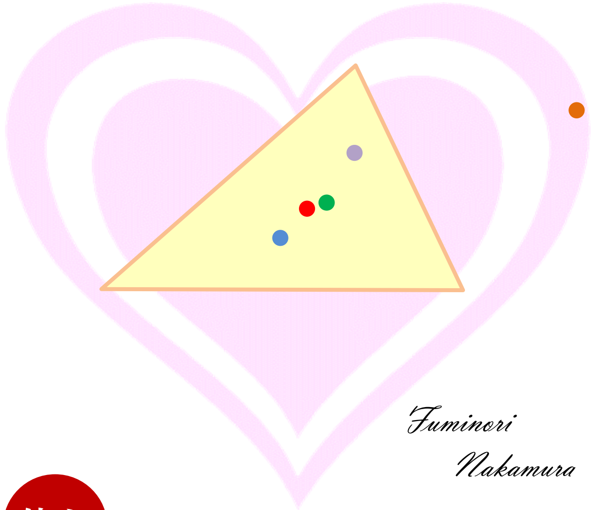
三角形の五心 ～5つの心の切っても切れない関係

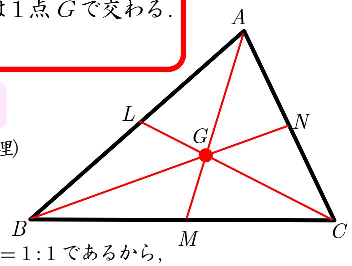
5点は三角形のどんな心？



Fuminori Nakamura

重心

三角形の３本の中線の交点は１点 G で交わる．
点 G を三角形の重心という．



重心は各中線を２:１に内分する

$AB \parallel NM$, $AB = 2NM$ (中点連結定理)

$\triangle GAB \backsim \triangle GMN$ より，
$AG : GM = 2 : 1$

また，$\triangle GAB : \triangle GCA = BM : MC = 1 : 1$ であるから，
$\triangle GAB = \triangle GCA$　同様に考えて　$\triangle GAB = \triangle GBC = \triangle GCA$
(G は三角形を３つの等しい面積の三角形に分割する点)

重心は三角形が重力(Gravity)方向に釣り合う点

中線定理 (Papps)
$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

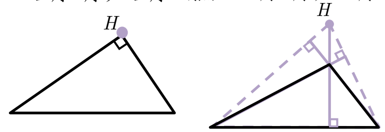
ちょっといじると，
$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{3}$$

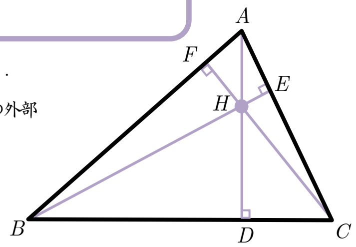
垂心

三角形の３つの頂点から対辺またはその延長に下した垂線は１点 H で交わる．
点 H を三角形の垂心という．

垂心の位置は三角形の外部の場合もある．

直角三角形は直角の頂点　　鈍角三角形は鈍角の外部





内心

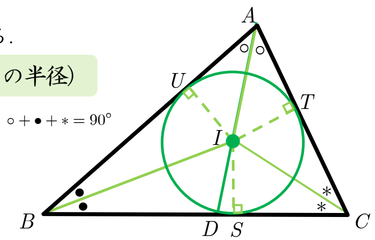
三角形の３つの頂点の内角の二等分線は１点 I で交わる．
点 I を三角形の内心という．

内心は３つの辺から等距離にある．
内心は三角形の内接円の中心である．

$IS = IT = IU = r$ (r は内接円の半径)

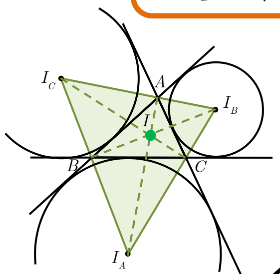
$\angle IAB + \angle IBC + \angle ICA = 90°$　$\circ + \bullet + * = 90°$

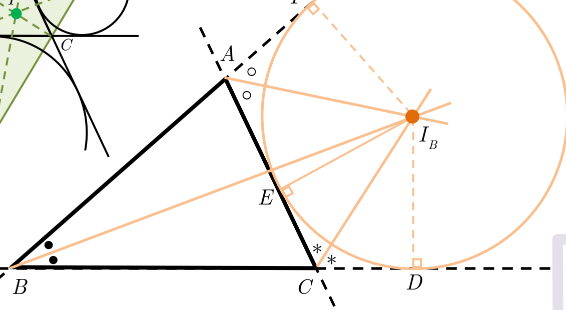
❖角の二等分線の性質
$AB : AC = BD : DC$
$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$



傍心

三角形の１つの頂点の内角の２等分線と，他の２つの頂点の外角の二等分線は１点で交わる．
この交点を傍心という．





傍心　三角形の傍心は３つあり，それぞれ三角形の３辺と等距離にあり，傍心を中心として３辺に接する円が存在する(傍接円)．

内心　垂心　三角形の３つの傍心を頂点とする三角形 $I_A I_B I_C$ (傍心三角形)の垂心はもとの三角形の内心に一致する．

外心

三角形の３つの辺の垂直二等分線は１点 O で交わる．
点 O を三角形の外心という．

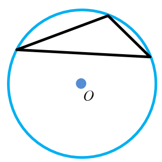
外心は３つの頂点から等距離にある．
外心は，三角形の外接円の中心である．

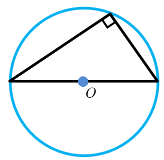
$OA = OB = OC = R$ (R は外接円の半径)

$\triangle OAB$ ， $\triangle OBC$ ， $\triangle OCA$ は二等辺三角形より
$\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA = 90°$　$\circ + \bullet + * = 90°$

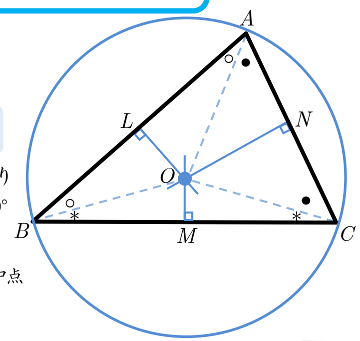
外心の位置は三角形の外部の場合もある．

鈍角三角形は最大辺の外部　　直角三角形は斜辺の中点





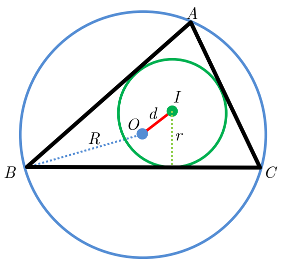
❖タレスの定理
直径を弦とする弧の円周角の大きさは $90°$ である．



外心 内心

❖オイラー・チャップルの定理
(Euler Chapple)
三角形の外心を O ，内心を I ，
外接円の半径を R ，内接円の半径を r とする． $OI = d$ とすると，
$d^2 = R^2 - 2Rr$

$R^2 - 2Rr = d^2 \geqq 0$ ．これより， $R \geqq 2r$
すなわち外接円の半径は内接円の半径の２倍以上の長さである(オイラーの不等式)

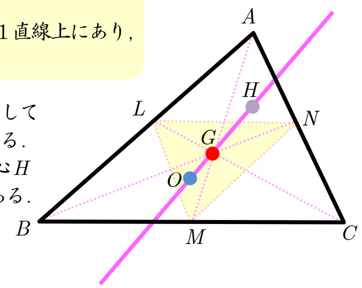


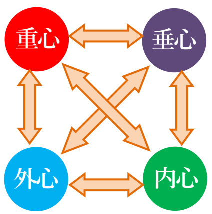
三角形の外心を O ，外接円の半径を R ．１つの傍心 I を中心とする傍接円の半径を r とすると，外心と傍心との距離 d は，
$d^2 = R^2 + 2Rr$

外心 重心 垂心

❖オイラー線 (Euler Line)
三角形の外心 O ，重心 G ，垂心 H は１直線上にあり，
$OG : GH = 1 : 2$

$\triangle ABC$ と $\triangle MNL$ は，重心 G を中心として相似な位置関係にあり相似比は２:１である．
O は $\triangle MNL$ の垂心より，$\triangle ABC$ の垂心 H との相似の関係より $OG : GH = 1 : 2$ である．





重心・外心・垂心・内心のどれか２つが一致する三角形は正三角形

外心と内心が点 P で一致するとき，
点 P は外心より
$\angle PAB = \angle PBA$
点 P は内心より
$\angle A = 2\angle PAB$ ， $\angle B = 2\angle PBA$
$\therefore$　$\angle A = \angle B$
他の内角も同様に考えると，
$\angle A = \angle B = \angle C$