メイクる数学 *Petite cooking*

「美味しいカクニ(角ニ)」 3分クッキング

～角の二等分線の性質を折る

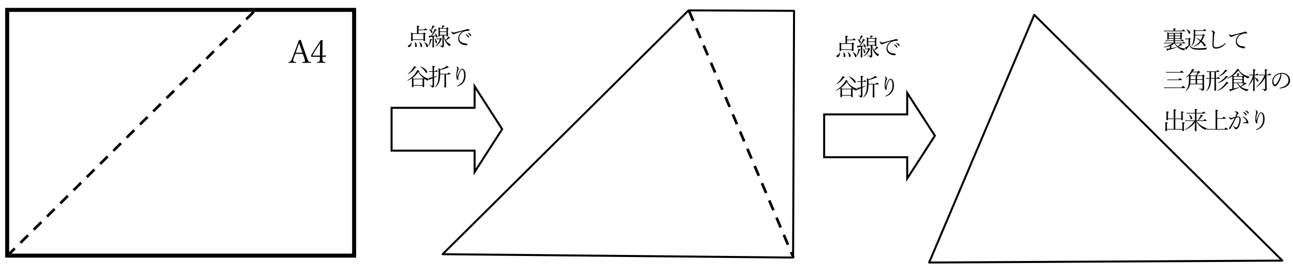
中村文則

用意するもの

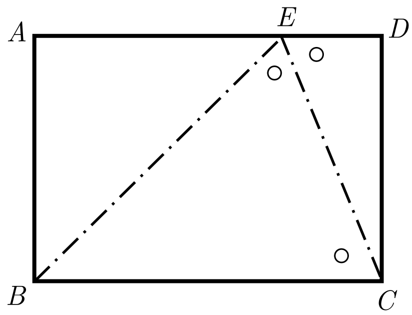
A4 用紙(生徒の人数分＋α 枚)　三色の(赤・青・緑など)のボールペン(マジック)

調　理

A4 用紙から三角形を折る



試　食（折り方のコツ）



EC を谷折りするには，ED を EB に重ねればいい．

それで折れる理由は A4 用紙の縦横のサイズにある．

横長 A4 用紙の規格は，縦：横＝$1:\sqrt{2}$ になっている．この比を白銀比という．

いま，$AB=1$，$AD=\sqrt{2}$ としよう．

（実際は，横長 A4 では横の長さ 297mm，縦の長さ 210mm）

三角形 ABE において，ピュタゴラスの定理より，$BE=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

これから，三角形 BCE は，$BE=BC$ の二等辺三角形より，$\angle BEC=\angle BCE$

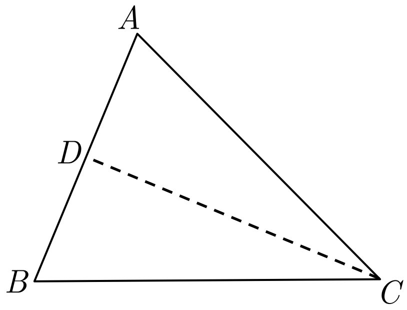
また，$AD\,/\!/\,BC$ より錯角は等しいので，$\angle BCE=\angle DEC$．　$\therefore$　$\angle BEC=\angle DEC$

よって，EC は $\angle BED$ の内角の二等分線であるから EC を折り線として折ると ED は EB に重なる．

実　食（enjoy）

enjoy1）角の二等分線を折ってみよう

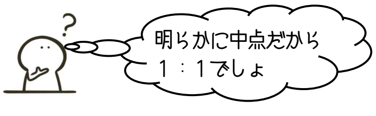
①$\angle ACB$ を二等分するとき



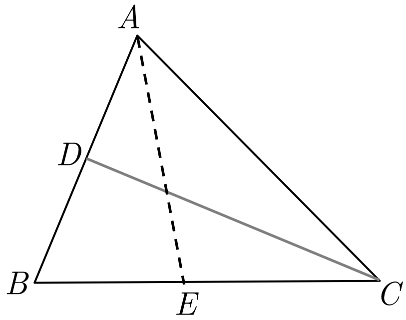
辺 CA を辺 CB に谷折りして重ねる

折線を CD として開く．

点 D は AB をどのように比に分ける点だろう．



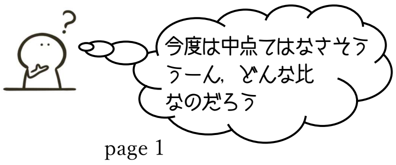
②$\angle BAC$ を二等分するとき



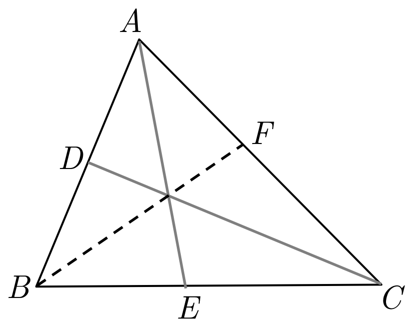
辺 AB を辺 AC に谷折りして重ねる

折線を AE として開く．

点 E は BC をどのように比に分ける点だろう．



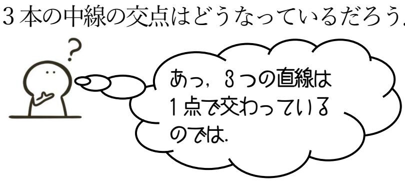
③$\angle ABC$ を二等分するとき



辺 BA を辺 BC に谷折りして重ねる

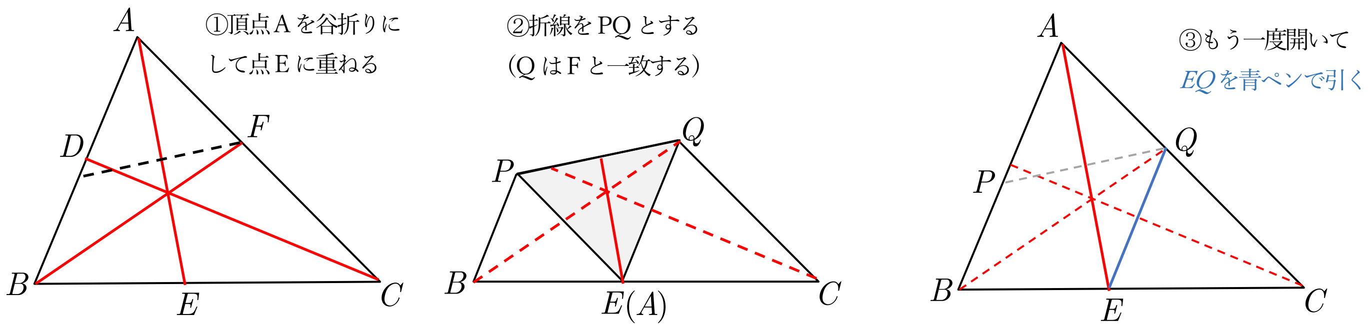
折線を BF として開く．

3 本の中線の交点はどうなっているだろう．



enjoy2）二等分線AEに対して$BE:EC$を調べてみよう（まずどんな比になるか考えてみよう）.

最初に赤ペンで３本ある角の二等分線を引く.



味わい(感想)

enjoy3）　ABとQEは平行であるか調べてみよう.

三角形AEQは二等辺三角形で,

$AQ = EQ$，$\angle AEQ = \angle EAQ$

AEは角Aの二等分線より.

$$\angle BAE = \angle EAC = \angle EAQ$$

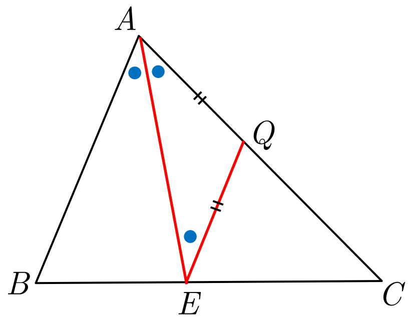
$$\therefore \quad \angle AEQ = \angle BAE$$

直線ABと直線EQにおいて，錯角が等しいから,

$$AB // QE$$

※ $\angle BAE$, $\angle EAC$, $\angle AEQ$に青マジックで●を印す

PEとACも平行であることを確認しよう.



enjoy4）点Eが辺BCをどのような比に内分するか調べてみよう.

$AB // QE$より，$AB : AC = QE : QC$

$AQ = QE$より，$QE : QC = AQ : QC$

$AB // QE$より，$AQ : QC = BE : EC$

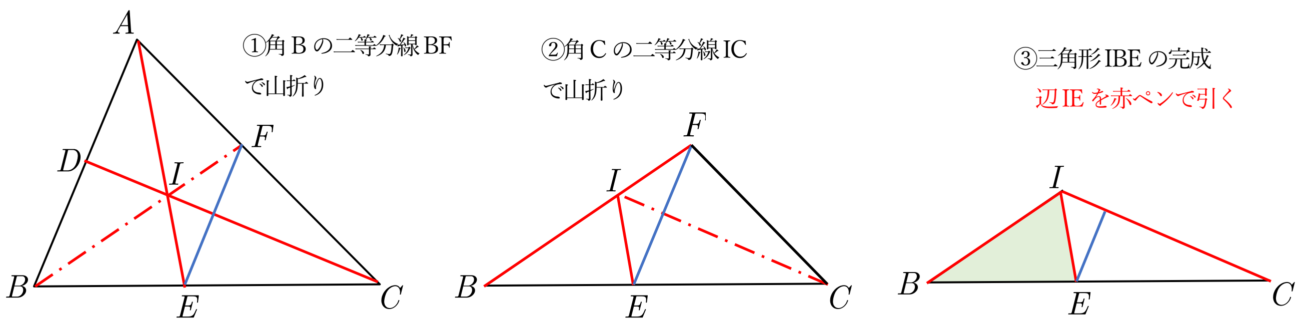
$$\therefore \quad AB : AC = BE : EC$$

以上より，点Eは辺BCを$AB : AC$に内分する点である.

デザート

三角形の頂点の外角の二等分線にはどのような性質があるか調べてみよう.

enjoy1)まず三角形を折ってみる

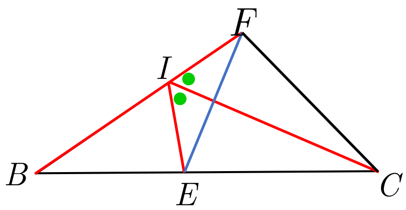


enjoy2）頂点 I の外角の二等分線を引いてみよう

IC で折った部分を広げる．

IC は三角形IBE の頂点I の外角$\angle EIF$ の二等分線である．

（なぜなら三角形ABC は$CA=CB$ の二等辺三角形だから）



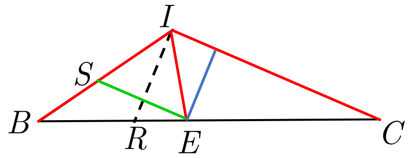
enjoy3）三角形IBE の辺IE を辺IB に重ねて谷折りする．

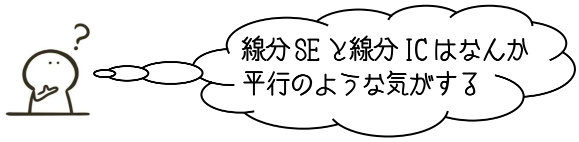
折り線IR は，頂点I の内角の二等分線である．

また点E をIB に折って重ねた点をS とする．

線分 SE を緑ペンで引く．

線分SE と線分IC との関係を考えてみよう．





enjoy4）線分SE と線分IC が平行かどうか調べてみよう．

外角の二等分線 IC を赤ペンで引く．

三角形ISE は二等辺三角形で，

$IS=IE$，$\angle ISE=\angle IES=\theta$

ここで，$\angle FIE=\angle ISE+\angle IES=2\theta$

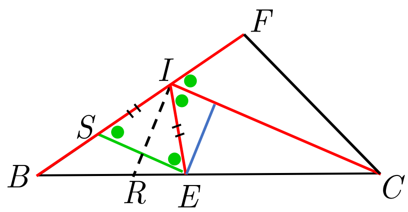
IC は$\angle FIE$ の二等分線より，

$$\angle CIE=\frac{1}{2}\angle FIE=\theta$$

$\therefore\quad \angle IES=\angle CIE=\theta$

2 直線IC とSE において錯角が等しいので，$IC\,//\,SE$

$\angle ISE$，$\angle IES$，$\angle EIC$，$\angle FIC$ に緑マジックで●を印す．



enjoy5）外角の二等分線の性質を調べよう．

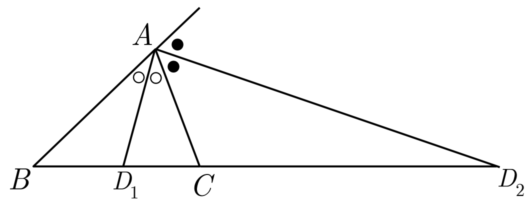
$IS=IE$ より，$IB:IE=IB:IS$

$IC\,//\,SE$ より，$IB:IS=BC:CE$

$\therefore\quad IB:IE=BC:CE$

内角の二等分線と同じ性質が得られる．

> 三角形ABC の頂点A の内角または外角の二等分線と対辺またはその延長線との交点をD とすると次が成立する．
>
> $BD:DC=AB:AC$

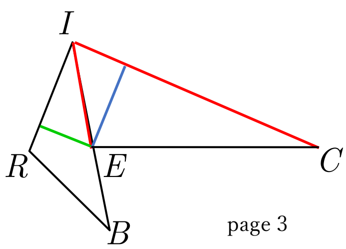


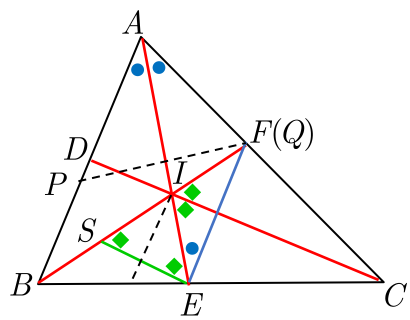
食後の *Coffee Time*

三角形BIE の内角の二等分線IR で谷折りにする．畳んだものノートや教科書に挟めておく．

性質の導き方を確認するときは，折った用紙を三角形ABC まで広げると

思考過程をトレースすることができる．

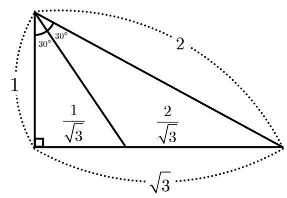




Cooking Recipe

単元「図形の性質」では，「内分と外分」，「平行線と比」を学んだあとに角の二等分線が登場します．以降は単元の終りまでずーっと付きあうことになります．角の二等分線の性質(以後カクニとする)は図形のどこかに潜んでいることが多くどう上手く処理するかが計量のカギになります. それほど重要なのに名称不明(unknown)の性質なのです.

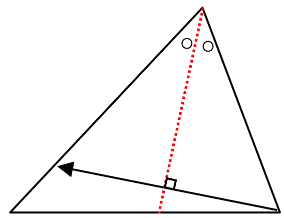
カクニの説明は意外と結論ありきでないでしょうか.



生徒に「角 A の二等分線を引いてごらん」，こう指示するとノートに中線が引く生徒は少なからずいます.「違うでしょ」と否定してから三角定規の $60°$ の角を二等分して「中線になってないよね」と事実を突きつけダメ出しで納得させてケリをつけます.

そして「このような性質がある」と言い切り証明をしていきます．結果として角の二等分線はどのように引けるかの image はできていないのに引かせているのです.

でも，折り紙では角の二等分線は簡単に引けます(折れます).



角をはさむ 2 つの辺を重ねて折ってから開くと折線が角の二等分線になります.
折って辺を重ねることは辺をもう一つの辺に移動して二等辺三角形を作る操作であり，
その二等辺三角形の中線が角の二等分線になっています.

折り紙を折ることから辺や角の移動を捉えて image を養い，その後でノートに角の二等分線を引かせることでいままでとは違った図形の風景が見えてくるかもしれません.

図形は折ることにより，いったん平面から空間に広がりまた平面に収まります．その過程における紙の質感と折るときの手触りはとても心地よいものです.

折り紙は作図のステップや図形の性質を image 化するのにとても優れた教具といえます.

さて，三角形の辺の移動により二等辺三角形を作る過程はカクニの証明のコアになります.

そのカクニの証明はいろいろ知られています.

簡単な証明は正弦定理を用いる方法であり瞬時に性質は得られます(ただし「図形の性質」と「図形の計量」の単元の履修順の問題はありますが)．図形の中の 2 つの三角形の面積を比較して間接的に証明する方法もあります.

教科書は「平行条件から角の大きさを移動，二等辺三角形から辺の長さを移動」による証明が一般的です.

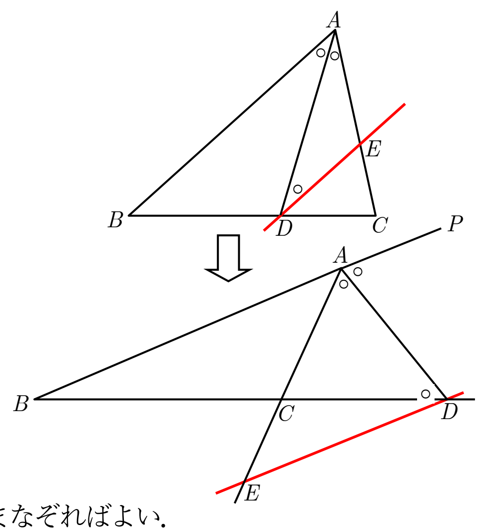
(詳しくは拙著「角の二等分線を狩る」,「三角比からみた角の二等分線の性質」を参照)

ここで今回のクッキング方法に関わるものを 2 つ紹介しましょう.

三角形 ABC ($AB > AC$ とする)において，角 A の二等分線 AD の性質を調べことにします.

Cooking1) (証明 1)

○内角の二等分線の場合



点 D を通り辺 AB に平行な直線と直線 AC との交点を E とする.

$AB // ED$ より，錯角は等しいから

$$\angle BAD = \angle ADE$$

ここで，$\angle BAD = \angle DAE$

$$\therefore \quad \angle ADE = \angle DAE$$

三角形 ADE は $EA = ED$ の二等辺三角形より，

$$\begin{aligned} AB : AC &= ED : EC \\ &= AE : EC = BD : DC \end{aligned}$$

○外角の二等分線の場合

辺 BA の延長上に点 P をとる.

内角の二等分線の証明で，$\angle BAD$ を $\angle PAD$ に読み替えて，そのままなぞればよい.

Cooking2) (証明 2)

〇内角の二等分線の場合

頂点C を通り直線AD に平行な直線と直線AB の交点をE とする.

$AD // EC$ より錯角は等しいから,

$$\angle CAD = \angle ACE$$

また,同位角は等しいから,

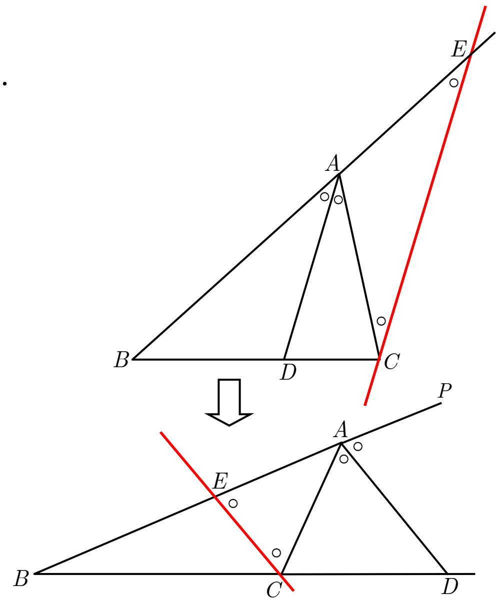
$$\angle BAD = \angle AEC$$

ここで,$\angle BAD = \angle CAD$ より,

$$\angle ACE = \angle AEC$$

三角形ACE は$AC = AE$ の二等辺三角形より,

$$AB : AC = AB : AE = BD : DC$$



〇外角の二等分線の場合

直線BA の延長に点P をとる.

内角の二等分線の証明で,$\angle BAD$ を$\angle PAD$ に読み替えて,

そのままなぞればよい.

.

なお,教科書のカクニの証明を 5 つの出版会社で確認したところ,すべて Cooking2(証明 2)の証明によるものでした.個人的には,頂点C を通り辺AB に平行な直線を引く方法がいちばんいいと考えるのですが(外角の場合の証明は内角の場合のものをそのままなぞるだけで済みます).

では,今回の 3 分クッキングのレシピを詳しくみていきましょう.

最初に A4 用紙から三角形を折るくだりはとても重要です.食材を丁寧に扱い下処理することが料理の仕上がりに大きく影響を与えてしまうので,ここはしっかり調理して三角形を作りましょう.

「折り方のコツ」でも触れているように A4 用紙を 2 回折ると紙がはみ出さずに三角形(実は二等辺三角形)が作れます.このことをしっかりと説明します.「二等辺三角形の 2 辺の長さは等しい,平行な二直線の錯角は等しい」,この 2 つの性質はカクニの調理の隠し味といえます.図形問題は「辺の長さの移動」と「角の大きさの移動」が解法のコツであり,それを保証する「二等辺三角形」,「平行」は下ごしらえの key-word なのです.

上述のカクニの証明でも分かるとおり,「線分の長さと角の大きさの移動」は図形上の頂点や交点を通り,線分に平行な直線を引くことで可能になり,そこからだいたい自然に結論に至ってしまいます.でも「実食」では「どこに平行線を引くか」,すなわち食材をどのように切るかということを「どこに二等辺三角形を作るか」に変更しています.

「平行→二等辺三角形」ではなく,「二等辺三角形→平行」という順番なのです.折り紙では平行線を折るより二等辺三角形を折ることの方が容易です.また二等辺三角形を折ることは角を二等分することにもなります.食する順番を変えることで,より食材のうま味を引き出したのです.

具体的に手順をみていきましょう.最初に角C の二等分線を折ります.

三角形ABC は$CA = CB$ の二等辺三角形より二等分線は辺AB の中点D で交わります.二等辺三角形では中線と角の二等分線は一致することを味わいましょう.

では二等辺三角形でない場合はどうなるでしょうか.角A の二等分線でみてみます.$AB < AC$ ですから辺AB を辺AC に重ねてから開きます.折線である角A の二等分線と辺BC との交点E はBC の中点より左にずれることを確認しましょう.

さらに角B の二等分線を折り,同様に味わってみます.ここで 3 本の二等分線が 1 点で交わっている事実にも気づけば内心の指導もスムーズになるでしょう.

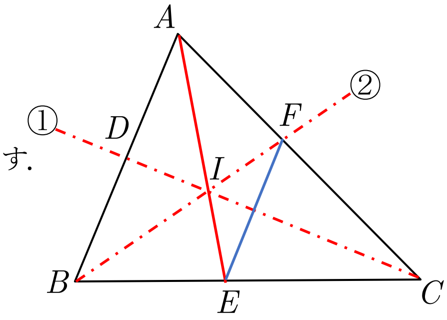
では,角A の二等分線とBC の交点E は辺の中点からどれだけずれているか調べてみます.

頂点Aが点Eに重なるように折りましょう．折線と辺ACとの交点Qから二等辺三角形AEQができます．

そして，等しい2辺(二等辺三角形)，等しい2角(角の二等分線)を移動して，ABとQEが平行になることを示します．なお，「三角形CABは$CA=CB$の二等辺三角形だから$AB//QE$であることは明らか」，こう質問する生徒はいると思います．気が付いたことを褒めてから，「でも三角形CABが二等辺三角形であることは証明の過程では使っていない」と説明しましょう．どんな三角形でも紙に書いてしまえば特別な三角形といえます．重要なのは三角形のどのような性質を用いて証明したかということです．

また，時間があれば，折線と辺ABとの交点Pから二等辺三角形PEAを作ると$AC//QE$となることを示してもいいでしょう．

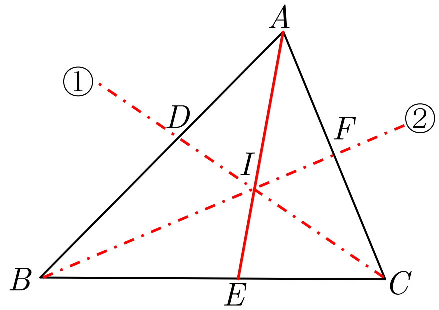
そして最後は一口で美味しくカクニを味わってください．



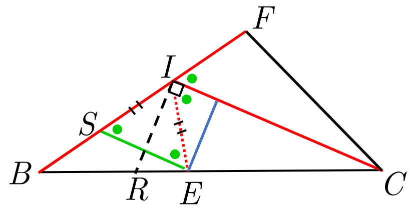
次に外角のカクニについても考えてみましょう．

最初に作った三角形を用いて，レシピの手順どおりに折って三角形IBEを作ります．なお①(CD)，②(BF)の折る順番を間違えると，$\angle BIE$の外角を開くことができなくなってしまうので注意しましょう．

ところで線分ICが$\angle BIE$の外角$\angle FIE$の二等分線になるのは三角形CABが$CA=CB$の二等辺三角形だからです．



ちなみに三角形を時計回りに回転させると，右下図の三角形になります．この三角形ABCでも内角のカクニは同じように証明できます．外角のカクニは①，②の順に折り三角形IBEを作ります．そして$\angle BIE$の外角である$\angle FIE$の二等分線ICを利用するとします．しかしここでまずいことが起こります．実は直線ICは$\angle FIE$の角の二等分線になっていないのです．こういうところで疑問を抱かずに美味しく味わうことができるようレシピどおりに料理は仕上げましょう．



次に辺IEを辺IBに重ねて二等辺三角形IESを作り辺の長さを移動します．そのときの折線IRは内角$\angle BIE$の二等分線であり$\angle RIC=90°$になってます．これは角の二等分線を利用すると折り紙で直角を作図できることを示しています．このことも確認できるといいでしょう．

そして，SEとICは平行であることを，辺の長さと角の大きさの移動により示します．

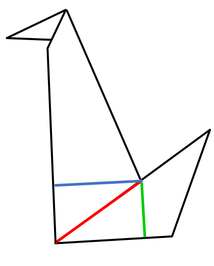
ところで，内角のカクニと外角のカクニでは証明方法が異なっていることに気づいたと思います．

内角のカクニはCooking1(証明1)，外角のカクニはCooking2(証明2)によるものなのです．

証明に一貫性がない印象を与えたかと思います．でも解法を統一すると外角と内角の二等分線のどちらかは辺の延長上に二等辺三角形を作らなければならなく，それは避けたかったのです．結果として，内角のカクニの考えをなぞり外角のカクニを求めるより，異なる味を楽しめることになったので，まあ，よかったのではないでしょうか．

そしてもう一つの理由は，折って得られたカクニの思考(嗜好)の名残り(味わい)を残しておきたかったのです．「食後のCoffee Time」で触れていますが三角形の状態に開くと，折線と二等辺三角形，等角度が互いに重なることなく三角形ABCの中に配列できています．畳んでノートなどに挟んでおくといつでも味わいを再現できるのです．

図形の性質は「角の移動と辺の移動」を調べることで多くの場合は求められます．カクニにはそのエッセンスが詰まってます(というよりその2つの要素だけで調理しています)．だから図形の性質の証明にカクニが重宝されるのは当然ではないでしょうか．



最後にちょっとした遊び心でカクニにトッピングをしてみましょう．

折り畳んでできた図形の長い首の部分(もともとの頂点C)をちょっと外割り折りしてみましょう．可愛らしい紙のオブジェができあがります．料理は見た目も重要なのです．

※ 数学と料理を混ぜ過ぎて角煮ごった煮の文章を書いてしまいました．ご容赦を．．