第６４回：数実研レポート
２次曲線の一般的なグラフの描き方から見えるもの

平成 20 年 2 月 2 日

留萌千望高校教諭　佐川　大樹

１．はじめに

昨年の東京大学の入試（後期）で次のような問題が出題された.

（問題．２）

次の問に答えよ.

(1)　実数を成分とする行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $(a^2+b^2\neq 0)$ に対し,

$$B=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$$ とおく.

行列 B は $B=\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ の形であることを示し，$r+t$, $rt-s^2$ を a , b , c を用いて表せ.

(2)　前問(1)において $r^2+s^2 \geqq a^2+b^2$ が成り立つことを示せ.

(3)　実数 a_n , b_n , c_n ($n=0 , 1 , 2 , \cdots$) を次のように定める.

$n=0$ のとき $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$n\geqq 1$ のとき $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$

(ア)　$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ を示せ.

(イ)　$\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ.

（略解）

(1)　$B=\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^3+2ab^2+b^2c & b(ac-b^2) \\ b(ac-b^2) & a(ac-b^2) \end{pmatrix}$ より

$$r=\frac{a^3+2ab^2+b^2c}{a^2+b^2} , s=\frac{b(ac-b^2)}{a^2+b^2} , t=\frac{a(ac-b^2)}{a^2+b^2}$$

$r+t=a+c$,　$rt-s^2=ac-b^2$

(3)(イ)　$\lim_{n\to\infty} a_n=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\lim_{n\to\infty} c_n=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

この問題に関しては地道な成分計算で処理することができるが，図形的な背景には２次曲線の回転変換が挙げられる．そこで，ここでは２次曲線の一般的な描き方を確認し，この問題の意味するものは何か．特に $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} c_n$ が表すものは何かを探っていきたい.

２．２次曲線の標準形を目指して（その１）

一般的に２次曲線の方程式は

$$ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots\cdots ①$$

と表せる．これは行列を用いて

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+2(g \quad f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+c=0 \quad \cdots\cdots ①'$$

とも表せる．しかし，xy の項が邪魔して与えられた２次曲線がどんなグラフを表すのかわからない．そこで①に回転変換を施して xy の項をなくしていくというのが出発点になる．

まず，点 (x, y) を原点を中心に $-\theta$ 回転した点を (X, Y) とおく．すなわち

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

このとき，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X\cos\theta-Y\sin\theta \\ X\sin\theta+Y\cos\theta \end{pmatrix}$$

である．これは

$$(x \quad y)=(X \quad Y)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とも表されるから，①’に代入すると

$$(X \quad Y)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}+2(g \quad f)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}+c=0$$

$$\cdots\cdots ②'$$

したがって，θ をうまくとって

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ③$$

とすることができるならば，①’は適当な回転変換によって xy の項のない２次曲線

$$\alpha x^2+\beta y^2+2g'x+2f'y+c=0 \quad \cdots\cdots ②$$

が得られる．（ただし，$g'=g\cos\theta+f\sin\theta$，$f'=-g\sin\theta+f\cos\theta$ ）

②は平方完成することによってグラフ（楕円，双曲線，放物線）を描くことができるので，それを原点を中心に θ 回転すれば①のグラフが得られる．

３．行列の対角化

問題は③を満たすような θ をどうやって選んでいくかということである．それには行列の対角化という知識が必要になってくる．行列の対角化は，「行列の n 乗」を求める手法としてしばしば入試問題に登場するので，高校の範囲を超えているとはいえ昔から受験生には必要とされてきた知識である．行列の対角化とは，行列 A が与えられたとき，ある正則行列（逆行列を持つ行列のこと）P を用いて $P^{-1}AP$ を対角行列（対角成分以外がすべて 0 の行列のこと）にすることをいう．

ここでは，２次曲線のグラフを描くことを目的としているので，行列 A を対称行列 $A=\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ に

限って対角化していくことにする．対角化の手順は次の通りである．

(1)　行列Ａの固有値を求める.

一般的に行列 A に対して $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ を満たす λ を A の固有値，$\vec{x}$ を λ に対する固有ベクトルという．すなわち行列 A で表される１次変換で方向が変わらないベクトルを固有ベクトルという．固有ベクトルについては方向だけが問題となるので，固有ベクトルの長さは自分の都合に合わせることができる．

さて，行列 A の固有値は x の２次方程式

$$x^2-\mathrm{tr}(A)x+\det(A)=x^2-(a+b)x+(ab-h^2)=0 \quad \cdots\cdots④$$

を解くことによって求められる．④の判別式を D とおくと

$$D=(a+b)^2-4(ab-h^2)=(a-b)^2+4h^2$$

我々はもともと $h\neq 0$ の場合について話を進めているので，$D>0$ であり，したがって行列 A の固有値は２つある．それを λ_1,λ_2 とおく（ただし，$\lambda_1\neq\lambda_2$ ……⑤）．

(2)　Ａの固有ベクトルを求め，それらを並べて行列Ｐを作る

固有値 λ_1,λ_2 に対する A の単位固有ベクトル（長さが 1 の固有ベクトル）をそれぞれ

$$\overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$$

とおく．このとき，$\overrightarrow{u_1}\perp\overrightarrow{u_2}$ である．これを証明する前に次のことを確認しておく．

ここで扱う行列 A は対称行列 $A=\begin{pmatrix}a&h\\h&b\end{pmatrix}$ である．対称行列とは，行列の行と列を入れ換えてももとと変わらない行列のことで，記号で表すと ${}^tA=A$ を満たす行列が対称行列である．なお，${}^tA$ は行列の行と列を入れ換えてできる行列を意味し，転置行列という．この記号を用いると，ベクトルの内積は次のように表すことができる．

$$\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}={}^t\overrightarrow{u_1}\,\overrightarrow{u_2}=(x_1\quad y_1)\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=x_1x_2+y_1y_2 \quad \cdots\cdots⑥$$

（ベクトルの内積を 1-2 行列と 2-1 行列の積とみなしている）

また転置行列については次の重要な性質が成り立つ.

$${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA \quad \cdots\cdots⑦$$

これをふまえて $\overrightarrow{u_1}\perp\overrightarrow{u_2}$ を示す．まず，固有値，固有ベクトルの定義より，

$$A\overrightarrow{u_1}=\lambda_1\overrightarrow{u_1}\ ,\quad A\overrightarrow{u_2}=\lambda_2\overrightarrow{u_2} \quad \cdots\cdots⑧$$

$A\overrightarrow{u_1}$ と $\overrightarrow{u_2}$ の内積をとると，

$$A\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=\lambda_1\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2} \quad \cdots\cdots⑨ \qquad (\because ⑧より)$$

一方，

$$\begin{aligned}A\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}&={}^t(A\overrightarrow{u_1})\,\overrightarrow{u_2} && (\because ⑥より)\\&={}^t\overrightarrow{u_1}\,{}^tA\,\overrightarrow{u_2} && (\because ⑦より)\end{aligned}$$

$$= {}^t\overrightarrow{u_1}A\overrightarrow{u_2} \qquad (\because\ A \text{ は対称行列})$$
$$= {}^t\overrightarrow{u_1}\lambda_2\overrightarrow{u_2} \qquad (\because \text{⑧より})$$
$$= \lambda_2{}^t\overrightarrow{u_1}\,\overrightarrow{u_2} = \lambda_2\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2} \quad \cdots\cdots⑩$$

⑨－⑩より，

$$(\lambda_1-\lambda_2)\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2} = 0$$

⑤より $\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるから，$\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2} = 0$ ．すなわち $\overrightarrow{u_1}\perp\overrightarrow{u_2}$ が示された．

さて，固有ベクトルを並べてできる行列 P は

$$P = (\overrightarrow{u_1}\quad\overrightarrow{u_2}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

である．このように，互いに直交する単位ベクトルを並べてできる行列を直交行列といい，次の重要な性質が成り立つ．

$$P^{-1} = {}^tP \quad \cdots\cdots⑪$$

これは，$x_1{}^2 + y_1{}^2 = x_2{}^2 + y_2{}^2 = 1$, $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ を用いて ${}^tPP$ を計算すれば容易に確かめられる．

(3)　Ｐ$^{-1}$ＡＰを計算する

P は直交行列で⑪が成り立つことを利用すると，

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} {}^t\overrightarrow{u_1} \\ {}^t\overrightarrow{u_2} \end{pmatrix} A(\overrightarrow{u_1}\quad\overrightarrow{u_2}) = \begin{pmatrix} {}^t\overrightarrow{u_1} \\ {}^t\overrightarrow{u_2} \end{pmatrix}(A\overrightarrow{u_1}\quad A\overrightarrow{u_2})$$
$$= \begin{pmatrix} {}^t\overrightarrow{u_1} \\ {}^t\overrightarrow{u_2} \end{pmatrix}(\lambda_1\overrightarrow{u_1}\quad\lambda_2\overrightarrow{u_2}) \qquad (\because \text{⑧より})$$
$$= \begin{pmatrix} {}^t\overrightarrow{u_1}\lambda_1\overrightarrow{u_1} & {}^t\overrightarrow{u_1}\lambda_2\overrightarrow{u_2} \\ {}^t\overrightarrow{u_2}\lambda_1\overrightarrow{u_1} & {}^t\overrightarrow{u_2}\lambda_2\overrightarrow{u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1{}^t\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1} & \lambda_2{}^t\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2} \\ \lambda_1{}^t\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_1} & \lambda_2{}^t\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots⑫ \qquad (\because\ \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \text{ は互いに垂直な単位ベクトルより})$$

４．２次曲線の標準形を目指して（その２）

$$(x\quad y)\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(g\quad f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \quad \cdots\cdots①'$$

において，$A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ の単位固有ベクトルを並べてできる行列 P に対して，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

という１次変換を考える．P は直交行列であるから，⑦，⑪より，

$$(x\quad y) = (X\quad Y)\,{}^tP = (X\quad Y)\,P^{-1}$$

したがって，これらを①’に代入すると，

$$(X\quad Y)\,P^{-1}AP\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+2(g\quad f)\,P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+c=0$$

⑫より

$$(X\quad Y)\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+2(g\quad f)\,P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+c=0$$

すなわち,

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+(\,X\text{ と }Y\text{ の1次以下の項}\,)=0\quad\cdots\cdots⑬$$

となり，XY の項を消すことができた．したがって，⑬の X と Y をそれぞれ x と y に替えた

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+(\,x\text{ と }y\text{ の1次以下の項}\,)=0\quad\cdots\cdots⑬'$$

のグラフは P で表される1次変換で①のグラフに移される．ここで単位固有ベクトルの選び方によって，P を回転変換を表す行列とすることができる．

５．東大入試の背景を探る

行列 A_n および P_n をそれぞれ

$$A_n=\begin{pmatrix}a_n&b_n\\b_n&c_n\end{pmatrix}\ ,\quad P_n=\begin{pmatrix}a_n&b_n\\-b_n&a_n\end{pmatrix}$$

とおく．また曲線 C_n を

$$C_n:\quad (x\quad y)A_n\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(x\quad y)\begin{pmatrix}a_n&b_n\\b_n&c_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=1$$

すなわち

$$a_nx^2+c_ny^2+2b_nxy=1$$

とおく．ここでは,

$$A_0=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\quad\text{より，}\quad C_0:\ x^2+2y^2+2xy=1\quad\cdots\cdots⑭\quad\text{である．}$$

さて，題意より $A_n=P_{n-1}\,A_{n-1}\,P_{n-1}^{-1}$ であるから，曲線 C_1 の方程式は,

$$C_1:\quad (x\quad y)A_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(x\quad y)\,P_0A_0P_0^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=1$$

ここで注意したいのは，$P_0=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ は直交行列ではないことである．

（∵ $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ は単位ベクトルではないから）

したがって，P_0 を表す1次変換によって，曲線 C_0 は曲線 C_1 に移るわけではない．実際，C_0 上の点を (X,Y)，C_1 上の点を (x,y) として

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=P_0^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}$$

の変換を考える．⑭より,

$$X^2+2Y^2+2XY=1$$

これに $X=\frac{1}{2}(x-y)\,,\,Y=\frac{1}{2}(x+y)$ を代入すると

$$\frac{1}{4}(x-y)^2+2\cdot\frac{1}{4}(x+y)^2+2\cdot\frac{1}{2}(x-y)\cdot\frac{1}{2}(x+y)=1$$

すなわち，

$$5x^2+y^2+2xy=4 \quad \cdots\cdots⑮$$

一方，

$$A_1=P_0A_0P_0^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&1\\1&1\end{pmatrix}$$

であるから，曲線 C_1 の方程式は

$$C_1: \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(5x^2+y^2+2xy)=1 \quad \text{すなわち} \quad 5x^2+y^2+2xy=2$$

となり，⑮と異なる式が得られた．

そこで，行列 P_n の代わりに

$$Q_n=\frac{1}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\begin{pmatrix}a_n&b_n\\-b_n&a_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}P_n$$

とおく．このとき，

$$Q_n^{-1}=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\begin{pmatrix}a_n&-b_n\\b_n&a_n\end{pmatrix}=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\,P_n^{-1}$$

であるから，

$$Q_nA_nQ_n^{-1}=\frac{1}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}P_nA_n\sqrt{a_n^2+b_n^2}\,P_n^{-1}=P_nA_nP_n^{-1}=A_{n+1}$$

したがって，曲線 C_n の方程式は

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}A_n\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}Q_{n-1}A_{n-1}Q_{n-1}^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=1 \quad \cdots\cdots⑯$$

ここで，

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=Q_{n-1}^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

の変換を考えると，Q_n は直交行列であるから，

$$\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}{}^tQ_{n-1}^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}Q_{n-1}$$

したがって，⑯は，

$$\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}A_{n-1}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=1$$

と変形される．以上より，曲線 C_{n-1} は Q_{n-1} で表される 1 次変換によって曲線 C_n に移る．この行列 Q_{n-1} は回転変換を表す行列であるから，曲線 C_0 を原点を中心に回転していくことによって，曲線 $C_1\,,\,C_2\,,\cdots\cdots,\,C_n\,,\cdots\cdots$ が得られる．

さて，こうして得られる曲線 $C_0\,,\,C_1\,,\,C_2\,,\cdots\cdots,\,C_n\,,\cdots\cdots$ において，$n\to\infty$ としたときの曲線 C_n を

C_∞ と表す．すなわち，

$$C_\infty : \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} a_n & \lim_{n\to\infty} b_n \\ \lim_{n\to\infty} b_n & \lim_{n\to\infty} c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

ここで，設問(3)の(ア)より， $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であるから，曲線 C_∞ は xy の項のない２次曲線である．

すなわち， $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} c_n = \beta$ とおくと，

$$C_\infty : \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x^2 + \beta y^2 = 1$$

以上より，曲線 C_0 を原点を中心に回転して xy の項をなくしたときの，x^2 , y^2 の係数がそれぞれ $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} c_n$ ということになる．

さて，曲線 C_0 の方程式は

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2y^2 + 2xy = 1$$

$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ において，$\mathrm{tr}(A_0) = 1 + 2 = 3$， $\det(A_0) = 1\times 2 - 1\times 1 = 1$ であるから，A_0 の固有値は２次方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ を解いて，

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

このとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ より，} \quad x_1 : y_1 = 2 : (1+\sqrt{5})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ より，} \quad x_2 : y_2 = -(1+\sqrt{5}) : 2$$

また， $\sqrt{(1+\sqrt{5})^2 + 2^2} = \sqrt{10+2\sqrt{5}}$ であるから，行列 R を

$$R = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2 & -(1+\sqrt{5}) \\ 1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$R^{-1} A_0 R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

であるから，曲線 C_∞ の方程式は

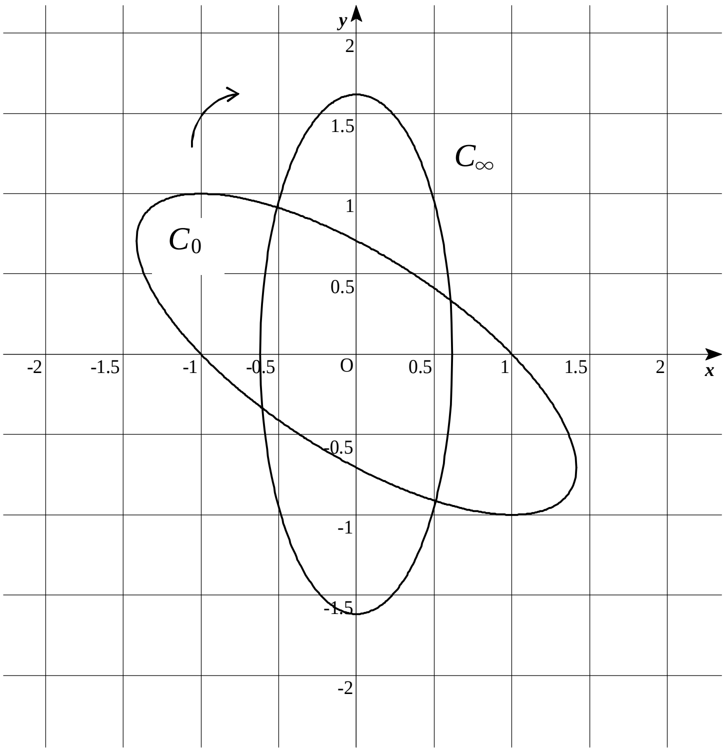
$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} x^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} y^2 = 1 \quad \cdots\cdots ⑰$$

となる．（曲線 C_0 を R^{-1} で表される行列によって曲線 C_∞ に移される）

したがって，

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

が得られる．



６．補足（その１）

固有ベクトルを並べてできる行列については，並べる順番はどちらでもよいので，

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} -(1+\sqrt{5}) & 2 \\ 2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

とおいても，A_0 を対角化することができる．R_1 は原点を通る直線に関する折り返し変換を表す行列であるので，回転変換にこだわるのであれば，

$$R_2 = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 2 \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

とおいてもよい．その場合，

$$R_1^{-1}A_0R_1 = R_2^{-1}A_0R_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

となり，C_0 は R^{-1} で表される行列によって，

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}x^2 + \frac{3+\sqrt{5}}{2}y^2 = 1 \quad \cdots\cdots⑱$$

に移される．つまり，回転の仕方によっては⑰にも⑱にもなるということである（楕円の長軸を x 軸に合わせるように回転するか，y 軸に合わせるように回転するかの違いである）．

ここでは，$n = 1, 2, \cdots\cdots$ のとき $a_n > c_n$ である（証明は「７．補足（その２）」で取り上げる）から，$\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} c_n$ であり，したがって，対角化した行列の 1-1 成分は 2-2 成分よりも大きくなければならない．

７．補足（その２）（ $a_n > c_n$ の証明）

$n = 1 , 2 ,$ …… のとき，設問(1)の結果を利用すると，

$$a_n c_n - b_n^2 = a_{n-1} c_{n-1} - b_{n-1}^2 = \cdots = a_0 c_0 - b_0^2 = 1 \cdot 2 - 1^2 = 1$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}^3 + 2a_{n-1} b_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 c_{n-1}}{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}$$

$$b_n = \frac{b_{n-1}(a_{n-1} c_{n-1} - b_{n-1}^2)}{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2} = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}$$

$$c_n = \frac{a_{n-1}(a_{n-1} c_{n-1} - b_{n-1}^2)}{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}$$

まず，$a_0 > 0 , b_0 > 0 , c_0 > 0$ であるから，

$$a_n > 0 , b_n > 0 , c_n > 0$$

次に，

$$a_n - a_{n-1} = \frac{a_{n-1}^3 + 2a_{n-1} b_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 c_{n-1}}{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2} - \frac{a_{n-1}(a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2)}{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}$$

$$= \frac{a_{n-1} b_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 c_{n-1}}{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2} > 0$$

であるから，

$$a_n > a_{n-1} > \cdots\cdots > a_0 = 1$$

したがって，

$$a_n - c_n = \frac{a_{n-1}^3 + 2a_{n-1} b_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 c_{n-1}}{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2} - \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}$$

$$= \frac{a_{n-1}(a_{n-1} - 1)(a_{n-1} + 1) + 2a_{n-1} b_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 c_{n-1}}{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2} > 0$$

以上より，$n = 1 , 2 ,$ …… のとき $a_n > c_n$ が成り立つ.

８．参考文献

『大学への数学（2007 年 5 月号)』(東京出版)

寺田文行，木村宣昭『基本演習線形代数』(サイエンス社)

安藤四郎，駒木悠二『工科系のための線形代数』(裳華房)