

べき乗和の時短解法

～ 少しだけサステナぶる「べき乗和」の求め方

中村文則

0. はじめに

k^3 のべき和は次数をひとつあげた k^4 を考え、差分 $(k+1)^4 - k^4$ に $k=1$ から $k=n$ まで代入して求めます。でも、実際解いてみると結構面倒かな、そう感じないでしょうか。

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^n k^m$$

これを以下 S_m と書くことにします。 S_1 , S_2 , S_3 はそれぞれ自然数の和, 平方数の和, 立方数の和です。高校で扱うのは3乗の和までなのでそれぞれ S , T , U に変えてもいいでしょう。

上述の差分で S_3 は次のように求められます。

$$\sum_{k=1}^n \{(k+1)^4 - k^4\} = (2^4 - 1^4) - (3^4 - 2^4) \cdots + \{(n+1)^4 - n^4\} = (n+1)^4 - 1$$

$$\text{ここで, } (k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

$$\text{これから, } \sum_{k=1}^n \{(k+1)^4 - k^4\} = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n$$

$$\text{和をとると, } (n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n$$

そして S_1 , S_2 を利用して S_3 を計算します。そのあとは数学教員の性(サガ)で奇麗に仕上げたいから頑張って因数分解を試みます。でもこんなことやってたら単元の時間がなくなるという不安が頭をよぎり、授業では k^3 のべき乗和については、「 k や k^2 と同じようにできるから」と生徒にも自分自身にも言いかせ数学教員の性を捨て去り断念するのです。

この原理でいくと例えば S_6 を求めようとする、「 S_1 から S_5 の値が必要だからぞっとするね」とでもいって観念させ、早々とサステナブルな議論を打ち切ります。まあ、私の実感ですが。

でもどうにもすっきりしないので、べき乗和の時短解法ができないか考えてみた次第です。

このとき、時短解法のキモとなるのは次の関係式です。

$$\sum_{k=1}^n \{k^s(k+1)^t - (k-1)^s k^t\} = n^s(n+1)^t \quad \cdots (*)$$

k に自然数を代入して和を求めていくと次々にドミノ倒しの如く相殺されて消えさり右辺が得られます。

でも、 s と t とかの文字の扱いが面倒と感じる生徒がいる場合はここで確認の必要はありません。

さあ、それでは時短劇場の開演です。

1. S_1 の公式

(*)で、 $s=t=1$ にします。

$$k(k+1) - (k-1)k = 2k$$

そして、 $k=1$ から $k=n$ までの和をとります。

$$\sum_{k=1}^n \{k(k+1) - (k-1)k\} = \sum_{k=1}^n 2k = 2S_1$$

左辺は、(*)の計算結果をまだ確認しないなら黒板の端に右の計算を書いて示しましょう。

これから、

$$n(n+1) = 2S_1$$

以上より、

$$S_1 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

【差分の和】

$$k=1 \quad \text{のとき} \quad 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1$$

$$k=2 \quad \text{のとき} \quad 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2$$

$$k=3 \quad \text{のとき} \quad 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3$$

.....

$$k=n-1 \quad \text{のとき} \quad (n-1)n - (n-2)(n-1)$$

$$k=n \quad \text{のとき} \quad n(n+1) - (n-1)n$$

縦方向に加えて和を求めると、

ドミノ倒しのように次々に値が消えて、

$n(n+1)$ だけが残る。

もちろん、自然数の和は等差数列の和で示したり、ガウス少年のアイデアを再確認したっていいでしょう。
でも、サステナぶりたいのであれば、 S_1 の求め方をプロローグとして触れておきましょう。

2. S_2 の公式

$s=2$, $t=1$ とします。

$$k^2(k+1)-(k-1)^2k=(k^3+k^2)-(k^3-2k^2+k)=3k^2-k$$

$k=1$ から $k=n$ まで和をとります。

ここで先ほど黒板の端に書いた【差分の和】の指数を黄色チョークで書き加えてから和を示します。結果、次のようになります。

$$n^2(n+1)=3S_2-S_1$$

$$3S_2=n^2(n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

以上より、

$$S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

【差分の和】

$$k=1 \quad \text{のとき} \quad 1^2 \cdot 2 - 0^2 \cdot 1$$

$$k=2 \quad \text{のとき} \quad 2^2 \cdot 3 - 1^2 \cdot 2$$

$$k=3 \quad \text{のとき} \quad 3^2 \cdot 4 - 2^2 \cdot 3$$

.....

$$k=n-1 \quad \text{のとき} \quad (n-1)^2 n - (n-2)^2 (n-1)$$

$$k=n \quad \text{のとき} \quad n^2(n+1) - (n-1)^2 n$$

縦方向に加えて和を求めると、

ドミノ倒しのように次々に値が消えて、
 $n^2(n+1)$ だけが残る。

3. S_3 の公式

(*)で $s=2$, $t=2$ とします。

$$k^2(k+1)^2-(k-1)^2k^2=(k^4+2k^3+k^2)-(k^4-2k^3+k^2)=4k^3$$

和をとります。必要であれば【差分の和】の指数を書き加えます。

$$n^2(n+1)^2=4S_3$$

以上より、

$$S_3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

【差分の和】

$$k=1 \quad \text{のとき} \quad 1^2 \cdot 2^2 - 0^2 \cdot 1^2$$

$$k=2 \quad \text{のとき} \quad 2^2 \cdot 3^2 - 1^2 \cdot 2^2$$

$$k=3 \quad \text{のとき} \quad 3^2 \cdot 4^2 - 2^2 \cdot 3^2$$

.....

$$k=n-1 \quad \text{のとき} \quad (n-1)^2 n^2 - (n-2)^2 (n-1)^2$$

$$k=n \quad \text{のとき} \quad n^2(n+1)^2 - (n-1)^2 n^2$$

縦方向に加えて和を求めると、

ドミノ倒しのように次々に値が消えて、
 $n^2(n+1)^2$ だけが残る。

これで教科書レベルであれば証明はおしまいです。

でも、時間に余裕があればもう少しサステナぶってみましょう。

4. S_4 と S_5 の公式

$s=3$, $t=2$ とします。

$$k^3(k+1)^2-(k-1)^3k^2=(k^5+2k^4+k^3)-(k^5-3k^4+3k^3-k^2)=5k^4-2k^3+k^2$$

和をとると、

$$n^3(n+1)^2=5S_4-2S_3+S_2$$

$$5S_4=n^3(n+1)^2+2S_3-S_2$$

$$=n^3(n+1)^2+\frac{1}{2}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n^2(n+1)^2(2n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

以上より、

$$S_4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

次に、 $s=3$, $t=3$ とします。

$$k^3(k+1)^3-(k-1)^3k^3=(k^6+3k^5+3k^4+k^3)-(k^6-3k^5+3k^4-k^3)=6k^5+2k^3$$

和をとると、

$$n^3(n+1)^3=6S_5+2S_3$$

$$6S_5 = n^3(n+1)^3 - 2S_3 = n^3(n+1)^3 - \frac{1}{2}n^2(n+1)^2 = \frac{1}{2}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)$$

以上より,

$$S_5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)$$

S_5 の計算は S_4 に比べると少し楽です.

サステナぶる予想をすると, べき乗数が奇数のときは $s=t$ とおくと, 比較的容易にべき乗和が求められます. でもべき乗数が偶数の場合はちょっと面倒です. そこで, さらにサステナぶった時短を考えてみましょう.

5. *pair* 時短

$s=2$, $t=1$ のときは次の関係式が得られました.

$$n^2(n+1) = 3S_2 - S_1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

次に, $s=1$, $t=2$ としてみましょう.

$$k(k+1)^2 - (k-1)k^2 = (k^3 + 2k^2 + k) - (k^3 - k^2) = 3k^2 + k$$

和をとると,

$$n(n+1)^2 = 3S_2 + S_1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①と②は S_1 と S_2 の連立方程式になります.

すなわち, S_1 が分からなくても S_2 が求められるのです.

②に①を加えると左辺は,

$$n(n+1)^2 + n^2(n+1) = n(n+1)(2n+1)$$

よって,

$$6S_2 = n(n+1)(2n+1)$$

これより S_2 が得られます.

また, ②から①を引くと左辺は

$$n(n+1)^2 - n^2(n+1) = n(n+1)$$

よって,

$$2S_1 = n(n+1)$$

S_1 が得られます.

では, 同じように考えて S_3 と S_4 を求めてみましょう.

$s=3$, $t=2$ のときの関係は次式でした.

$$n^3(n+1)^2 = 5S_4 - 2S_3 + S_2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

次に, $s=2$, $t=3$ のときの関係式を求めます.

$$\begin{aligned} k^2(k+1)^3 - (k-1)^2k^3 &= (k^5 + 3k^4 + 3k^3 + k^2) - (k^5 - 2k^4 + k^3) \\ &= 5k^4 + 2k^3 + k^2 \end{aligned}$$

和をとると,

$$n^2(n+1)^3 = 5S_4 + 2S_3 + S_2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

④に③を加えると, 左辺は

$$n^2(n+1)^3 + n^3(n+1)^2 = n^2(n+1)^2(2n+1)$$

よって, $10S_4 + 2S_2 = n^2(n+1)^2(2n+1)$

$$10S_4 = n^2(n+1)^2(2n+1) - 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)\{3n(n+1) - 1\} = \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

S_4 が得られました.

次に④から③を引くと、左辺は

$$n^2(n+1)^3 - n^3(n+1)^2 = n^2(n+1)^2$$

よって、

$$4S_3 = n^2(n+1)^2$$

S_3 が得られました。

このようにすると、2つのべき乗和をペアで求めることができます。

ここで、次の式が成立することを確認しましょう。

$n^m(n+1)^{m+1} + n^{m+1}(n+1)^m = n^m(n+1)^m(2n+1)$ $n^m(n+1)^{m+1} - n^{m+1}(n+1)^m = n^m(n+1)^m$

さらに、①と②、③と④の右辺の値を比較してみてください。 あることに気が付くはずです。

では次に、 S_5 と S_6 を求めてみましょう。

$s=4$ ， $t=3$ とします。

$$\begin{aligned} k^4(k+1)^3 - (k-1)^4 k^3 &= (k^7 + 3k^6 + 3k^5 + k^4) - (k^7 - 4k^6 + 6k^5 - 4k^4 + k^3) \\ &= 7k^6 - 3k^5 + 5k^4 - k^3 \end{aligned}$$

和をとると、

$$n^4(n+1)^3 = 7S_6 - 3S_5 + 5S_4 - S_3 \quad \cdots \textcircled{5}$$

次に、 $s=3$ ， $t=4$ とすると結果は次のようになります。(いいでしょうか?)

$$n^3(n+1)^4 = 7S_6 + 3S_5 + 5S_4 + S_3 \quad \cdots \textcircled{6}$$

⑤に⑥を加えます。

$$n^3(n+1)^3(2n+1) = 14S_6 + 10S_4$$

$$\begin{aligned} 14S_6 &= n^3(n+1)^3(2n+1) - 10 \cdot \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1) \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(2n+1) \{ 3n^2(n+1)^2 - (3n^2 + 3n - 1) \} \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1) \end{aligned}$$

以上より、

$S_6 = \frac{1}{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1)$

次に⑥から⑤を引きます。

$$n^3(n+1)^3 = 6S_5 + 2S_3$$

$$\begin{aligned} 6S_5 &= n^3(n+1)^3 - 2 \cdot \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 \\ &= \frac{1}{2} n^2(n+1)^2 \{ 2n(n+1) - 1 \} = \frac{1}{2} n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1) \end{aligned}$$

これから S_5 を求めることができます。

サステナぶっている手前、それならばと、さらにチャレンジしたくなります。

$s=5$ ， $t=4$ とします。

$$\begin{aligned} k^5(k+1)^4 - (k-1)^5 k^4 &= (k^9 + 4k^8 + 6k^7 + 4k^6 + k^5) - (k^9 - 5k^8 + 10k^7 - 10k^6 + 5k^5 - k^4) \\ &= 9k^8 - 4k^7 + 14k^6 - 4k^5 + k^4 \end{aligned}$$

和をとると、

$$n^5(n+1)^4 = 9S_8 - 4S_7 + 14S_6 - 4S_5 + S_4 \quad \cdots \textcircled{7}$$

次に, $s=4$, $t=5$ とします.

$$n^4(n+1)^5 = 9S_8 + 4S_7 + 14S_6 + 4S_5 + S_4 \quad \cdots \textcircled{8}$$

⑧から⑦を引きます.

$$8S_7 + 8S_5 = n^4(n+1)^4$$

$$\begin{aligned} 8S_7 &= n^4(n+1)^4 - 8 \cdot \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) \\ &= \frac{1}{3} n^2(n+1)^2 \{3n^2(n+1)^2 - 2(2n^2+2n-1)\} \end{aligned}$$

以上より,

$$S_7 = \frac{1}{24} n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

⑦に⑧を加えます.

$$n^4(n+1)^4(2n+1) = 18S_8 + 28S_6 + 2S_4$$

$$\begin{aligned} 18S_8 &= n^4(n+1)^4(2n+1) - 28 \cdot \frac{1}{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1) - 2 \cdot \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \\ &= \frac{1}{15} n(n+1)(2n+1) \{ (15n^3(n+1)^3 - 10(3n^4+6n^3-3n+1) - (3n^2+3n-1)) \} \\ &= \frac{1}{15} n(n+1)(2n+1)(15n^6+45n^5+15n^4-45n^3-3n^2+27n-9) \\ &= \frac{1}{5} n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3) \end{aligned}$$

以上より,

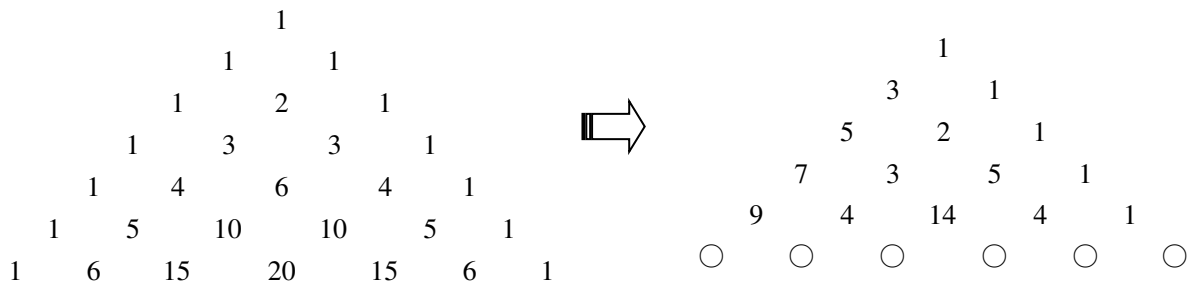
$$S_8 = \frac{1}{90} n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$$

S_8 まで勢いで求めましたが, ここまでやると S_9 , S_{10} までの切れのいいところまで求めたくなります.
やっつけてしまいましょう.

6. さらにサステナぶると...

これまでの計算で, ①から⑧までの式を導出する過程がワンパターンであると感じたのではないのでしょうか.
大半の計算は $(a+b)^n$ の展開なので, ここはパスカル大先生の三角形に登場願ひましょう.

また, ②, ④, ⑥, ⑧の右辺の $S_8, S_7, S_6, \dots, S_2, S_1$ の係数を抜き出して, パスカルの三角形風に並べてみます.



$S_8, S_7, S_6, \dots, S_2, S_1$ の係数は, パスカルの三角形の各段の数から求められることに気がつくはずです.
それが分かれば, ①から⑨の右辺の計算はもう必要なくなります.

そして, 次の式が得られます. (いいでしょうか)

$$n^5(n+1)^6 = 11S_{10} + 5S_9 + 30S_8 + 10S_7 + 7S_6 + S_5 \quad \cdots \textcircled{9}$$

$$n^6(n+1)^5 = 11S_{10} - 5S_9 + 30S_8 - 10S_7 + 7S_6 - S_5 \quad \cdots \textcircled{10}$$

⑨から⑩を引きます.

$$n^5(n+1)^5 = 10S_9 + 20S_7 + 2S_5$$

これで S_9 は求められますが, S_7 , S_5 を代入して計算するのは S_8 と同様に大変そうです.
 そこでもう一工夫してみましょう.

いままでの結果から, S_7 と S_5 は次のように表されています.

$$S_7 = -S_5 + \frac{1}{8}n^4(n+1)^4, \quad S_5 = -\frac{1}{3}S_3 + \frac{1}{6}n^3(n+1)^3$$

これから, S_9 は S_3 で表すことができます. まとめると次の式になります.

$$10S_9 = n^5(n+1)^5 - \frac{5}{2}n^4(n+1)^4 + 3n^3(n+1)^3 - 6S_3$$

ここで, $S_3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ であることから, $t = n(n+1)$ とおくと, S_9 は t の多項式に整理できます.

$$\begin{aligned} 10S_9 &= n^5(n+1)^5 - \frac{5}{2}n^4(n+1)^4 + 3n^3(n+1)^3 - \frac{3}{2}n^2(n+1)^2 \\ &= t^5 - \frac{5}{2}t^4 + 3t^3 - \frac{3}{2}t^2 \\ &= \frac{1}{2}t^2(2t^3 - 5t^2 + 6t - 3) = \frac{1}{2}t^2(t-1)(2t^2 - 3t + 3) \end{aligned}$$

最後に, t を $n(n+1)$ に戻して S_9 の式が得られます.

$$S_9 = \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)$$

S_{10} も同様にまとめることができますので挑戦してみてください.

$$S_{10} = \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)$$

さあ, これで S_{11} 以降も簡単に計算式を作れるようになりました.

そこで, サステナぶる解法はこのへんにしようと思います.

実はべき乗数の和の公式は, 17 世紀のドイツの数学者ヨハン・ファウルハーバー(Johann Faulhaber)が発見しています.
 ファウルハーバーは, ウルムの算術家として活躍した時期もありましたがいまは忘れ去られた人物です.

唯一, 著書の Academia Algebra (1631) に載っているべき乗和の公式だけが知られています.

$$\begin{aligned} &1^{k-1} + 2^{k-2} + 3^{k-3} + \dots + n^{k-1} \\ &= \frac{1}{k} \left(n^k + {}_k C_1 n^{k-1} \times \frac{1}{2} + {}_k C_2 n^{k-2} \times \frac{1}{6} + {}_k C_3 n^{k-3} \times 0 + {}_k C_4 n^{k-4} \times \frac{-1}{30} + {}_k C_5 n^{k-5} \times 0 + {}_k C_6 n^{k-6} \times \frac{5}{66} + {}_k C_7 n^{k-7} \times 0 \dots \right) \end{aligned}$$

カギ括弧の中の式は二項定理と同じ形ですが, 定数項はなく, そして各項には, 「ある定数」が掛けられています.

$k=5$ を計算してみます.

$$\begin{aligned} 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 &= \frac{1}{5} \left(n^5 + 5n^4 \times \frac{1}{2} + 10n^3 \times \frac{1}{6} + 10n^2 \times 0 + 5n \times \frac{-1}{30} \right) \\ &= \frac{1}{30} n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1) = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1) \end{aligned}$$

さて, 各項に掛けているその「ある定数」は, ベルヌーイ数として知られています.

だから, ベルヌーイ数をサステナブルに研究すると, その成果物としてべき乗和の公式は得られるのです.

でもまあ, サステナぶる本稿のようなべき乗和の求め方も少しは楽しめるのではないのでしょうか.

ひょっとしたら, これを発展させると化けて, さらなるサステナブルなべき乗和にたどり着くかも知れません.

ということで, 時短劇場, これにて終演でございます.

(2025_10_27)