背理法と対偶証明の読み方 ～ 無理数証明のルートマップ

Fuminori Nakamura

❖ 背理法
命題が成り立たないと仮定し，
矛盾を示すことで命題を証明する方法

$\sqrt{2}$ は無理数ならば $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数

【背理法による証明】

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=p$ （$p\in Q$ (有理数)）とおく．

$\sqrt{3}=p-\sqrt{2}$ 　平方して整理する．

$\sqrt{2}=\dfrac{p^2-1}{2p}$ 　ここで，$p\in Q$ より $\dfrac{p^2-1}{2p}\in Q$

これは，$\sqrt{2}$ は無理数 であることに矛盾

でもなぜそういえるの

$\sqrt{2}$ は無理数

【2数が互いに素である矛盾】

$\sqrt{2}$ は有理数と仮定し，次のようにおく．

$\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$（$a,b\in N$ 　a と b は互いに素）

両辺を平方すると，$2b^2=a^2$

$2b^2$ は 2 の倍数より a^2 は 2 の倍数．

a^2 は 2 の倍数より a は 2 の倍数．

$a=2a'$ （$a'\in N$）とおく．

$2b^2=(2a')^2$ より $b^2=2(a')^2$

b^2 は 2 の倍数より b は 2 の倍数．

$b=2b'$（$b'\in N$） とおく．

a と b はともに 2 の倍数であり，

a と b は互いに素であることに矛盾

「a と b は互いに素でない」とするとき，
この操作は無限に続けることができる．

【自然数の最小値が 1 の矛盾】

$\sqrt{2}$ は有理数と仮定し，次のようにおく．

$\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$ 　（$a,b\in N$）

両辺を平方すると，$2b^2=a^2$

$2b^2-ab=a^2-ab$ より，$b(2b-a)=a(a-b)$

$\therefore\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{2b-a}{a-b}$

$1<\dfrac{a}{b}<2$ であるから，$b<a<2b$

これから，$b>a-b>0$，$a>2b-a>0$

$b_1=a-b$，$a_1=2b-a$ （$a_1,b_1\in N$）とおく．

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a_1}{b_1}$ 　（$a>a_1$，$b>b_1$）

これを続けることで，自然数の最小値に矛盾する

フェルマーの
無限降下法

【素因数分解の一意性の矛盾】

$\sqrt{2}$ は有理数と仮定し，次のようにおく．

$\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$ 　（$a,b\in N$）

両辺を平方すると，$2b^2=a^2$

左辺および右辺を素因数分解する．

左辺の素因数 2 の個数(指数)は奇数

右辺の素因数 2 の個数(指数)は偶数

よって矛盾する．

【直接証明】

a，b を正の整数とする．

a^2，$2b^2$ をそれぞれ因数分解する．

a^2 の素因数 2 の個数は偶数．

$2b^2$ の素因数 2 の個数は奇数．

$a^2\neq 2b^2$ より，$\sqrt{2}\neq\dfrac{a}{b}$

よって，$\sqrt{2}$ は無理数．

【正則連分数展開の有限性との矛盾】

$$\sqrt{2}=1+\left(\sqrt{2}-1\right)=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=1+\frac{1}{1+\left(1+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\right)}$$

連分数展開を続けると，

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

無限回の正則連分数展開なので，$\sqrt{2}$ は有理数ではない．

有理数 $\dfrac{a}{b}$ の正則連分数展開は，ユークリッドの互除法で a と b の最大公約数を求めるアルゴリズムと同じである．ユークリッドの互除法の計算は有限回なので，有理数の正則連分数展開は有限回である．

n^2 は偶数ならば n は偶数

含意命題「p ならば q である」は，
対偶命題「q でなければ p でない」
と命題の真偽は一致する．

【対偶の証明】

命題の対偶命題

「n は奇数ならば n^2 は奇数である」

を証明する．

$n=2k+1$（$k\in Z$）とおく．

$n^2=(2k+1)^2=4(k^2+k)+1$

$k^2+k\in Z$ より，n^2 は奇数である．

【前件との矛盾】

n^2 は偶数であり，n は奇数と仮定する

$n^2=(n^2-1)+1=(n-1)(n+1)+1$

n は奇数より，$n-1$，$n+1$ はともに偶数

よって，$(n-1)(n+1)+1$ は奇数．

これは，n^2 は偶数であることに矛盾．

❖ 含意命題「p ならば q」の背理法

p は命題の前件(仮定)，q は命題の後件(結論)

背理法は，後件を否定して次の矛盾を示す．

① 後件の否定より前件との矛盾

② 前件より後件の否定との矛盾

③ 前件，後件の否定より数学的事実との矛盾

【後件との矛盾】

n^2 は偶数であり，n は奇数と仮定する

$n=n(n+1)-n^2$

n，$n+1$ は連続する 2 つの整数より

どちらかは偶数．よって右辺は偶数

これは n を奇数と仮定したことに矛盾

【数学的事実との矛盾】

n^2 は偶数であり，n は奇数と仮定する

$n^2+n=n(n+1)$

左辺は偶数 n^2 と奇数 n の和より奇数

右辺は奇数 n と偶数 $n+1$ の積より偶数

よって，矛盾する

【直接証明】

$n=n(n+1)-n^2$

n，$n+1$ は連続する 2 整数より

その積は偶数．よって n は偶数

連続する n 個の整数の積は $n!$ の倍数．

$n=n^3-(n-1)n(n+1)$ と変形する．

これは，次の命題の直接証明になる．

「n^2 は 3 の倍数ならば n は 3 の倍数」