

# 三角比の定理のSDGs(持続可能な展開と指導)

中村文則

## 0 はじめに

直角三角形の形状は直角でない頂点の内角 $\theta$ で定まる。そして $\theta$ に対する直角三角形の斜辺、隣辺、対辺(この用語は今使われなくなった)の3辺のうち、2辺からなる3組(厳密には6組)の比で三角比は定義する。

三角比は三角形の要素や性質を調べる有用なツールであるが鈍角でどのように定義するかは大きな問題である。教科書ではデカルト座標上に、角 $B$ が直角である直角三角形 $AOB$ を頂点 $O$ を原点とし $OB$ が $x$ 軸上にあるように置く。これから点 $A$ の座標が定まりその $x$ 座標、 $y$ 座標の値を三角比に読み替えれば鈍角(直角も含めて)へと三角比は拡張できる。三角比は突然、幾何の性質による定義から代数的な定義に変わるのだ。

しかし座標を導入しておきながら正弦定理の証明では三角形の外接円を利用し幾何での図形の性質から導く。辺(弦)に対応する弧の円周角は等しいことより頂点の内角の大きさを保存しながら円周上を動かすことで直角三角形に作り直して三角比を考えるのである。

ところが余弦定理の証明は初等幾何の極めて単純なアプローチに戻ってしまう。三角形の頂点から対辺に引いた垂線で三角形を切り分け、そうしてできる2つの直角三角形に三角比を用いるのである。

このように、単元の節毎に三角比を考えるための直角三角形の見方がコロコロと変わるからその飛躍についていけなくなる。このことが三角比の理解を困難なものとしているのは間違いない。

そこで単純に一つの手法のみを用い、鈍角への拡張、正弦定理、余弦定理を説明し継続的な指導と理解ができないか考えてみよう。その手法は次の単純なアプローチによるものである。

**「三角形の頂点から対辺またはその延長上に垂線を下ろして直角三角形を見いだす」**

## 1 鈍角への拡張

三角比の正弦と余弦は直角三角形の斜辺を分母とする2辺の比である。

これは斜辺の長さを1とすると次のようにみることができる。

傾斜角度 $\theta$ の斜辺を1進んだとき

- 正弦は水平方向に対して垂直方向(上下方向)に進んだ距離
- 余弦は水平方向(左右方向)に進んだ距離
- 正接は水平方向に対する傾き(勾配)

ここで傾斜を決める「水平方向」とは、角度 $AOB$ に対して、 $OA$ または $OB$ のことである。この水平方向の端点を $O$ とする線分(半直線)を基線という。角度は基線に対する仰角、俯角の大きさである。

例えば右上図では、 $OB$ を水平方向(基線)としたときに、 $OA$ が斜辺でありその長さが1である。斜辺以外の2辺 $AB$ 、 $OB$ の長さがそれぞれ正弦、余弦を表す。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

この関係式は斜辺の長さが1の場合のピュタゴラスの定理を表している。

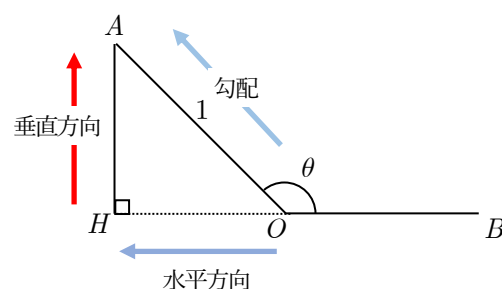
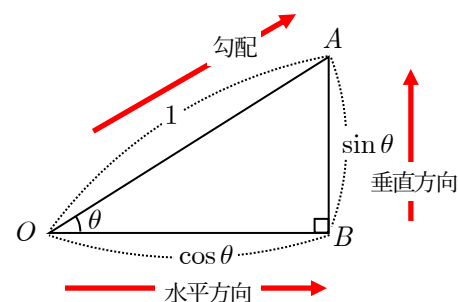
これから、斜辺の長さが $l$ の直角三角形は $\frac{1}{l}$ 倍に拡張した直角三角形を考えればよい。

では、この見方で $\theta$ が鈍角の場合を定義してみよう。

$\theta > 90^\circ$ のとき、 $\angle AOB = \theta$ とし $OB$ を水平方向(基線)とする。

$\theta$ が鋭角から鈍角に大きくなり点 $O$ から点 $A$ に斜辺上を1進む。点 $A$ の垂直方向の移動距離 $AH$ は上方向であるから、

page 1



$$\sin \theta = AH$$

点 A の水平方向の移動距離は  $OH$  である。しかしその移動は基線  $OB$  に対して逆向きになっている。

そこで、「逆向きを表す(-)」をかけて表すことにする。よって、

$$\cos \theta = -OH$$

同じように勾配を考えると、

$$\tan \theta = \frac{AH}{-OH}$$

なお、(-)をかけた値は必ずしも負数になるわけではない。(-)は  $OB$  の向きの逆向きを表す記号である。

$OA$ 、 $OB$ 、 $OH$ 、 $HA$  は有向線分であり、その向きに対し同じか逆向きかということである。

ここで、垂直方向は上向きを正、水平方向は右向きを正とすると鋭角の三角比の値はすべて正であり、鈍角  $\theta$  の三角比の値は次のようになる。

$$\sin \theta > 0, \quad \cos \theta < 0, \quad \tan \theta < 0$$

このように考えると、 $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  のような特殊角についても三角比を求めることができる。

$\theta = 0^\circ$  のとき

垂直方向の移動距離は 0、水平方向の移動距離は  $OA$  に等しいので 1、勾配は 0 である。

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \tan 0^\circ = 0$$

$\theta = 90^\circ$  のとき

垂直方向の移動距離は  $OA$  に等しいので 1、水平方向の移動距離は 0、勾配は考えられない。

$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0$$

$\theta = 180^\circ$  のとき

垂直方向の移動距離は 0、水平方向の移動距離は  $OB$  に逆向きで大きさは  $OA$  に等しいので -1

勾配は 0 である。

$$\sin 180^\circ = 0, \quad \cos 180^\circ = -1, \quad \tan 180^\circ = 0$$

では、三角形  $AOB$  において  $\angle AOB = \theta$  としてその三角比を求めてみよう。

・角  $\theta$  が鋭角の場合

角  $\theta$  は  $OB$  を水平方向(基線)とする傾斜  $OA$  により定まる。ここで、

「頂点  $A$  から対辺またはその延長線に垂線  $AH$ 」

を下ろす。  $OA$  の長さを 1 とするために、  $OA$  で割ることによって次の三角比を得る。

$$\sin \theta = \frac{AH}{OA}, \quad \cos \theta = \frac{OH}{OA}, \quad \tan \theta = \frac{AH}{OH}$$

・角  $\theta$  が鈍角の場合

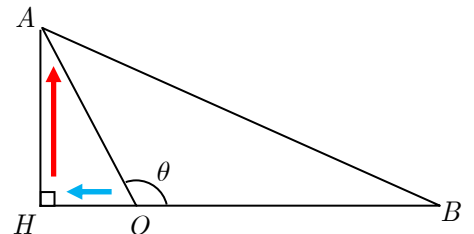
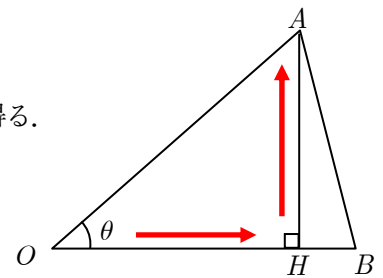
「頂点  $A$  から対辺  $OB$  の延長線に下した垂線を  $AH$ 」

とする。  $\angle AOH = 180^\circ - \theta$  であるから三角形  $OAH$  は  $\theta$  により定まる直角三角形である。  $OB$  に対して  $OH$  は逆向きであることより次を得る。

$$\sin \theta = \frac{AH}{OA}, \quad \cos \theta = -\frac{OH}{OA}, \quad \tan \theta = -\frac{AH}{OH}$$

このように三角形の 2 辺で挟まれる内角の三角比は、頂点とその対辺または延長線に垂線を下ろして直角三角形を作ることによって求められる。

$\angle AOB = \theta$  で考えると、有向線分  $OB$  を水平方向として点  $A$  から  $OB$  またはその延長線に垂線を下ろすのである。この  $\theta$  により得られる三角比の値を  $1^\circ$  刻みにすべて求めて表にして用意しておくことで効率良く三角形の計量ができる。このように三角比の値をまとめた表を「三角比の表」という。



## 2 三角比の角度の変換

三角形の計量は三角比の表より計算できるが、では用意する角度はどの範囲が必要であるか調べてみよう。

### 《余角の三角比》

斜辺の長さが1の直角三角形 $OAB$ の形状は、直角以外の2つの内角のどちらかが与えられればよい。

なぜなら、 $\angle OAB = \alpha$ 、 $\angle OBA = \beta$ とすると、次の関係式が成立するからである。

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

このとき、 $\alpha$ と $\beta$ は余角の関係にあるという。

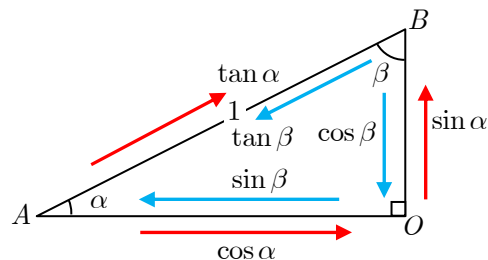
ここで、 $\alpha$ 、 $\beta$ のそれぞれで定まる直角三角形は、形状は同じであるが基線を表す有向線分は異なる。

傾斜角度が $\alpha$ の場合は $AO$ 、傾斜角度が $\beta$ の場合は $BO$ が基線である。

このように、 $\alpha$ と $\beta$ では水平方向と垂直方向は互いに入れ替わる。

これから、 $\alpha$ 、 $\beta$ のどちらかの角の大きさを $\theta$ とすると、もう一つの角の大きさは $90^\circ - \theta$ であり次の関係を得る。

$$\begin{cases} \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \\ \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \\ \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta} \end{cases}$$



なお、この変換公式では、 $\theta$ は鋭角の場合に成立する。しかし、 $45^\circ < \theta < 90^\circ$ の三角比では余角の大きさは $0^\circ < 90^\circ - \theta < 45^\circ$ であるから、三角比の表は $45^\circ$ 以下の三角比の値があればよい。

### 《補角の三角比》

鈍角の三角比を鋭角の三角比で表してみよう。

$\angle AOB = \alpha$ とし、 $\alpha$ を鈍角とする。

点 $A$ から有向線分 $OB$ の延長線に下した垂線を $AH$ とする。

直角三角形 $AOH$ において、 $\angle AOH = \beta$ とする。

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

であり、このとき、 $\alpha$ と $\beta$ は補角の関係にあるという。

ここで、直角三角形 $AOH$ を $OB$ に垂直で点 $O$ を通る直線に関して

対称移動した直角三角形 $A'OH'$ を考える。 $\angle A'OH' = \beta$ であることより、

2つの直角三角形の斜辺 $OA$ と斜辺 $OA'$ の垂直方向、水平方向の移動距離は、

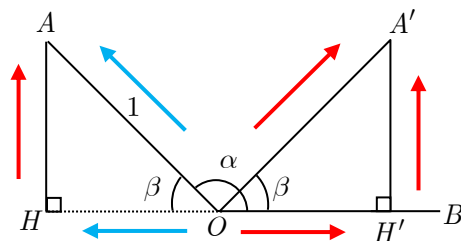
垂直方向では等しいが、水平方向では距離は等しく向きは逆向きである。

$\alpha$ 、 $\beta$ のどちらかの角度を $\theta$ とするともうひとつの角度は $180^\circ - \theta$ であることより次の関係が成り立つ。

$$\begin{cases} \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \\ \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \\ \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta \end{cases}$$

なお、この式は $\theta$ は鋭角、鈍角のどちらの場合でも成立している。

この変換公式を用いると、鈍角の三角比は補角の関係より鋭角の三角比で表すことができる。



このように余角、補角の三角比を考えると、三角比の値を求めるには、 $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ である $\theta$ の三角比の表があればよい。ただし、 $45^\circ$ より大きい鋭角の正接の値は余角では $45^\circ$ 以下となり正接の値の逆数で与えられるため計算が大変になる。そのため三角比の表は $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の三角比の値で作られている。

### 3 正弦定理

鋭角三角形  $ABC$  の頂点  $A, B, C$  からその対辺に下した垂線をそれぞれ  $AL, BM, CN$  とする。  
2つの直角三角形  $\triangle CAN$  および  $\triangle CBN$  の正弦を求める。

$$\sin A = \frac{NC}{AC}, \quad \sin B = \frac{NC}{BC}$$

これより,  $NC = AC \sin A = BC \sin B$

$$\text{以上より, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

直角三角形  $\triangle ABM, \triangle CBM$  についても同様の関係式が成り立つ。

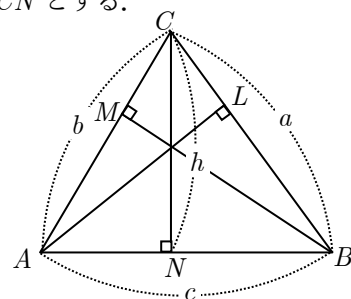
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

よって次の性質が成立する。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ではこの性質が直角三角形や鈍角三角形でも成立することを調べてみよう。

以下、頂点  $C$  から対辺またはその延長線に引いた垂線を  $CN$  とし,  $CN = h$  とする。



#### ① 直角三角形の場合

$C = 90^\circ$  について調べる。

鋭角三角形の場合と同様に次の式が成り立つ。

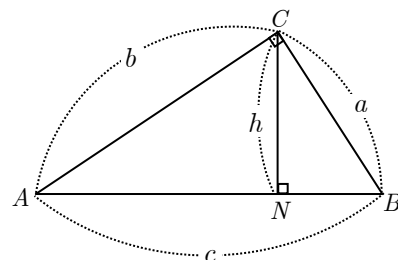
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

次に,  $\triangle ABC$  は直角三角形より,  $\sin B = \frac{b}{c}$  よって,  $\frac{b}{\sin B} = c$

$$\text{また, } \frac{c}{\sin C} = \frac{c}{\sin 90^\circ} = c$$

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\text{以上より, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



#### ② 鈍角三角形の場合

どの頂点の角が鈍角であるかで場合分けをして,  $\sin A$  と  $\sin B$  の関係を求める。

・  $C$  が鈍角のとき

$$\sin A = \frac{h}{b}, \quad \sin B = \frac{h}{a}$$

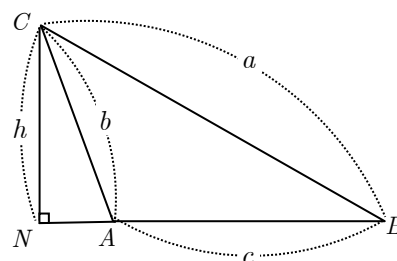
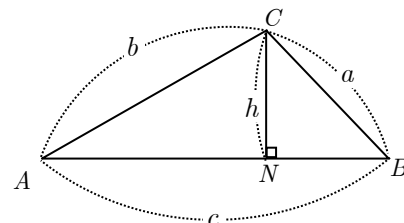
$$\text{これより, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

・  $A$  が鈍角のとき

$$\text{直角三角形 } ACN \text{ において, } \sin \angle CAN = \frac{h}{b}$$

$$\text{ここで, } \sin \angle CAN = \sin(180^\circ - A) = \sin A$$

$$\text{よって, } \sin A = \frac{h}{b}$$



また、 $\sin B = \frac{h}{a}$

以上より、 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

・  $B$  が鈍角のとき

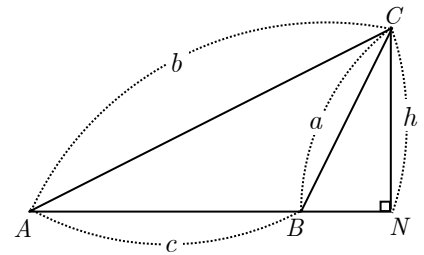
直角三角形  $CBN$  において、 $\sin \angle CBN = \frac{h}{a}$

ここで、 $\sin \angle CBN = \sin(180^\circ - B) = \sin B$

よって、 $\sin B = \frac{h}{a}$

また、 $\sin A = \frac{h}{b}$

以上より、 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$



いずれの場合も成立する。

$\sin B$  と  $\sin C$  に関しても、同様の議論が成立するのは明らかである。

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

以上より三角形の形状に関わらずこの性質は成立する。

三角形  $ABC$  において次の式が成立する。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

この性質を三角形の**正弦定理**という。

### 正弦定理の連比表現と比例定数

正弦定理は次のように連比で表現できる。

三角形  $ABC$  において次の連比が成立する。

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

すなわち、

「三角形の三辺の長さは、対辺の正弦の値に比例する」

では、連比の比例定数を求めてみよう。

$\triangle ABC$  の外接円の中心を  $O$ 、半径を  $R$  とする。

$\triangle ABC$  の最大角を  $C$  とし、直線  $CO$  と外接円との交点で点  $C$  でない点を  $D$  とする。

タレスの定理より  $\triangle CBD$  は  $\angle CBD = 90^\circ$  である直角三角形である。

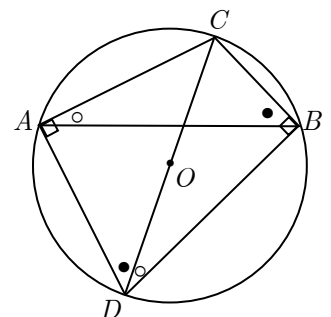
また円周角の性質より、

$$\angle CAB = \angle CDB$$

これから、直角三角形  $CDB$  において正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\sin \angle CDB} = \frac{2R}{\sin 90^\circ} = 2R$$

すなわち、連比の比例定数は  $2R$  である。



以上より,

三角形  $ABC$  の外接円の半径を  $R$  とすると次の式が成立する.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

これから, 三角形の外接円を考えることで正弦定理は次のように表現できる.

円の弦の長さはその弦に対応する弧の円周角の正弦の値に比例する.

円の弦により分けられる弧は, 円の中心側にある(半円より大きい)弧である優弧と, 円の中心の反対側にある(半円より小さい)弧である劣弧の2つがある.

この性質は優弧, 劣弧のどちらの円周角の正弦でも成立する.

例えば右図の半径  $R$  の円では, 弦  $AB$ ,  $CD$  の円周角に対して,

$$\frac{m}{\sin \alpha} = \frac{n}{\sin \beta} = 2R$$

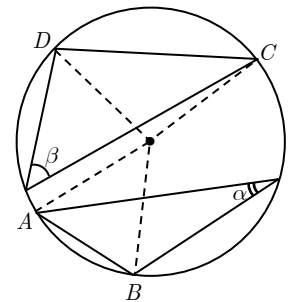
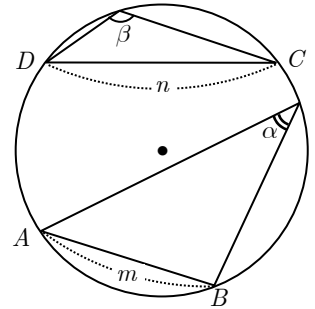
なお, 次の性質と合わせて示すとよいだろう.

円の劣弧の長さはその劣弧の円周角の大きさに比例する.

劣弧は中心角に比例し, 中心角は円周角の2倍の大きさである関係から自明である.

右図においては, 次の式が成立する.

$$\widehat{AB} : \widehat{CD} = \alpha : \beta$$



#### 4 余弦定理

鋭角三角形  $ABC$  の頂点  $C$  から対辺  $AB$  に下した垂線を  $CN$  とする.

ここで,  $CN = h$ ,  $AN = x$  とする.

2つの直角三角形  $CAN$ ,  $CBN$  のそれぞれにピュタゴラスの定理を用いる.

$$h^2 = b^2 - x^2$$

$$h^2 = a^2 - (c - x)^2$$

これから,  $b^2 - x^2 = (c - x)^2 = a^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$

$$\therefore x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

よって,  $\cos A = \frac{x}{b} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

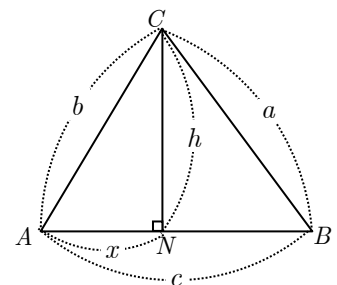
同様に考えることで,  $\cos B$ ,  $\cos C$  も三角形の3辺の長さで与えられる.

ではこの性質が直角三角形, 鈍角三角形の場合で成立することを調べてみよう.

以下, 頂点  $C$  から対辺  $AB$  またはその延長線に下した垂線を  $CN$  とし,

$$CN = h, \quad AN = x$$

とする.



① 直角三角形の場合

$C = 90^\circ$  の場合について考える。

鋭角三角形と同じように次式が成立する。

$$AN = x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \quad \text{これより,}$$

$$\cos A = \frac{x}{b} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

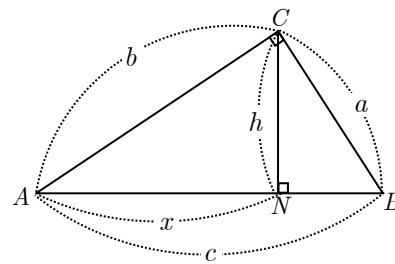
$$BN = c - x = c - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} \quad \text{これより,}$$

$$\cos B = \frac{c - x}{a} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

また、三平方の定理より、 $c^2 = a^2 + b^2 \quad \therefore a^2 + b^2 - c^2 = 0$  よって、

$$\cos C = \cos 90^\circ = 0 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

以上より、直角三角形で性質は成り立っている。



② 鈍角三角形の場合

どの頂点の角の大きさが鈍角であるかで場合分けをして、 $\cos A$  を求める。

- $C$  が鈍角のとき

鋭角三角形の場合と同様に成立する。

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \quad \text{より,} \quad \cos A = \frac{x}{b} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

- $A$  が鈍角のとき

$$h^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c + x)^2 \quad \text{これより,}$$

$$x = -\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

$$\cos \angle CAN = \frac{x}{b} \quad \text{ここで,}$$

$$\cos \angle CAN = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$$

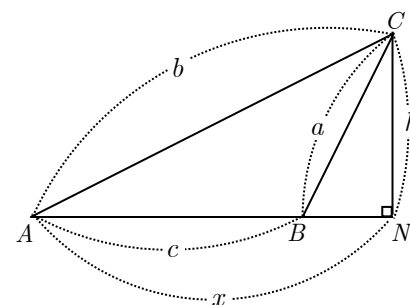
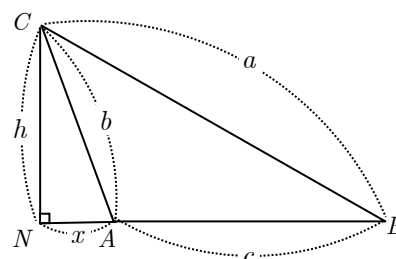
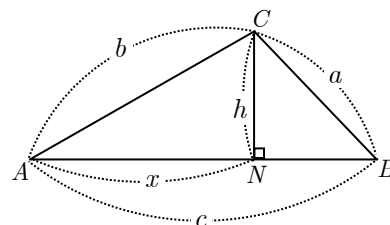
$$\therefore \cos A = -\cos \angle CAN = -\frac{x}{b} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

- $B$  が鈍角のとき

$$h^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (x - c)^2 \quad \text{これより}$$

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

$$\therefore \cos A = \frac{x}{b} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$



$\cos B$ 、 $\cos C$  についても同様に考えられるから、性質は鈍角三角形で成り立つ。

以上より、任意の三角形で次の性質が成り立つ。

三角形  $ABC$  において、次の式が成立する。

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

これを三角形の**余弦定理**という。

余弦定理を用いると次の性質が得られる。

$$\begin{aligned} b \cos C + c \cos B &= b \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2) + (c^2 + a^2 - b^2)}{2a} \\ &= a \end{aligned}$$

$$\therefore a = b \cos C + c \cos B$$

同様に考えて次の性質が得られる。

三角形  $ABC$  において、次の式が成立する。

$$a = b \cos C + c \cos B, \quad b = c \cos A + a \cos C, \quad c = a \cos B + b \cos A$$

これを三角形の**第1余弦定理**という。

三角形の2つの内角の大きさが与えられると内角の大きさの和は $180^\circ$ であることより残りの角も分かる。

すなわち、第1余弦定理は「2辺の長さ」と3つの角の余弦」の値から残りの要素の1辺の長さを求める公式である。これに対して余弦定理は「三角形の3辺の長さ」から角の余弦の値を求める式である。

これを次のように変形すると、「2辺とその間の角」から、その角の対辺の長さを求めることができる。

三角形  $ABC$  において、次の式が成立する。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

これを三角形の**第2余弦定理**という。

## 5 ヘロンの公式 (三角形の面積公式)

余弦定理の証明の過程において、三角形の形状に関わらず次の式が得られた。

$$h^2 = b^2 - x^2, \quad x = \left| \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right|$$

これから  $h$  を三角形の3辺の長さで表してみよう。

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - x^2 = b^2 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)^2 \\ &= \left( b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right) \left( b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right) \\ &= \frac{(b^2 + c^2 + 2bc) - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)}{2c} \\ &= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{2c} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2} \end{aligned}$$

ここで、 $s = \frac{a+b+c}{2}$  すなわち、 $a+b+c = 2s$  とおくと

$$a+b = 2s - c, \quad b+c = 2s - a, \quad c+a = 2s - b$$

これを代入すると、

$$h^2 = \frac{2s(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b)}{4c^2} = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}$$

$$\therefore h = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



$\triangle ABC$  において,  $h$ は底辺を  $AB$  とするときの高さを表し三角形の面積は次式で与えられる.

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}ch$$

これから三角形の3辺の長さが与えられたときの三角形の面積は次のようになる.

三角形  $ABC$  の3辺の長さが与えられたとき, その面積  $S$  は次により求められる.

$$s = \frac{a+b+c}{2} \quad (s \text{ は三角形の周の長さの半分)とすると,}$$
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

これをヘロンの公式という.

三角比を用いずに三角形の面積が得られるこの公式は, 古代アレキサンドリアのヘロンが考案した. 測量士(縄張り師)でもあったヘロンはぐるっと土地の周りを歩いただけでその土地の面積を言い当てたという.

## 6 おわりからはじまりへ

紀元前6世紀頃, ギリシャの七賢人であるタレスはピラミッドの高さを棒の影を利用して計測したという. 比例の神様といわれたタレスは三角比の概念の種をまき, 弟子であったピュタゴラスは三平方の定理を発見して芽吹かせた. そして三角比の芽は少しずつ育っていった. そして紀元前3世紀にはアレキサンドリアのエウクレデス(ユークリッド)は数学史上もっとも有名かつ重要な数学書「原論」を著す. 第1巻命題47では直角三角形の各辺の上に乗る正方形の面積を比較し幾何的にピュタゴラスの定理を証明している. さらに等積変形を用い鈍角三角形や鋭角三角形に成り立つ性質を調べている(第2巻命題12, 13). その性質が第2余弦定理であるが, まだ余弦の記号はなかったからピュタゴラス三角形に辺を折り曲げてできる矩形の面積を加減することで表している. 紀元前2世紀にはギリシャの天文学者ヒッパルコス, 角の大きさを度数法で表し直角三角形の2辺の比を表とまとめたという(現存する資料はヒッパルコスの数表に改良を加えたプトレマイオスによるものである). これにより天文や測量の技術計算は飛躍的に発達する. ヒッパルコスは三角法の父といわれるようになった.

このように三角比は実用的な技術理論である三角法としてタレスからの系譜を辿る. 古代ギリシャの数学者は円弧(弓)の弦の垂直二等分線は円の中心を通り中心角を二等分し, 半弦(half-chord)は二等分角(円周角)の正弦であることを知っていた. しかし計算技術に特化した三角法のルールから外れることはなかったのだ. それを打破するきっかけは紀元前4世紀のアレキサンドロスIII世による東方遠征である. 西洋と東洋の文化交流が始まり三角比の分岐した血脈はインドで独自に拓かれ磨かれていく. そして5世紀にインドの天文学者アーリヤバタは著書「アーリヤバティーヤ」で円周角と弦の関係から正弦を考え三角比の視点に変革をもたらすのだ.

インドで構築された三角比の理論はやがて中世イスラムに伝わる. 9世紀初期にアル・フワーリズミは正確な三角比の表を作成し, 多くの数学者が三角比の研究成果を本としてまとめる. 14世紀に入ると翻訳された三角比の文献はヨーロッパに逆輸入され, ニュートン, ライブニッツへと受け継がれ三角関数の形を整えていく. そして, 18世紀にオイラーの著書「無限解析入門」の発表により三角関数は解析学としての位置づけで研究されるようになった. さらに三角関数を用いて関数を表現するフーリエ解析へと発展していく.

このようにざっと振り返っても三角比および三角関数の理論は2000年以上の弛まぬ研究の成果物である.

それを教科書では本来1年かけた研究をほぼ1分程度で説明してしまっている. そこで少しでも持続的・継続的な指導をしたいと考え本文で説明することにした. 補足をしながらその内容を少し解説していこう.

### 【鈍角の三角比】

鈍角の三角比は教科書では鋭角のときの幾何的定義からいきなり単位円周上の点の座標で定義する。座標平面上で円関数として導入するわけだが、座標平面はデカルト(1596~1650)が著書「方法序説」でその考えを示す。幾何による定義から2000年近く後のことである。それを教科書では30時間ほどで学んでいる。幾何の三角比から解析幾何の三角関数までの熟考の時代を端折るから教科書では角度の範囲でほころびがでてしまう。

余角の変換公式では $\theta$ と $90^\circ - \theta$ は正の角度であるから $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 。補角の変換公式では $\theta$ と $180^\circ - \theta$ は正の角度であるから $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  ( $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ も考える)である。このように変換公式を利用できる角度の範囲は違っているが指導上それほど留意はしていないだろう。大半の教科書は触れていないし、ある出版社でも変換公式の囲い枠の外側に目立たないように記載している。その理由は三角関数では一般角によりグラフ(円関数)から $\theta \pm 90^\circ n$ は機械的に求めることができ補角や余角を意識して変換することはない。数学Iは鈍角の三角比が求められて三角形の計量で利用できればいい、そういう消極的なスタンスである。であれば中途半端に基本的な三角方程式や不等式を解かせることは疑問である。ところが時間数に追われる現場は、鈍角を円関数で定義するのなら折角だからということで「効率」を重視して一般角まで拡張し三角関数の先取りをし結構難しい方程式・不等式も扱ってしまう。そのへんが「持続」ということではちょっと無理をしている印象があるのだ。

そして余角の変換公式と補角の変換公式の $\theta$ の範囲の違いの一貫性のなさを是正するように角度 $\theta$ は鋭角として扱っている。例えば、 $\cos 160^\circ$ を補角の公式で鋭角に変換してみよう。

$$\cos 160^\circ = \cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$$

でも、 $160^\circ$ と $20^\circ$ が補角の関係なのだから、次のように用いることもできる。

$$\cos 160^\circ = -\cos(180^\circ - 160^\circ) = -\cos 20^\circ$$

これほどきちんと変形しなくとも、 $160^\circ$ に対して $20^\circ$ 、 $140^\circ$ に対して $40^\circ$ 、このように補角の関係にある角度は即答できる。だからあとは水平方向の向きが逆向きになるようにどちらかの余弦にマイナスを掛けて変えるだけである。なお、本文でも触れているがマイナスを乗ずるということは負数にするということではなく、逆向きにする操作である。 $\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ$ であり、 $\cos 20^\circ = -\cos 160^\circ$ でもある。

本文では $\angle AOB$ の基線を $OB$ とするときそれは有向線分であるとしている。有向線分は数学Aの図形の性質で外分を説明するときそれとなく扱う。3:1の外分は、3:(-1)に分けることである。三角比の定義も同様に考察した方が持続性はある。正弦は向きは変わらず、余弦は向きは変わる。だからその比である正接は向きが変わる。極めて単純である。さらに数学Cでは有向線分はベクトルとして学ぶことで持続的に繋がる。 $\angle AOB$ で $OA = 1$ である点 $A$ から基線 $OB$ またはその延長線に垂線 $AH$ を下ろすとき、余弦 $OH$ は正射影ベクトルのことである。座標平面上のベクトルでは、 $x$ 軸、 $y$ 軸への方向余弦がそれぞれ余弦、正弦ということになる。円関数よりはベクトルの方がともに図形の解析ツールであるから与しやすい。

ところで角度の変換公式で $90^\circ + \theta$ の三角比は図形と計量では扱わないが、これは補角・余角の変換公式から容易に導くことができる。 $90^\circ + \theta$ と $90^\circ - \theta$ は和が $180^\circ$ より補角の関係である。したがって、

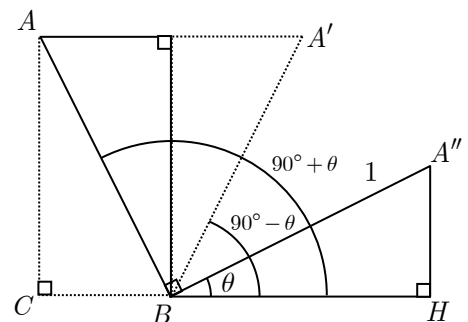
$$\sin(90^\circ + \theta) = \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = -\cos(90^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = -\tan(90^\circ - \theta) = -\frac{1}{\tan \theta}$$

これより次の変換公式を得る。

$$\begin{cases} \sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta \\ \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta \\ \tan(90^\circ + \theta) = -\frac{1}{\tan \theta} \end{cases}$$



【正弦定理】

単位円周上の弦(正確には弦の半分)と円周角(中心角の半分)から正弦定理を導くことは歴史的には正統な流れではある。ただその流れを説明するには時間を要するから飛躍した論理と受け止められる。

そこで正弦定理を「頂点から対辺またはその延長線に下した垂線」で導くことにした。

本文では鋭角三角形, 直角三角形, 鈍角三角形の場合分けで求めているが,

「三角形の最大角を  $C$ 」

としてこれを基準に考えてみよう。

最大角である頂点  $C$  から対辺  $AB$  に下した垂線を  $CN$  とすると三角形の形状に関わらず  $N$  は辺  $AB$  の内分点である。したがって次の関係式は必ず成立する。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

鋭角三角形, 直角三角形, 鈍角三角形に場合分けして次を証明する。

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

・鋭角三角形の場合

頂点  $A$  から対辺  $BC$  に下した垂線は辺  $BC$  と交わるので明らかに成立する。

・直角三角形の場合

$C = 90^\circ$  であり, 三角比の定義より,  $\sin B = \frac{b}{c}$  これから

$$\frac{b}{\sin B} = c = \frac{c}{\sin 90^\circ} = \frac{c}{\sin C}$$

・鈍角三角形の場合

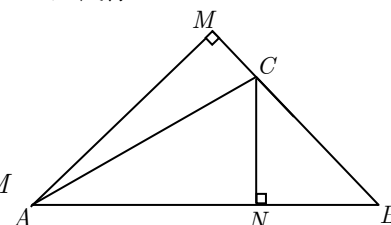
角  $C$  は最大角より鈍角である。頂点  $A$  から辺  $BC$  に下した垂線  $AM$  は辺  $BC$  の延長線と交わる ( $M$  は  $BC$  の外分点)。

直角三角形  $ABM$  において,  $\sin B = \frac{AM}{AB} \therefore AM = c \sin B$

直角三角形  $ACM$  において,  $\sin \angle ACM = \frac{AM}{AC}$  より,  $AM = b \sin \angle ACM$

ここで,  $\sin \angle ACM = \sin(180^\circ - C) = \sin C \therefore AM = b \sin C$

よって,  $c \sin B = b \sin C$  より  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$



このように本文の証明は随分コンパクトになる。

最大角による場合分けで教科書の外接円による証明をアレンジしてみよう。

三角形  $ABC$  の外接円の中心を  $O$ , 半径を  $R$  とし, 角  $C$  を最大角とする。

頂点  $C$  と外接円の中心  $O$  を通る直線が外接円と交わる  $C$  以外の点を  $D$  とする(簡単にいうと直径  $CD$ )。

このとき線分  $CD$  は三角形の形状に関わらず必ず辺  $AB$  と交わる。

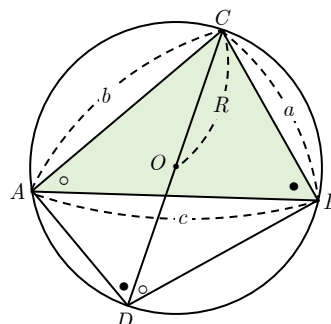
タレスの定理より,  $\angle CAD = \angle CBD = 90^\circ$

また, 円周角の性質より,

$$\angle A = \angle CDB, \angle B = \angle CDA$$

よって,

$$\sin A = \sin \angle CDB = \frac{BC}{CD} = \frac{a}{2R}$$



$$\sin B = \sin \angle CDA = \frac{CA}{CD} = \frac{b}{2R}$$

次の式が成立することを鋭角三角形, 直角三角形, 鈍角三角形に場合分けをして示す.

$$\sin C = \frac{c}{2R}$$

① 鋭角三角形の場合

頂点  $B$  と円の中心を通る直線が円と交わる  $B$  以外の点を  $E$  とする ( $BE$  は直径).  
 $BE$  は辺  $CA$  と交わるから,

$$\sin C = \frac{c}{2R}$$

② 直角三角形の場合

$C$  は最大角であるから  $C = 90^\circ$

また,  $AB = c$  は外接円の直径  $2R$  である. よって,

$$\sin C = \sin 90^\circ = 1 = \frac{c}{c} = \frac{c}{2R}$$

③ 鈍角三角形の場合

角  $C$  は最大角より鈍角である.

直線  $BO$  と外接円の交点で  $B$  以外の点を  $E$  とする (直径  $BE$  を考える).

タレスの定理より,  $\angle EAB = 90^\circ$  である.  $\therefore \sin \angle AEB = \frac{c}{2R}$

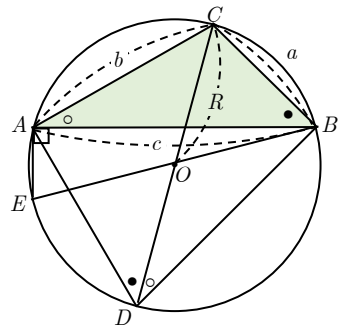
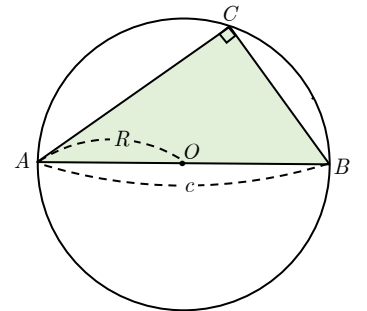
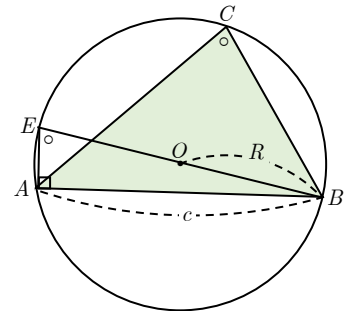
また, 四角形  $AEBC$  は円に内接するから補角の関係より,

$\angle AEB = 180^\circ - C$  よって,

$$\sin \angle AEB = \sin(180^\circ - C) = \sin C$$

$$\therefore \sin C = \frac{c}{2R}$$

以上より, 正弦定理が導かれた.



この方法は教科書の証明と本質的には同じであるが, 頂点の扱い方が異なっている.

教科書では, 辺  $BC$  の円周角  $A$  を円周上で動かすことで直角三角形を見出す. そして角  $A$  が鋭角, 直角, 鈍角の場合分けをして  $\frac{a}{\sin A} = 2R$  を示す. これが  $B, C$  でも同様に成立することをいう.

対して上述の証明は, もとの三角形  $ABC$  を直角三角形に作り直すわけではない. 最大角を端点とする直径で切り分けて円周角の性質から導いている.

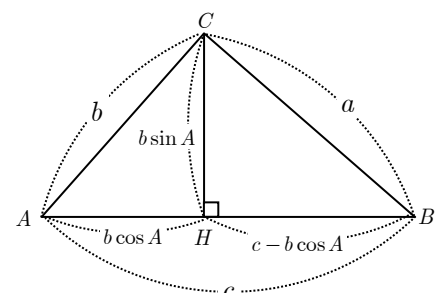
**【余弦定理】**

余弦定理も「頂点から対辺またはその延長線に下した垂線」から導いている.

垂線により 2 つの直角三角形に切り分けピュタゴラスの定理を用いる方法は中学時に学んでおり, 慣れた方法である. 実は教科書も本質的にこの方法を用いる. しかし教科書が第 2 余弦定理を導くのに対し本文では余弦を 3 辺の長さで表しこれを余弦定理としている.

その方がスムーズに第 1 余弦定理, 第 2 余弦定理が得られるからである.

ちなみに教科書は右図の直角三角形  $BCH$  にピュタゴラスの定理を用いて余弦定理を求めるがその計算は簡単である. でも本文のようにしてもそれほど



計算が煩雑になるわけではない。なにより、三角形の底辺を  $AB$  とするときの高さ  $CH$  が得られることでヘロンの公式を導くことができる。

なお、図の三角形では、 $BH = a \cos B$  であることから、

$$c = a \cos B + b \cos A \quad \cdots \textcircled{1}$$

第1余弦定理が導かれる。同様に、 $C$  を最大角として次を示すことができる。

$$a = b \cos C + c \cos B \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$b = c \cos A + a \cos C \quad \cdots \textcircled{3}$$

ここで、 $\textcircled{1} \times c - \textcircled{2} \times a - \textcircled{3} \times b$  より、

$$c^2 - a^2 - b^2 = 2ab \cos C$$

第2余弦定理が得られる。第1から第2を導くこの方法も継続的な指導といえるだろう。

正弦定理が円周角の性質とタレスの定理から求めたように余弦定理を円の性質を用いて導いてみよう。

角  $A$  が鋭角、直角、鈍角についてその余弦を求める。

中心  $B$  で  $AB$  を半径とする円を描く。

### ① 角 $A$ が鋭角の場合

角  $A$  が鋭角のとき右図のように辺  $BC$  の長さにより3つの場合分けが必要になるが考察方法は同じであり方べきの定理を用いる。

円の直径を  $AD$ 、直線  $AC$  が円と交わる点で  $A$  以外の点を  $H$  とする。

タレスの定理より、 $\angle AHD = 90^\circ$  である。

また、直線  $BC$  が円と交わる点を、点  $C$  に近いものから順に  $E$ 、 $F$  とする。ここで、

$$c > a, \quad c < a, \quad c = a$$

で場合分けをする。

$c > a$  のとき

頂点  $C$  は円の内部にある。

$$AH = AD \cos A = 2c \cos A \text{ より、}$$

$$CH = AH - AC = 2c \cos A - b$$

$$\text{また、} CE = BE - BC = c - a, \quad CF = CB + BF = a + c$$

方べきの定理より、

$$CH \cdot CA = CE \cdot CF$$

よって代入すると、

$$(2c \cos A - b)b = (c - a)(c + a)$$

$$\text{これから、} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$c < a$  のとき

頂点  $C$  は円の外部にある。同様に考えると、

$$AH = 2c \cos A, \quad CH = b - 2c \cos A, \quad CE = a - c, \quad CF = a + c$$

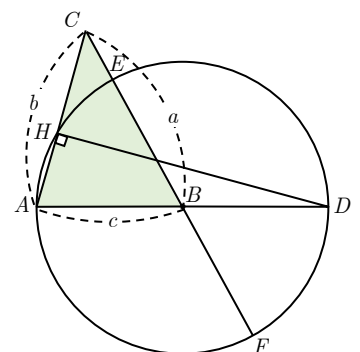
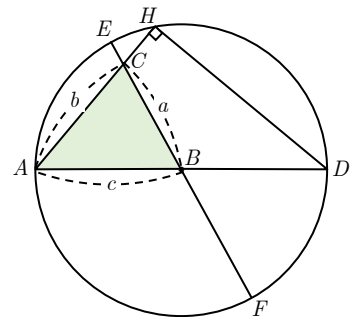
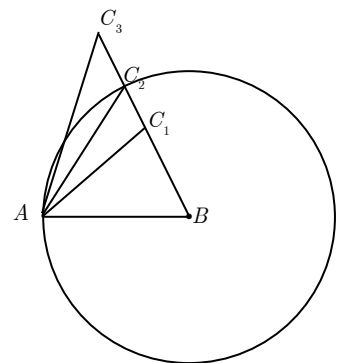
方べきの定理より、

$$CH \cdot CA = CE \cdot CF$$

よって代入すると、

$$(b - 2c \cos A)b = (a - c)(a + c)$$

$$\text{これから、} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



$a = c$  のとき

頂点  $C$  は円周上の点である.

$\angle ACD = 90^\circ$  より,  $AC = 2c \cos A$

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 - 2bc \cos A &= b^2 + c^2 - b \cdot b \\ &= c^2 = a^2 \end{aligned}$$

これから,  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

## ② 角 $A$ が鈍角の場合

鋭角の場合と同様に,  $D, H, E, F$  を考える.

$AH = AD \cos(180^\circ - A) = -2c \cos A$

これより,  $CH = CA + AH = b - 2c \cos A$

また,  $CE = BC - BE = a - c, CF = BC + BF = a + c$

方べきの定理より,

$$\begin{aligned} CA \cdot CH &= CE \cdot CF \\ b(b - 2c \cos A) &= (a - c)(a + c) \end{aligned}$$

以上より,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

## ③ 角 $A$ が直角の場合

$CA$  は円の接線で,  $A$  は円との接点である.

方べきの定理より,

$$CA^2 = CE \cdot CF$$

よつて

$$b^2 = (a - c)(a + c)$$

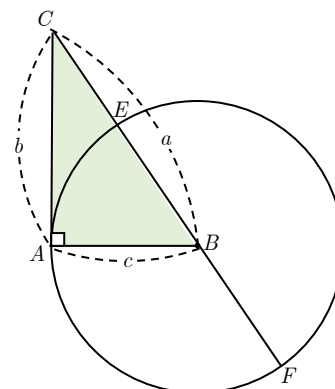
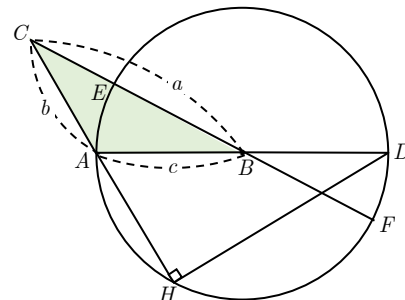
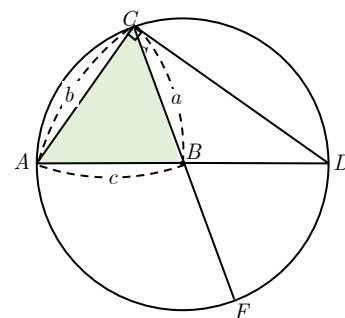
$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \dots(*)$$

ここで,  $\cos A = \cos 90^\circ = 0$  であることより,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

(\*)はピュタゴラスの定理である. すなわちこれはピュタゴラスの定理の1つの証明であり, 第2余弦定理はその拡張であることを表している.

なお頂点  $C$  が円の内部, 円周上, 外部にある場合を考えると証明は少しコンパクトになる, しかしここでは, ピュタゴラスの定理が導かれることより余弦定理はその拡張であることを示すために上述の場合分けとした.



## 7 数学と SDGs

SDGs(Sustainable Development Goals : 持続可能な開発目標)を目にする機会がずいぶん増えた.

サステイナブルのフレーズは人気のようにポリシーや宣伝に織り込む企業が増えている. SDGs はミレニアム 2000 年にニューヨークで開催された国連ミレニアム・サミットの宣言 MDGs(Millennium Development Goals: ミレニアム開発目標)を引き継いだものである. MDGs は 2015 年までに達成すべき 8 つの目標を掲げ, 国際社会共通の目標として取り組み多くの成果を上げた. その成果をさらに発展させ, また達成できなかった課題の解決に向けて次の 15 年間の目標として掲げられたのが SDGs である.

SDGs は地球上のすべての人間に対し誰一人取り残さない(leave no one behind)ことを基本理念として 17 個の目標から構成されている. 17 個の目標にはそれぞれテーマカラーのアイコンがあり, 目標を示す分かりやすい絵記号(ピクトグラム)が描かれそのキャッチフレーズが書いてある.

もちろん教育もその一つであり、4つめのアイコンには「質の高い教育をみんなに」と記され、すべての人に包摂的かつ公正な質の高い教育を確保し、生涯学習の機会を促進することを目標としている。なおミレニアムのMDGsは8つの目標を掲げていた。2つめのアイコンである教育は「普遍的な初等教育の達成」であり、2015年までに、すべての子どもたちが男女の区別なく初等教育の全課程を修了できるようにすることを目標とした。

すなわちすべての子どもたちがMDGsで基本的な教育を保証された後は、SDGsでは生涯を通して学べる質の高い教育を受けることができるように目指すということである。

ではその質の高い教育を教授者はどう学習者に与えればいいのか。

高等学校では2022年に学習指導要領が改定された。従前の「知識と技能」だけでなく「思考力・判断力・表現力」を身につけことを全体の目標とし、数学では論理的、総合的・発展的、体系的な思考力の育成を図ることとしている。これはSDGsを達成するための教育目標でもある。数学史やゲームも話題として取り上げ学習者が意欲的に学ぶ機会や環境を提供することも一例として挙げられた。しかし実際の教育現場ではどうだろうか。教科書や参考書はコラムなどでは豊富な話題が掲載されるようになったが単元の記載内容はいままでと違ってはいるわけではない。履修内容に較べて少ない学習時間では触れることは難しいし結局以前と変わらぬ授業展開になっている。持続的なまなびとはとても思えないのだ。

数学教育が持続的ではない原因のひとつはそれまでの持続的な方針が根強く影響してパラダイムシフトを妨げているためである。ここでいう持続とは慣習のことである。

例えば教育とは何かと問われたら「教えること」と答えるだろう。でもそれは「教授者が学習者を教えること」であり教授中心の考え方である。教育はEducationの和訳のように捉えられるが同意語ではない。

Educationの語源はラテン語educatusであり、単語を分解するとE(接頭語：外へ)+ducatus(導く)となる。すなわち内にある能力を引き出すという意味になる。学習者が知恵を絞ってなにかを自発的に生み出すということであり教授者はコンシェルジュであらねばならない。ところが日本では明治時代に諸外国の教育実践を参考に取り入れ道徳教育を盛込んだ教育勅語を發布したが忠君愛国の理念は崩さなかった。結局トップダウン的な解釈をしてEducationは誤訳されてしまった。主体性や自立性を謳っても教育者の教えの下であり、主体性とは何か、自立性とは何か、と教授者が教え説き、それを覚えることなのである。深層意識では教育者が主語であるという考えは根強い。教育学者ペスタロッチ(1746~1827)は子どもは口は小さいが容量は大きい壺のようなものである、そう述べている。それは幾らでも詰め込めるということではない。口が小さいということが重要なのであり、学習者が自ら砕き咀嚼しなければ口の中に入らないのだ。「教えること」から「まなび育つ」ことへの意識転換がこれからの教育では持続の条件となる。

数学では軍国主義の歴史が葬ってしまったものとして定理の名称がある。

中学では三平方の定理を学ぶがこれをピュタゴラスの定理とはいわない。実際、授業でピュタゴラスの定理と言うと生徒は面食らう。ピュタゴラスが実在したかどうかは諸説あるがピュタゴラス教団は確かに隠然たる勢力をもち政治を裏から牛耳っていた。教団はピュタゴラスの定理を発見するが、授業では発見者の名前をとった定理とは説明されないのだ。また「タレスの定理」を知っている学習者は皆無である。でも「半円の弧の円周角は90°」という誰でも知っている。比例の神様タレスは日本では敬われないのだ。

なぜこのように定理に発見者の名前を冠することが日本では少ないかというと、それは戦争が引き起こした悲劇によるものである。戦時中、日本では外国語の使用が禁止された。ハンマーは金づち、野球のストライクはいい球である。数学の諸定理もまた発見者が外国人の場合は使うことができなかつた。だから三平方の定理である。ただ、戦後三四半世紀(75年)以上経っても相変わらず慣習として定理名は改められてはいない。グローバル化や数学史の大切さを説きながらも旧態依然として慣習に従い発見者へのリスペクトはないのだ。だから本文では「ピュタゴラスの定理」、「タレスの定理」として説明している。ちなみに「方べきの定理」はその性質から方べきの

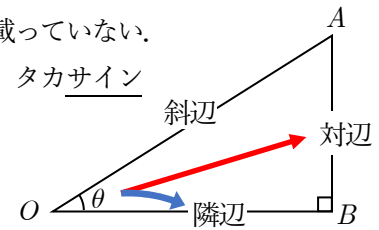


意味することは何となく説明できるが「方べき」はもう死語ではないだろうか。もともとはシュタイナーが用いたものであるが英語では Power-Theorem という。力の定理、なんて強力な響きの定理ではないだろうか。

三角比の分野でも用語の扱いにより持続性が保たれないものがある。

三角比は直角三角形の2辺の比だが、直角三角形の3辺の名称は教科書には載っていない。よこ、たかさ、とかいって誤魔化すが用語としては間違いである。ヨコサイン、タカサインのように語呂合わせで余弦、正弦を覚えるには便利かもしれないが。

3辺を表す用語がなければ三角比を言葉として表現することは難しい。でも2辺は既習なのである。角度 $\theta$ により定まる直角三角形 $AOB$ で角の向いの辺を対辺という(図形の性質の分野で学ぶ)。そして直角の対辺を斜辺という。



だから残りの1つの辺の名称を与えるだけである。直角三角形を定める角の隣にある斜辺でない辺を隣辺という。

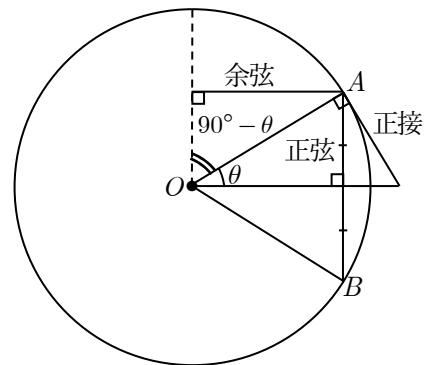
これから  $\text{正弦} = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$ ,  $\text{余弦} = \frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}$ ,  $\text{正接} = \frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}$

このように定義することができる。斜辺の長さを1とすれば、正弦は対辺の長さ、余弦は隣辺の長さである。こういった1つの用語の説明がないから指導の流れが滞ってしまう。

ところでどうして sine を正弦というのだろう。

正弦は直角三角形の斜辺に対する対辺の比であると定義するが、日本語の言葉として正弦は何か、語源や言葉の意味は触れていない。

でも正弦の意味は数学史をみればおのずと理解できる。古代ギリシャ人は直角三角形の比を円の中に見い出していた。単位円において弦の垂直二等分線は円の中心を通り中心角を二等分する。中心角の半分に対応している半分の弦(half-chord)を正弦とした。正弦は「角の正面にある弦の長さ」である。もうこの時代には円による定義に三角比は拡張されているのだ。



余弦は「余角の正弦」である。余角は角度の和が $90^\circ$ であること、すなわち $\theta$ に対して $90^\circ - \theta$ であり、余弦は余角の半弦である。先ほど、角の斜辺でない隣の辺を隣辺とあったが、余角で表せば、余角の対辺が隣辺である。三角形の各辺がすべて対辺で表現することができる。ところが教科書では余角という用語はなく、 $90^\circ - \theta$ の三角比として変換公式だけを説明する。余弦の理解に必要なのに余角は記載されていないだ。また正接は弦の垂直二等分線と弧上の点の接線の交点における接線の長さである。まあこれは単純に勾配(傾き)とした方が分かりやすいだろう。

歴史を辿ると、三角比は直角三角形の2辺の比から円の弦による定義になり、その円を座標目平面上に配置し円関数という代数解析手法で三角関数に拡張される。これが無理のない持続的な接続であるが、円の弦による定義が教科書では抜けているのだ。なおこのように円による三角関数の定義を考えれば正弦定理は次のように示すことができる。

図の三角形 $ABC$ の外接円の中心を $O$ 、半径を $R$ とする。

弧 $BC$ の円周角の大きさを $\angle BAC = \theta$ とすると、その中心角は $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\theta$

ここで中心 $O$ から弦 $BC$ に下した垂線を $OH$ とすると、垂線は弦 $BC$ を垂直に二等分する。 $OB = R$ ,  $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$ ,  $\angle BOH = \theta$  より

直角三角形 $BOH$ において  $\sin A = \sin \angle BOH = \frac{BH}{OB} = \frac{\frac{1}{2}a}{R} = \frac{a}{2R}$

これがもっとも歴史に忠実な証明かもしれない。

