「アルキメデスと球の表面積·体積」

図１

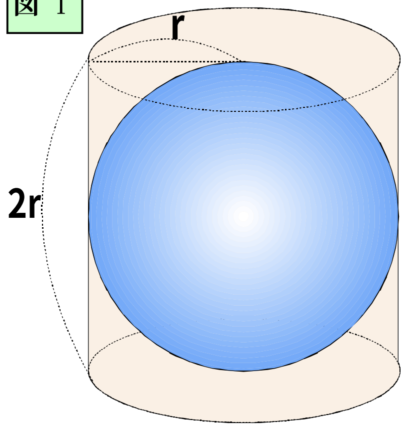



図１は円柱に球を内接させたものですが、この図には面白い性質が潜んでいます。

例えば球と円柱の体積比は2：3であり、さらに円柱に直円錐を内接させると、直円錐、球、円柱には、1：2：3という美しい体積比の関係が得られます。すなわち、直円錐と球の体積の和は、円柱の体積に等しくなるわけです。

次に、表面積を比較すると、球と円柱の表面積の比もまた2：3であり、円柱の側面積は球の表面積に等しくなっています。

この不思議な関係を発見したのは、古代ギリシアのシチリア島シラクサ出身の



科学者アルキメデスです。

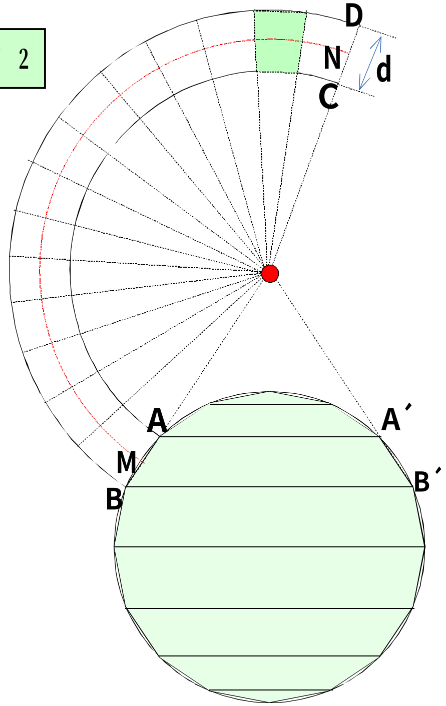
アルキメデスは、円や球面のように、曲線や曲面で表現された図形の典麗さに惹かれ、自分の墓碑に図１の絵を彫り込むよう遺言をしたほどでした。円周率が3.14に近似できることを示したのも彼です。アルキメデスはどうやってその値を調べたのかというと、円に正九十六角形をそれぞれ外接、内接させ、各々の周の長さを測ることで、その間にある円周の長さを予想したといわれています。計測し難い曲線を、細かく分けて線分の和とみなすアイデアは、幾何学的手法が主流であった当時では驚天動地のことでした。

アルキメデスのその発想術を辿り、球面の表面積と体積を求めてみましょう。

まず、表面積ですが、球の大円(球の中心を通る円)に内接する正2n角形を考えます。ここで、辺に沿ってりんごの皮

を剥くように、薄く球面を輪切りにします。輪切りにされた皮は円錐台となりますが、伸ばすと同心円の弧で囲まれた薄皮の帯ができます。例えば、図２は辺ＡＢに沿って剥いた場合です。こうした帯がｎ枚できるわけですが、その面積を集めると球面の表面積に近似できるとアルキメデスは考えたのです。

図 2




　さてこの帯の面積ですが、さらに同心円の中心を通る直線で細切れにすると、その１つ１つは台形となります。台形の面積は、（上底＋下底）／２×（高さ）で求められますが、



（上底＋下底）/２は上底と下底の長さの平均を意味し、中央線の長さを表しています。この中央線を集めると、帯の面積は

（弧ＭＮの長さ）×（幅ｄ）

で得られることが分かります。

　では、球の表面積を求めてみましょう。

図 3

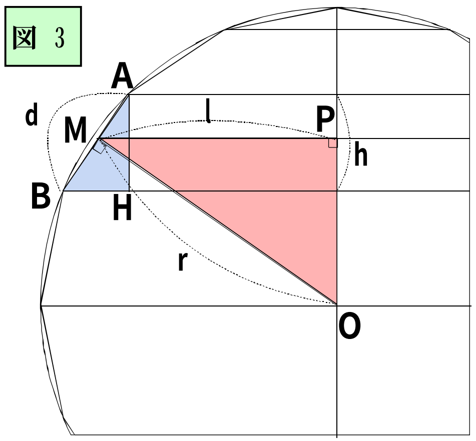



　図３は図２を拡大したものです。中央線である弧の長さは $2\pi\ell$ より帯の面積は $2\pi\ell d$ です。ＡよりＢＢ´に下ろした垂線の足をＨとすると、△ＯＡＢは二等辺三角形ですから OM⊥AB となり、

∠Ｒ＝∠ＢＡＨ＋∠ＰＭＡ＝∠ＯＭＰ＋∠ＰＭＡ

これから、∠ＢＡＨ＝∠ＯＭＰであり、△ＡＢＨと△ＭＯＰは相似な三角形であることが分

かります。２つの三角形の辺の比を考えると、ＡＢ：ＡＨ＝ＭＯ：ＭＰ。ここでＡＨは輪切りした円錐台の高さｈを表していますから、$\ell d = rh$です。したがって、帯の面積は$2\pi rh$、すなわち、

**（球の大円の円周）×（円錐台の高さ）**

で求められます。

以上より、ｎ枚の帯の面積の総和である球の表面積は、円錐台の高さの総和が球の直径に一致することより、

（球の大円の円周）×（球の直径）

となり、公式$4\pi r^2$が得られました。

次に、球面の体積ですが、地球の経線・緯線のように球面を細かく分割します。図４のように分割された曲面は平面に近似でき、球の中心を結んでできる錘を集めていけば球面の体積が求まります。

錐の体積は、（錐の底面積）×（高さ）÷３ですが、高さは球面の半径であり、錐の底面積の総和は球の表面積に一致しま

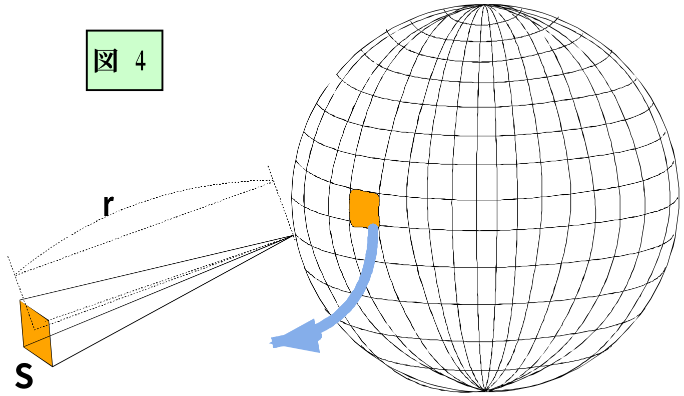


すから、球面の体積は、

**（球の表面積）×（球の半径）÷３**

すなわち、$\dfrac{4\pi r^3}{3}$となるわけです。

図 4




アルキメデスは、ローマ軍が侵入した際も、いつものように円に関する問題を床に書いて研究に没頭していました。兵士が床の図に足をかけたところ、「その円を踏むな」と叫んだため、腹を立てた兵士によって槍で刺殺されてしまったと伝えられています。

そしてこの偉大な数学者の発想はなんと２０００年の時を経て、積分の概念へと発展していくのです。