三角形の面積を翻訳する　～　いろいろな分野で活躍する三角形の面積

Fuminori Nakamura

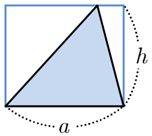
初等幾何

White-Paper に描いてみると…

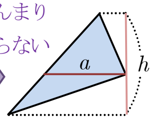
みんな知っている

$$S=\frac{ah}{2}$$

底辺×高さ÷2



あんまり知らない



$$s=\frac{a+b+c}{2}$$ (三角形の周の長さの半分)

が分かると…

アレキサンドリアの数学者ヘロン(BC.1 世紀頃)は，土地の周りをグルっと歩いただけでその土地の面積を言い当てたという。

ヘロンの公式

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

さらに三角形の内接円の半径 r が分かると…

$$S=rs \rightarrow S=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r}$$

外接円の半径 R が分かると……

$$S=\frac{abc}{4R}$$

傍接円の半径が分かると…

r_a, r_b, r_c は角 A,B,C 内にできる傍接円の半径

$$S=r_a(s-a)=r_b(s-b)=r_c(s-c)$$

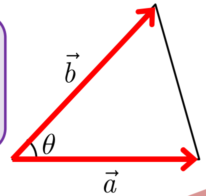
マイユーの公式

$$S=\sqrt{rr_ar_br_c}$$

ベクトル

斜めの世界で眺めてみると…

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$$

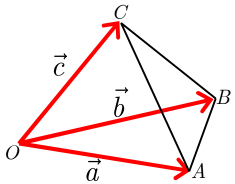


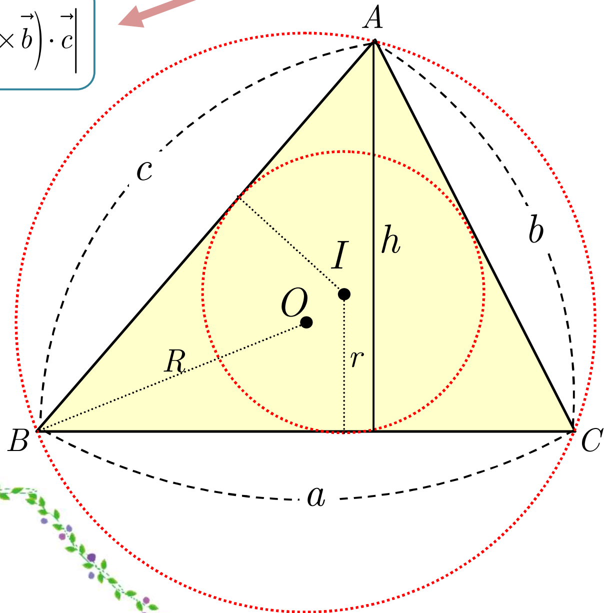
ベクトルの外積を使うと

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

外積を空間で考えれば，四面体 OABC の体積 V を求めることができる。

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$$





図形と方程式

格子を張り巡らすと…

ベクトルの成分で計算

$$S=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$$

$O(0,0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ のとき $S=\Delta OAB$

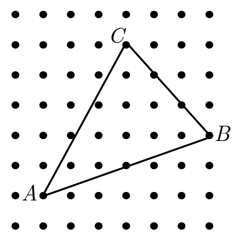
$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$ のとき $S=\Delta ABC$

$$S=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

ピックの定理

間隔 1 に配置された格子点のみを頂点にもつ多角形の面積は，
多角形の周上の点個数を E
内部の点の個数を F
とすると，

$$S=\frac{1}{2}E+F-1$$



三角比

三角形の辺と角の関係を調べると…

2 辺と間の角が与えられたとき

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$

1 辺と両端の角が与えられたとき

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin B}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}$$

外接円の半径 R 内接円の半径 r

$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

$$S=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$$

多角形の面積は，対角線で三角形に分割すればいいけど，四角形には次の面積公式がある。

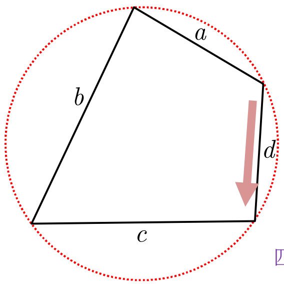
円が四角形に外接するとき

ブラマグプタの公式

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

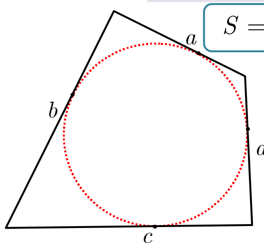
s は円に内接する四角形の周の長さの半分

インドの数学者ブラマグプタ(7 世紀)が発見した円に内接する四角形の面積公式。四角形の1辺の長さ d を0に近づけると三角形のヘロンの公式を導くことが出来る。



円が四角形に内接するとき

$$S=rs$$

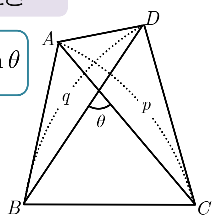


四角形に外心と内心があるとき(双心四角形)

$$S=\sqrt{abcd}$$

対角線の長さとなす角が与えられたとき

$$S=\frac{1}{2}pq\sin\theta$$



四角形の面積公式

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

θ は四角形の向かい合う内角の和