) 日本評論社 1996年
- 
- 近年では(経済)数学に関するテキストが次々に出版
 - 『経済・経営系 数学概説』 竹之内脩(著) 新世社 1998年
 - 『コア・テキスト 経済数学』 戸瀬信之(著) 新世社 2005年
 - 『経済学と数学がイッキにわかる!!』 石川秀樹(著) 学研 2009年
 - 『経済学で使う 微分入門』 川西諭(著) 新世社 2010年
 - 『数学学で出る数学 ワークブックでじっくり攻める』 白石俊輔(著) 尾山大輔・安田洋祐(監修) 日本評論社 2014年
 - 現在では、経済学のテキストの多くで、最後に『数学(付録)』の章がついている

大学院生の場合①

- 理系や工学部では大学院生(マスター)に進学するケースが多いと聞いているが...
 - 私が大学院(北大経済学研究科)に進学した時期は、大学院の拡充期 ⇒ 商大からも多数の同期が入学
 - いわゆる、修士を修了して就職するコースと、研究者を目指して博士課程に進学するコースに分離
- 
- 公務員試験や資格試験を目指さない限り、いずれのコースも就職に苦勞する(改善しない)ケースが多発
 - 現在では、日本人でマスターに進学するケースは稀で、(特に中国からの)留学生が多い

大学院生の場合②


➤ 経済学のレベルが突然jump ⇒ 数学のレベルもjump

- 異時点間(将来にわたる)の家計の効用関数や企業の利潤関数 → 時間に関する積分を利用
- マクロ経済動学では、経済現象の多くを(連立)微分方程式体系で説明
- 定常状態で線形近似することによって、動学システムの安定性を分析 → 行列式を用いて固有方程式を作り、「解と係数の関係」を利用して固有値の符号を確認

家計の異時点間の効用最大化問題 $\max U_i = \int_0^{\infty} u(c_i, l_i) e^{-\rho t} dt$

subject to $c_i + \dot{k}_i = (1 - \tau_i^r) r_i k_i + (1 - \tau_i^w) w_i l_i + T_i$



現実に大学生に向き合って感じること①

- 同僚の先生方からの【聞き取り】: 高校時代にどのような数学をマスターしてきてほしいか？
- 
- 積分は院生からなので、微分をマスターしてほしい
 - 順列や組合せはできるのに、期待値の計算ができない
 - 仕方がないことだが、学習範囲に関して、高校数学と経済数学との間に大きなギャップがある ⇒ 高校数学では、三角比、三角関数、円、複素数や空間ベクトル(昔は一次変換)などのウエイトが高いように思われるが、経済学では(ある特定の分野以外)ほとんど使わない
 - 経済学部生には、指数関数、自然対数およびラグランジュ未定乗数法などは、「天下りの的に」覚えてもらう

現実に大学生に向き合って感じること②

- 経済学では、変数や文字に経済的な意味がある
- 数学の塾講師のバイトをしている学生でも、経済学(の練習問題)で苦労する場合がある
- Cは家計の消費(Consumption)、Kは家計が保有する実物資本や金融資本(capital)、Lは労働時間(labor)、 π は企業の利潤(profit)、wは賃金率(wage rate)、rはレンタル率や利子率(rental rate, interest rate)...
- さらに、経済学で数学が必要な機会は、「計算(←四則演算や微積分)」だけではない
- したがって、「計算スピードが速い=経済モデルの理解度が深い」とは限らない

科学の言語としての数学

- 逆に言うと、数学がないと(or使えないと)、社会の様々な現象(とその背景にある「未知」のメカニズム)を論理的に考察・解明するのは困難
- 
- 解明には**数学は必要不可欠＝思考と分析の「ツール」**
 - “**自然は数学の言語で書かれている**” by ガリレオ ⇒ 『**数学は科学の言語**』と言われる ...自然科学と同様に、社会科学の一分野としての**経済学**でも、**数学は有益**
- 
- 以下では、様々な**経済問題**を例にして、**経済学**の基本的な考え方を紹介 ...私見では、**基本的には高校で習う数学**を理解していれば、十分に応用できる

参考文献リスト

- ① 『「学力」の経済学』 中室牧子(著) ディスカヴァー・トゥエンティワン 2015年
- ② 『教養としての経済学』 一橋大学経済学部(編) 有斐閣 2013年
- ③ 『経済成長理論入門』 C.I. ジョーンズ(著) 香西泰(訳著) 日本経済新聞社 2000年
- ④ Jones, C.I. and Vollrath, D., “Introduction to Economic Growth, 3rd”, Norton, 2013.
- ⑤ 『コア・テキスト 公共経済学』 板谷淳一・佐野博之(共著) 新世社 2013年
- ⑥ 小樽商科大学 2016年 大学案内
- ⑦ 『経済学部は理系である!?!』 井堀利宏(著) 22日発売

【復習】：効用関数

- ある個人 i の効用(満足度や幸福感)の水準： U^i
⇒消費の組合せ(=消費ベクトル)に依存…関数
- 財が2種類(リンゴとミカン)の場合： $U^i = U^i(c_1, c_2)$
- 一般的な効用関数(個人 i の好み=**選好**)の定義：
【例】 i **prefer** (リンゴ3個、ミカン2個) **to** (リンゴ2個、ミカン3個)
- 個人の**選好**を $(3, 2) \succ (2, 3)$ と表す
↓
 $U^i : X \rightarrow R \Rightarrow$ 実数(の集合)への写像(mapping)
- **効用関数** U^i を通じて、実数で表現可能
 $U^i(3, 2) > U^i(2, 3) \Rightarrow$ より大きな(実数の)値を返す

【補論】：効用関数の形状

- 【例】：1か月のバイトの報酬10万円を受け取る際に、店長から次のような申し出を受けたと仮定
- サイコロ1回だけ振って、奇数が出たら5万に下がるが、偶数が出たら15万に上がる

- 
- 【問】：あなたは店長の申し出を呑むか？ それとも、申し出を断り、当初の10万円を受け取るか？

- ちなみに、どちらのケースでも、収益は同じ
⇒【理由】：この申し出の期待収益は10万円

$$(1/2) \times 5 + (1/2) \times 15 = 2.5 + 7.5 = 10$$

- しかし、満足度(効用水準)は個人間で異なる!!

ケース①: 50%の確率で5万だが、50%の確率で15万

ケース②: 確実に10万もらえる (→収益は①と同じ)

✓ 「ケース①」 $<$, $=$, $>$ 「ケース②」

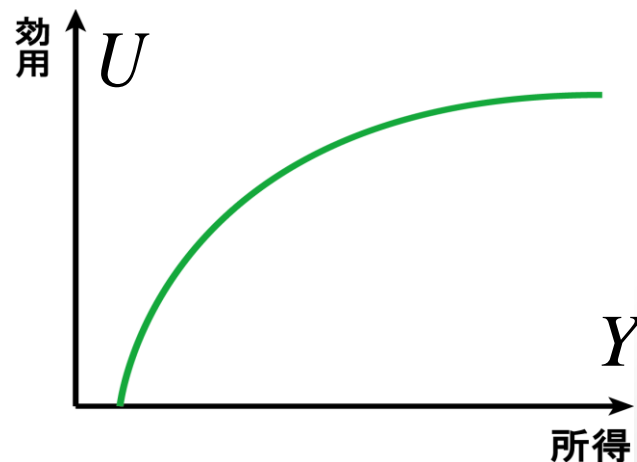
…という好み(選好)をもつ個人を、それぞれ
危険回避的, 危険中立的, 危険愛好的であるという
(risk-averse, risk-neutral, risk-loving)

✓ 特に**危険回避的な個人**は、この申し出について

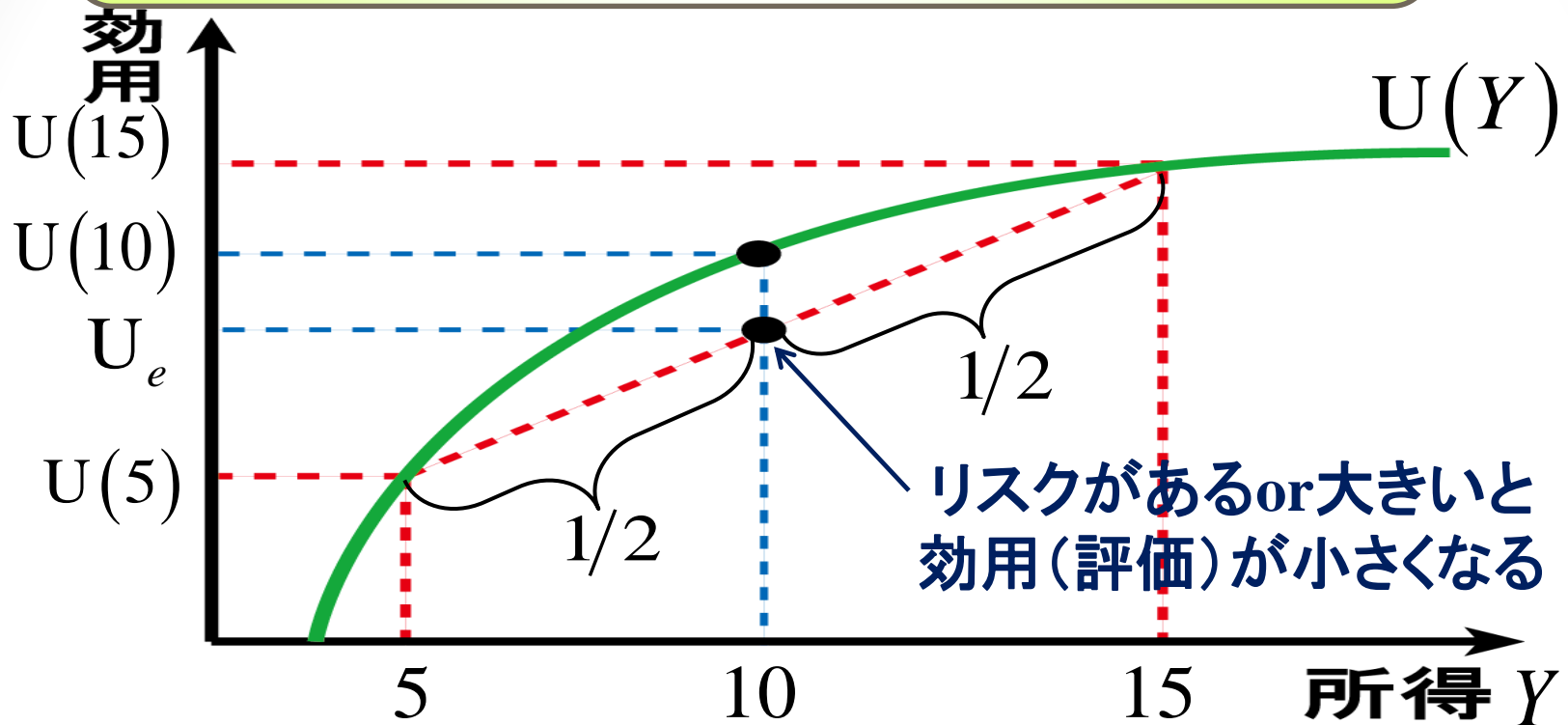
$$U(10) > (1/2) \times U(5) + (1/2) \times U(15)$$

という評価を下している

✓ 効用関数 $U = U(Y)$ の形
⇒ (強い) **凹 (concave) 関数**



危険回避的な個人の効用関数 ⇒凹 (concave) 関数になる理由



危険回避者 (risk averter) は②を選ぶ、ことを前提としている

$$U(10) > (1/2) \times U(5) + (1/2) \times U(15) = U_e$$

接線の傾きが正 $\Leftrightarrow dU/dY > 0 \Leftrightarrow$ 限界効用が正
 接線の傾きが小さくなる $\Leftrightarrow d^2U/dY^2 < 0 \Leftrightarrow$ 限界効用が逓減

自然対数:natural logarithm

特に $\log_e x$ を**自然対数**といい、「底」の e を省略して

$\log x, \ln x$ と書く。つまり、 $y = \log x \Leftrightarrow e^y = x$

$f(x) = \log_a x$ の導関数は $f'(x) = (\log_a x)' = (1/x) \log_a e$

$f(x) = \log x$ の導関数は $f'(x) = (\log x)' = 1/x$

このとき、 e をNapierの定数(ネイピア数)と言い、

定義は

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2.718\cdots = e$$

である。また、

$e^{\log x} = x \Rightarrow$ “ $\log x$ は、 e を $\log x$ 乗すると x になる数”

さらに、 $f(x) = e^x$ の導関数は $f'(x) = (e^x)' = e^x$

【応用】 e の理解の仕方 $\Rightarrow e^r$ で利子率を表現

利子率(年利)を $r = 0.02$ として、複利計算を考える

1年後; $(1 + 0.02) \times \text{元本(本来は...)}$

半年ごと; $\left(1 + \frac{0.02}{2}\right)^2$ \rightarrow 3か月ごと; $\left(1 + \frac{0.02}{4}\right)^4$

\rightarrow 毎日; $\left(1 + \frac{0.02}{365}\right)^{365}$ \Rightarrow 1秒ごと
(無限回) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$

【問】無限個の掛け算になるが、利子を無限にもらえるか?

\Rightarrow 【答】 No!! 数学の定理(証明)より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r \text{ 有限 } (< +\infty) \text{ かつ定数}$$

になり、 e^r と書く

【応用】自然対数の微分 → 経済成長率の計算

【例】 $y(t) = y_0 e^{gt}$ (y_0 は初期値 ⇒ 初期時点の実質GDP)

$y(t) = y_0 e^z$, $z = gt$ (ただし g は一定) とおくと

$$\log y(t) = \log y_0 + \log e^{gt} = \log y_0 + gt \log e = \log y_0 + gt$$

連鎖法より
$$\frac{d \log y(t)}{dt} = \frac{d \log y(t)}{dy(t)} \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{y(t)} \frac{dy(t)}{dt} = g$$

$$\therefore \frac{dy(t)}{dt} \bigg/ y(t) = g$$



ここで、慣例として $\dot{y}(t) \equiv dy(t)/dt$ と書くと、

定率の経済成長率 (= 実質GDPの増加率) を g で定義できる
$$g = \dot{y}(t)/y(t) \iff y(t) = y_0 e^{gt}$$