数学的帰納法の指導における一考察

北海道札幌稲雲高等学校教諭
山本大輔

はじめに

数学的帰納法は生徒にとって理解しにくい証明方法のひとつである。数学Ⅱの最初に習った方程式・不等式の証明と違った方法で証明されるために、指導の接続性が悪く、不等式の証明においては、$n=k$ のときの仮定をどのように扱うかが難しく思う生徒が多いことは確かである。

<問題１>
n を自然数とするとき、次の等式を証明せよ

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdots\cdots①$$

解Ⅰ

[Ⅰ]　$n=1$ のとき、

(左辺) $=1^2=1$

(右辺) $=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$

よって $n=1$ のとき、①は成立する

[Ⅱ]　$n=k$ のとき、

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\cdots\cdots②$$

が成り立つと仮定すると

②の両辺に $(k+1)^2$ を加えると

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

よって、$n=k+1$ のとき、①は成立する

[Ⅰ][Ⅱ]　より、①はすべての自然数で成り立つ

この解答で気になる点は、②の両辺に

$(k+1)^2$　を加える点である。

数学Ⅱの「式と証明」で等式の証明を説明するときに、「両辺同時変形をしてはいけない」と説明したにもかかわらずこの解答では両辺同時変形をしています。この解答が正しい理由は、②式を正しいと仮定したからであって、正しいと仮定したものの両辺に $(k+1)^2$ を加えた結果　$n=k+1$ の等式が導き出されたので、$n=k+1$　のときも正しいことが証明できたのです。生徒には非常に分かりにくいと思われるので、別解を考えます。

解Ⅱ

前半省略

[Ⅱ]　$n=k$　のとき、

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\cdots\cdots②$$

が成り立つと仮定して

$n=k+1$　のとき

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\cdots\cdots③$$

を証明すればよい。

③の左辺に②を代入すると、

$$(③の左辺)=\underbrace{1^2+2^2+\cdots+k^2}+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$
$$=(③の右辺)$$

よって、$n=k+1$ のとき、①は成り立つ

解Ⅰは等式の証明との関係で非常にわかりにくいが、解Ⅱはすっきりするのではないでしょうか？生徒はこの方が理解し易いようです。

次に不等式の証明を見てみます。

△▲▽▼△▲▽▼△▲▽

<問題２>

nが２以上の自然数のとき、

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}\quad\cdots\cdots①$$

を証明せよ

解Ⅰ

[Ⅰ] $n=2$ のとき、

$(左辺)-(右辺)=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}>0$

よって$n=2$のとき、①は成立する

[Ⅱ] $n=k$ のとき、

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}\quad\cdots\cdots②$$

が成り立つと仮定すると

$n=k+1$ のとき、

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}\quad\cdots\cdots③$$

を証明する。

②の両辺に、$\frac{1}{k+1}$ を加えると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$$

$$>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=\frac{2k+1}{k+1}$$

ここで、$\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}\cdots\cdots④$ を示す

(左辺―右辺) $=\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}$

$$=\frac{4k^2+9k+4}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+4)(2k+1)}{(k+1)(k+2)}>0$$

よって、$n=k+1$ のとき①は成り立つ

解Ⅱ　(前半省略)

(③の左辺－右辺)

$$=\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}}+\frac{1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$$

よって、$n=k+1$ のとき①は成り立つ

△ ▲ ▽ ▼ △ ▲ ▽ ▼ △ ▲ ▽

解Ⅰは、④式以下の証明が必要であり、本来証明する式が分断されるため、生徒にとっては理解しにくいものとなる。解Ⅱは本来証明すべきものが、はっきりするということと、不等式の証明は、(左辺)－(右辺)＞０　で指導することが多いため生徒にとっては理解しやすいといえる。教科書や問題集、参考書の解法は以上の解Ⅰと解Ⅱが入り混じっており、生徒が混乱しているようなので、次の２つの解法があるがどちらを選ぶか？と説明した後に問いかけたところ圧倒的に解Ⅱがすっきりとしてわかりやすいという評判であった。

<問題３>

nが自然数のとき次の不等式を証明せよ

$$3^n>n^2+n\cdots\cdots①$$

[1]　$n=1$のとき

$(左辺)-(右辺)=3^1-(1^2+1)=1>0$

よって、$n=1$のとき①は成り立つ

[2] $n=k$のとき

$3^k>k^2+k\cdots\cdots②$　が成り立つと仮定する

$n=k+1$のとき

$3^{k+1}>(k+1)^2+(k+1)\quad\cdots\cdots③$

を示せば良い。

$(③の左辺―右辺)=3^{k+1}-(k+1)^2+(k+1)$

$=3\cdot3^k-k^2-k$

ここで②式を代入して

$>3\cdot(k^2+k)-k^2-k$

$=2k(k+1)>0$

よって、$n=k+1$のとき①は成り立つ

[1][2]より、①はすべての自然数で成り立つ

おわりに

①式を示すためには、②式を使って③式を示せば良いことがわかる。

証明すべきものを明確にして、しかも何を使うのかをはっきりさせることによって数学的帰納法はより身近な存在になるでしょう。