鳥瞰的思考による立体図形問題の解法

―――― 入試問題から見る発想転換法

札幌旭丘高校　中村文則

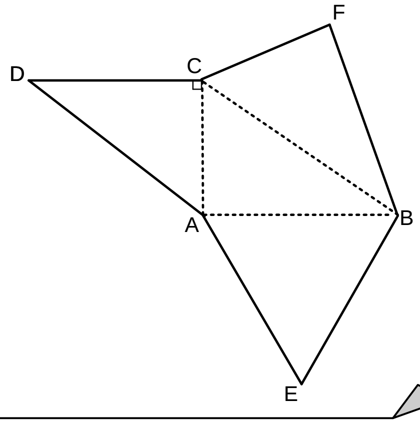
図はある三角錐Vの展開図である．

ここで，$AB=4,\ \ AC=3,\ \ BC=5,$

$\angle ACD=90°$

でΔABEは正三角形である．

このとき，Vの体積を求めよ．



○ はじめに

平成21年度の北海道大学の入試問題である．理系離れが進み，数理的な思考力の低下が指摘される中，一石を投じた問題ではなかったろうか．

ここ最近の生徒の空間認識力の低さは危機的状況であるかもしれない．ゲームの中のバーチャルな世界では，立体図形を自由自在に操る彼らも，現実世界になると途端，イメージを掴めなくなる．彼らにとって，イメージとしての図形もまた 3D であり，球は陰影のついた円に過ぎず，球の裏側とかその柔らかさといったものは想像することはできない．想像(創造)といった思考作業は，立体図形を作ったり，実際に触ったりした経験からイメージが発動するものであるが，彼らはその実体験に乏しいのである．

人間は，三次元に存在する生物の中で，もっとも視野が狭い種族ではないだろうか．

鳥は，飛ぶことができるから，上空から見下ろす見方(鳥瞰)ができる．昆虫は，飛べたり，あるいは土中に潜れたりするからさらに視野は広くなる．それに比べて人間だけが，地面という平面世界に縛りつけられている．よく，「しっかり大地に足をつけて」という言葉を耳にするが，これは，我々は飛ぶことのできないのだから，「不自由な存在であることをしっかりと認識して」その上で取り組めということかもしれない．

だから，人間は平面である2次元しか認識できないわけで，例えば，歩いていて前方に塀があっても，その塀がどんな風に「あるもの」を囲んでいるかは知ることはできない．目の前にある横に伸びた長方形の壁としか認識できず，その塀の周りをぐるっとまわり，初めて，塀の囲み方を理解する．遠巻きにまわって壁が徐々に長さが縮み，やがて棒状に見えたら真っ直ぐに伸びた塀ということになる．周りをまわっても長さが変わらないなら，ストーンサークルのような塀である．長さは変わるけど棒にならないのであれば，三角形状に囲ってあるのかもしれない．このように平面上をぐるりと歩いて，変化の状態からどうにかその囲み方が分かるわけで，それでも，その塀の内側にある肝心の「あるもの」は知る由もない(だから，塀の価値があるのだが)．

これが，鳥であったら，ひとっ飛びして，見下ろし塀の形と，その中の「あるもの」を認識してしまう．さらにはその「あるもの」に興味があるから，内に飛び込むことだってできるのである．それに比べると，なんと人間は不自由な生物ではないだろうか．三歩，歩いたら鳥は覚えていることを忘れるというけど，鳥瞰思考のできる鳥は膨大な情報量を得ることができるわけで，過去のことなどいちいち覚えていられないアグレッシブな生物なのである．過去に拘り，過去の少ない情報量を精査して活かそうとする人間の方がむしろ「鳥あたま」なのかもしれない．

さて，北大の問題に話を戻そう．この問題は従来の空間図形のそれとはアプローチを異にする．

一般に空間図形の問題は，与えられた立体図形を適当な平面で切って平面図形に落としてから考察をしていく．空間を認識できない人間の苦肉の策である．これに対して，北大の問題は，平面上で展開図を折り，空間内で三角錐を組み立てていくことから問題の考察が始まる．人間に鳥瞰的思考を要求しているのだ．

はたして鳥になれるかどうか，挑戦してみよう．

○ 問題の解答

解法 1)

始点を $A\left(\vec{0}\right)$ として，$B\left(\vec{b}\right),C\left(\vec{c}\right),D\left(\vec{d}\right)$ とすると，

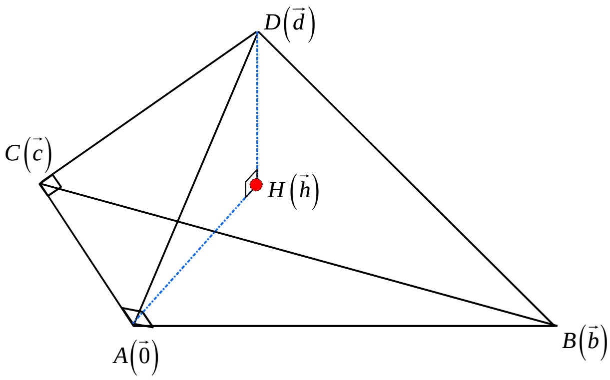
$$\left|\vec{b}\right|=4,\ \left|\vec{c}\right|=3,\left|\vec{d}\right|=4 \qquad \vec{b}\cdot\vec{c}=0,\quad \vec{b}\cdot\vec{d}=\left|\vec{b}\right|\left|\vec{d}\right|\cos 60^\circ=8,\quad \vec{c}\cdot\vec{d}=\left|\vec{c}\right|^2=9$$

である．四面体 $D-ABC$ の頂点 D から三角形 ABC を含む平面に下ろした垂線の足を H とし，

$$\overrightarrow{AH}=s\vec{b}+t\vec{c}$$

とおく．

$$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AD}=s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{d}$$



ここで，　$AB\perp DH$ より，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DH}=0$

$$\vec{b}\cdot\left(s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{d}\right)=0 \quad \text{より，}\ s\left|\vec{b}\right|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d}=0$$

$$\therefore\ 16s-8=0 \quad \text{より，}\ s=\frac{1}{2}$$

同様に，$AC\perp DH$ より，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DH}=0$

$$\vec{c}\cdot\left(s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{d}\right)=0 \quad \text{より，}\ s\vec{b}\cdot\vec{c}+t\left|\vec{c}\right|^2-\vec{c}\cdot\vec{d}=0$$

$$\therefore\ 9t-9=0 \quad \text{より}\quad t=1$$

これから，$\overrightarrow{DH}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}$

$$\left|\overrightarrow{DH}\right|^2=\frac{1}{4}\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+\left|\vec{d}\right|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{d}=3$$

よって，$DH=\sqrt{3}$

以上より，

$$\text{体積}V=\frac{1}{3}\times\Delta ABC\times DH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 4\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

飛べない人間が，図形を地面のある視点(始点)から眺めて，斜交座標に組み入れた解答である．原点を定めてから，x,y,z の 3 座標軸に相当する $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ および，各座標の目盛り幅(スケール)である $\left|\vec{a}\right|,\left|\vec{b}\right|,\left|\vec{c}\right|$ と，2 つの軸のなす角を表す内積 $\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{b}\cdot\vec{c},\ \vec{c}\cdot\vec{a}$ が与えられれば，ほとんどの空間図形は機械的に処理ができてしまう．だからこの解答の後半に得られる $s=\dfrac{1}{2}$ や $t=1$ が頂点 D の位置をどう表現しているかなどは無視してもいいことになる．

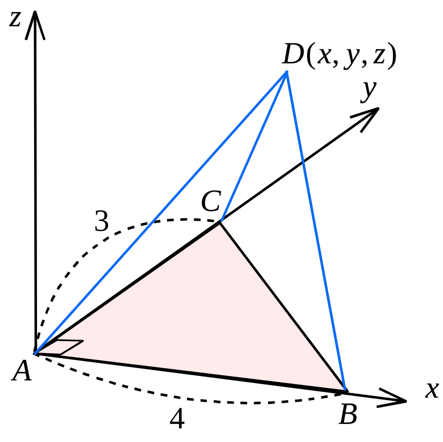
もう少し，空間的な視野にたってみよう．

解法 2)

三角錐を空間座標内におく．

$A(0,0,0)$ とし，頂点 B,C をそれぞれ x,y 軸上におくと，$B(4,0,0),\ C(0,3,0)$ である．

頂点 $D(x,y,z)$ $(z>0)$ とすると，



$DA=4$ より，　$x^2+y^2+z^2=16 \quad \cdots①$

$DB=4$ より，　$(x-4)^2+y^2+z^2=16 \quad \cdots②$

$DC^2=DA^2-DB^2=4^2-3^2=7$ より，

$x^2+(y-3)^2+z^2=7 \quad \cdots③$

①と②より，$x=2$，②と③より，$y=3$

①に代入して，$z=\sqrt{3}$　よって，三角錐 $D-ABC$ の高さは $h=\sqrt{3}$ である．

以上より，

$$V\text{ の体積}=\frac{1}{3}\times\Delta ABC\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4\times 3\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

斜交座標を直交座標に形を整えての解法である．結局はベクトルの成分計算であり，解法１と違いはない．
では，次に展開図から三角錐V を組み立てる過程をみることで，解法を考えてみよう．

解法３)

三角形ABC を底面とし，展開図を真上から見下ろす．

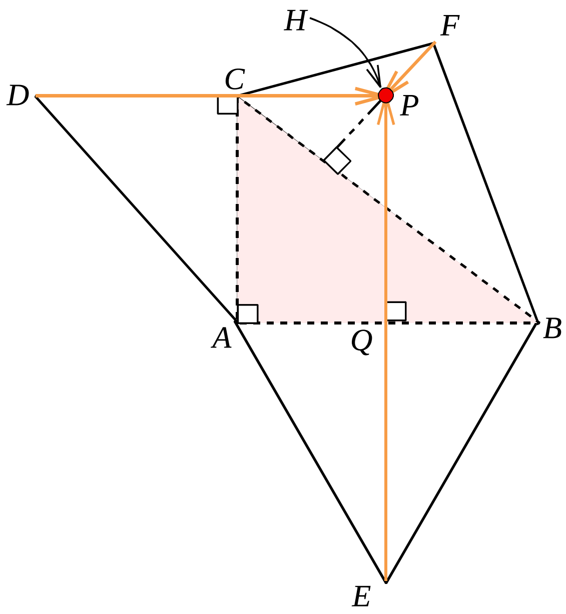
三角形AEB は正三角形より，辺AB を折り線にして谷折りすると点E の軌跡は辺AB の垂直二等分線に沿って動く．

三角形ACD は直角三角形より，辺CA を折り線にして谷折りすると点D の軌跡は，直線DC に沿って動く．

同様に，三角形BFC を，辺BC を折り線にして谷折りすると，点F の軌跡は辺BC に垂直に沿って動く．

この３点の軌跡は空間内では１点P $(P=D=E=F)$ で交わり，四面体の残りの頂点となる．

ここで点P から三角形ABC を含む平面上に下ろした垂線の足をH とすると，$AB \perp AC$ より，$DH \perp EH$ である．



EH とAB の交点をQ とすると，点Q はAB の中点より，

$$AQ=\frac{1}{2}AB=2$$

また，三角形ACD は，直角三角形より，

$$CD=\sqrt{AD^2-AC^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$$

よって，

$$PH^2=PC^2-CH^2=CD^2-AQ^2=\left(\sqrt{7}\right)^2-2^2=3$$

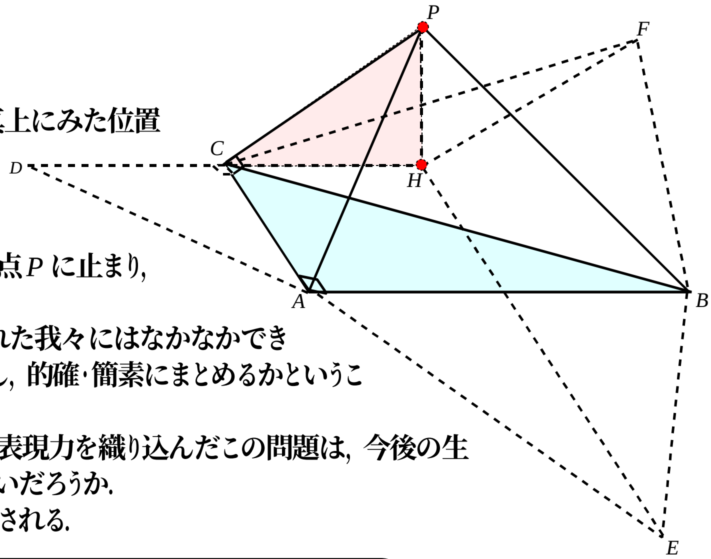
$$\therefore\quad PH=\sqrt{3}$$

以上より

$$V\text{の体積}=\frac{1}{3}\Delta ABC\cdot PH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot PH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times3\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

三平方の定理を使っただけの解法である．
しかし，解答者にとっては難しい発想の解法に思える．
展開図を三角形ABC を含む平面α (問題用紙)を真上にみた位置から折っていく過程を頭の中でイメージし，三角錐を組み立てたあとは，視点を平面α 上に移して辺AB に垂直な方向から図形を眺めることになる．

あたかも立体の上を飛んでいた鳥が，三角錐の頂点P に止まり，その後，平面α の上に降り立つようなものである．



こういった，鳥瞰的な思考は，平面(虫瞰)思考に慣れた我々にはなかなかできない．また，どう，そのイメージを解答として文章表現し，的確・簡素にまとめるかということになるとさらに厄介である．

単なる技術的な計算ではなく，発想・想像性そして表現力を織り込んだこの問題は，今後の生徒の数学力を量るひとつの目安となっていくのではないだろうか．

なお，この問題の解法ルーチンは，次の３点に集約される．

① 底面となる三角形を指定する．
② 残りの三角形を底面の三角形と共有する辺で折り，頂点を折り線の垂線上に移動させて，その交点を求める．
③ 三平方の定理により四面体の高さを求める．

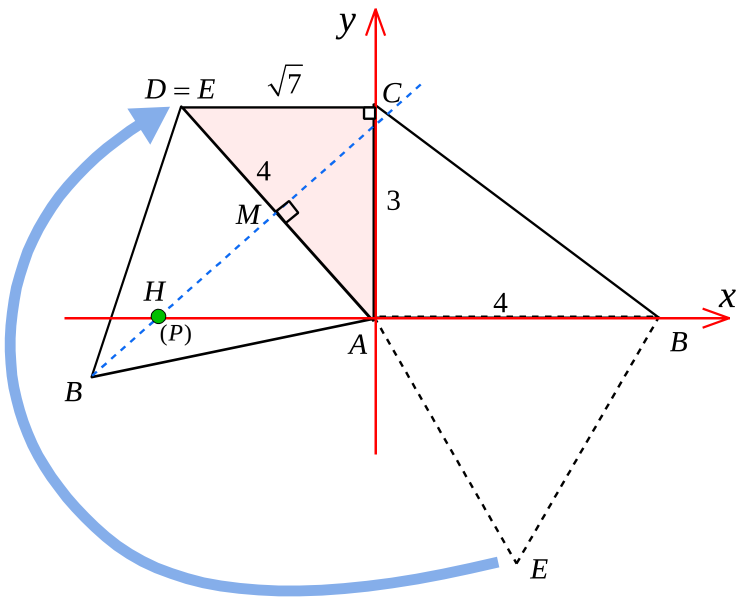
このルーチンにしたがうと，三角形ABC 以外の面である，三角形ACD または三角形AEB を底面としても同じように求めることが可能である．

なお，三角形BFC については，他の三角形に比べ底面とした場合の面積は求めにくので考える必要はないだろう．
四面体の形そのものは，３つの面，$\Delta ABC,\Delta AEB,\Delta ACD$ があればフタのない三角錐として定まってしまう．

解法 4)

三角形 ACD が底面となるように，三角形 AEB を，点 A を回転の中心として，辺 AE が辺 AD に重なるように回転させる．底面である三角形 ACD の頂点以外の三角錐の頂点を P とし，点 P から三角形 ACD を含む平面に下ろした垂線の足を H とする．

右図のように，x, y 軸をそれぞれ，AB, AC 上に設定すると，点 B から辺 AD に下ろした垂線(AD の垂直二等分線)と x 軸との交点が点 H である．



$D\left(-\sqrt{7},3\right)$ より，AD の中点は $M\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

また，$BM \perp AD$ で，ADの傾き $=-\dfrac{3}{\sqrt{7}}$ であるから，

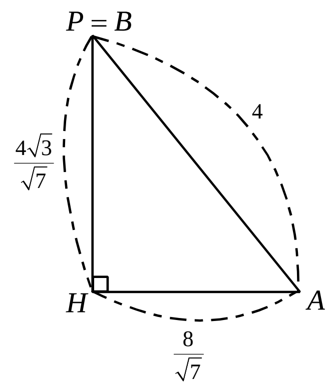
直線 BM の方程式は，

$$y=\frac{\sqrt{7}}{3}\left(x+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)+\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{7}}{3}x+\frac{8}{3}$$

$y=0$ とすると，$H\left(-\dfrac{8}{\sqrt{7}},0\right)$

$$\therefore\quad PH^2=AP^2-AH^2=AB^2-AH^2=4^2-\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2=\frac{48}{7}$$

$$\therefore\quad PH=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$



以上より，　V の体積 $=\dfrac{1}{3}PH\cdot\Delta ACD=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\times\dfrac{1}{2}\times3\times\sqrt{7}=2\sqrt{3}$

三角錐 $P-ACD$ と同様に，底面が三角形 AEB になるように，三角形 ACD を頂点 A のまわりに回転させ，三角錐 $P-AEB$ を作る．このとき，点 P から三角形 AEB を含む平面に下ろした垂線の足 H は，図において，点 C から辺 AE に下ろした垂線と y 軸との交点である．点 C から AE に下ろした垂線の足を M とすると，

$AM : ME = AC^2 : CE^2 = 9:7$　　より，

$M\left(\dfrac{9}{8},-\dfrac{9\sqrt{3}}{8}\right)$．　よって，直線 CM の方程式は，

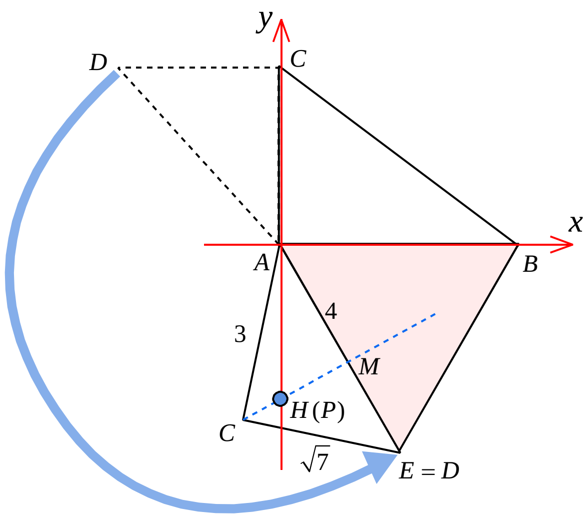
$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{9}{8}\right)-\frac{9\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$x=0$ とすると，$H\left(0,-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$　より，

$$PH^2=AP^2-AH^2=3^2-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

$$\therefore\quad PH=\frac{3}{2}$$

V の体積 $=\dfrac{1}{3}\cdot PH\cdot\Delta AEB=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$



さて，このように考えると，鳥瞰思考的であるこの解法も実は平面思考でまとめられてしまっている．平面座標上で，三角錐の展開図を見て解析幾何学的に2直線の交点を求めるだけというマニュアル的な解法で解けてしまうのである．

結局，どうあがいたって人は鳥にはなれないという悲しい結論である．

○ **鳥瞰思考の問題例**

図は三角錐$D-ABC$の展開図である．

ここで，四角形$ABCD$は，

$BC=20cm,\ \ CD=15cm,$

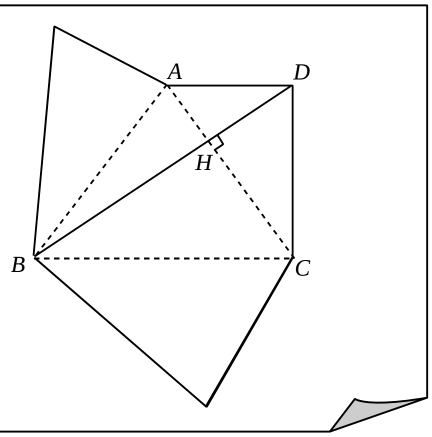
$AD//BC,\ \ \angle ADC=90^\circ$

である台形である．線分ACとBDの交点をHとし，

$\angle CHD=90^\circ$ **とする．また，この展開図を組み立てると，**

$\angle BHD=90^\circ$ **となる．**

三角錐$DABC$の体積を求めよ．



北海道の平成21年度高等学校入学者選抜学力検査問題の改題である．展開図を組み立てるという発想の問題が，高校と大学で同じ年度に出題された．

解答)

$\angle BCD=90^\circ$ であるから，直角三角形BCDにおいて，

$BD^2=BC^2+CD^2=625\quad BD>0$ より，$BD=25$

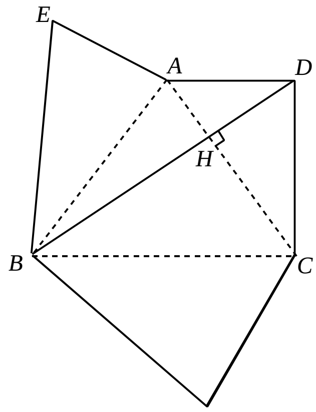
$\angle CHD=90^\circ$ より，　$\Delta BCD\backsim\Delta CHD$

$\therefore\ \ BD:CD=CD:DH$　より　$DH=\dfrac{CD^2}{BD}=9$

$\angle BHD=90^\circ$ より，DH は，三角形ABCを底面としたとき三角錐の高さである．

以上より　三角錐$DABC$の体積Vは，

$$V=\frac{1}{3}DH\cdot\Delta ABC=\frac{1}{3}DH\times\frac{1}{2}BC\cdot CD=\frac{1}{3}\times9\times\frac{1}{2}\times20\times15=450\ \left(cm^2\right)$$



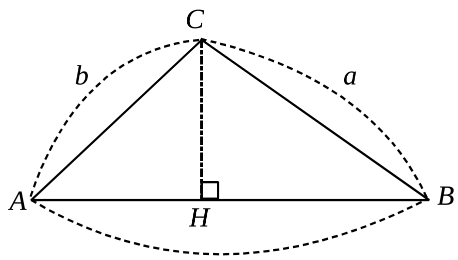
中学生への問題だから，条件設定が詳しく与えられており，かつ展開図で示された頂点はA,B,C,Dのみである．他の面は無視していいことが予想できるし，問題としては難しくはない．しかしながら，展開図から組み立てがすんなりできるかは疑問である．例えは，頂点Eを図のように与え，BEの長さを要求したら，意外とできないような気もする．

なお，鳥瞰的思考法で，展開図を真上から見下ろし，底面の三角形の各辺を折り線にして，他の面の三角形を折るとき，その頂点は，折り線に垂直に移動する．したがって，頂点から線分に下ろした垂線の性質が用いられることから，次のことを知っておくといいだろう．

三角形ABCにおいて，頂点Cから対辺またはその延長線上に下ろした垂線の足をHとする．　$BC=a,CA=b,AB=c$ とするとき，

$AH:HB=\left|b^2+c^2-a^2\right|:\left|c^2+a^2-b^2\right|$

である．



$$\begin{aligned}AH:HB&=AC\left|\cos\angle CAB\right|:BC\left|\cos\angle CBA\right|\\&=b\left|\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right|:a\left|\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right|\\&=\left|b^2+c^2-a^2\right|:\left|c^2+a^2-b^2\right|\end{aligned}$$

特に，$\angle ACB=90^\circ$ であるときは，$a^2+b^2=c^2$ より，

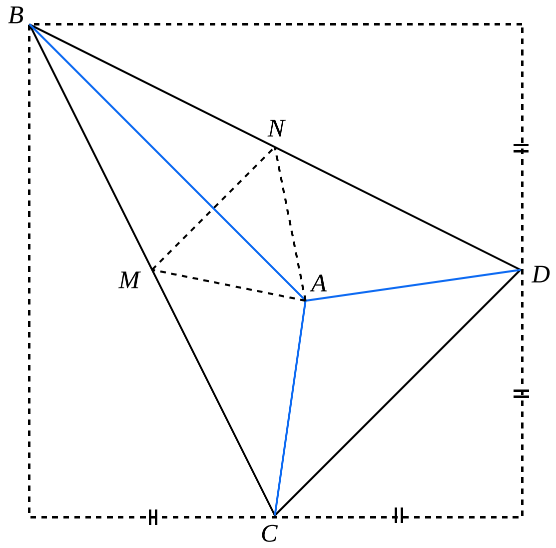
$AH:HB=\left|b^2+(a^2+b^2)-a^2\right|:\left|(a^2+b^2)+a^2-b^2\right|=b^2:a^2$

これから，上述の問題では，　$BH:HD=BC^2:CD^2=20^2:15^2=16:9$　となる．

右の図は，1 辺の長さが $4cm$ の正方形の紙を $BC,\ CD,\ DB$ を折り曲げて三角錐 $A-BCD$ を作ったものである．また，M,N はそれぞれ辺 $BC,\ BD$ の中点として，次の各問いに答えなさい．

(1)　$\triangle BCD$ の面積を求めなさい．

(2)　三角錐を面 AMN で切って 2 つの立体に分けたとき，小さい方の体積を求めよ．

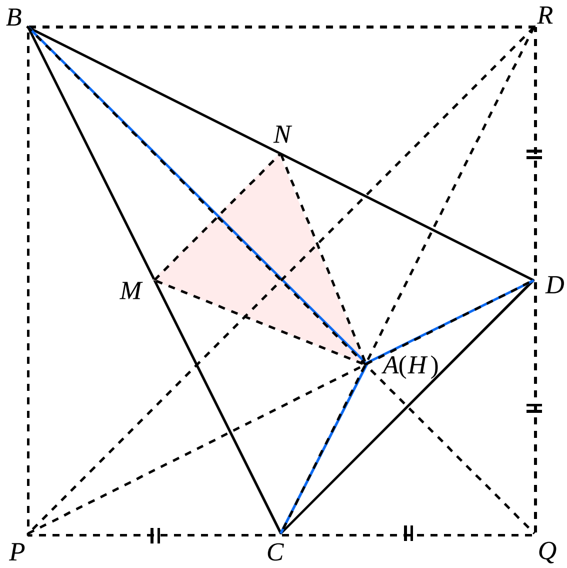


本問題は，中学の模試で出題された．1枚の正方形から折り紙を折るように三角錐を作り出す面白い問題である．この問題も，完成する三角錐のイメージは掴み難い．鳥瞰的思考法で解いてみよう．

解)

(1) 正方形の面積から，$\triangle BPC, \triangle CQD, \triangle DRB$ の面積を引く．

$$\triangle BCD = 4^2 - \left(2\times\frac{1}{2}\times2\times4+\frac{1}{2}\times2\times2\right) = 6(cm^2)$$



(2) 正方形 $BPQR$ を，底面を三角形 BCD とし，その各辺を折り線にして，残りの3つの三角形を折る．底面の三角形 BCD の真上から図形をみると，頂点 A は，三角形 PQR の重心である．

頂点 A から三角形 BCD に下ろした垂線の足を H とすると，

$$CR^2 = CQ^2 + QR^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \qquad \therefore\quad CR = 2\sqrt{5}$$

$$RH : HC = 2:1 \text{ より} \quad CH = \frac{1}{3}RC = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = CP^2 - CH^2 = 2^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

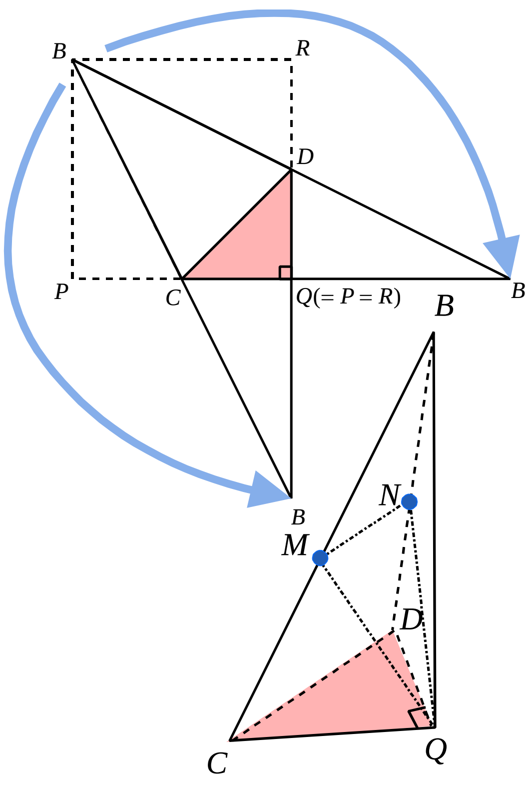
$\therefore\quad AH = \dfrac{4}{3}$　　よって，三角錐の体積 V は，

$$V = \frac{1}{3}AH\cdot\triangle BCD = \frac{1}{3}\times\frac{4}{3}\times6 = \frac{8}{3}\ (cm^3)$$

三角錐を面 AMN で切ったときの小さいほうの三角錐 $A-BMN$ と三角錐 $A-BCD$ は，AH を共通の高さとするから，底面の面積比が体積比に一致する．

M,N は BC,BD の中点より，$\triangle BMN : \triangle BCD = 1:2^2 = 1:4$

よって，　三角錐 $A-BMN$ の体積 $= \dfrac{1}{4}V = \dfrac{2}{3}\ (cm^3)$



ただ，これは頭の上に糞を落とされかねない解答である．自由に飛べる鳥は人間族をあざ笑うかのように，建物の高所に留まろうとするだろう．三角形 CQD を底面とみて組み立ててみよう．三角形 PCB および三角形 RDB をそれぞれ，点 C,D のまわりに回転すると，BQ が三角錐 $B-CQD$ の高さになるのは明らかである．$BQ = PQ = 4$ より，

三角錐 $B-CQD$ の体積 V' は，

$$V' = \frac{1}{3}\triangle CQD\cdot BQ = \frac{1}{3}\times2\times2\times\frac{1}{2}\times4 = \frac{8}{3}$$

次に底面を三角形 BCD に移すと，$\triangle BMN : \triangle BCD = 1:4$ より，

三角錐 $B-CQD$ の体積 $= \dfrac{1}{4}V' = \dfrac{2}{3}$

四面体$OABC$ は

$$OA=3,\ OB=4,\ OC=5 \quad \textbf{および} \quad \angle AOB=\angle AOC=45^\circ, \angle BOC=60^\circ$$

を満たす．このとき四面体$OABC$ の体積を求めよ．

2009年，第19回日本数学オリンピック予選問題である．
四面体の求積問題であり，与えられている条件は，辺OA, OB, OC の長さと，各2辺のなす角であるから，O を原点とし，OA, OB, OC を基本ベクトルとすれば，空間に斜交座標が張れる．

$O\left(\vec{0}\right), A\left(\vec{a}\right), B\left(\vec{b}\right), C\left(\vec{c}\right)$とすると，

$$\left|\vec{a}\right|=3,\ \left|\vec{b}\right|=4,\ \left|\vec{c}\right|=5,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=6\sqrt{2},\ \vec{b}\cdot\vec{c}=10,\ \ \vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{15\sqrt{2}}{2}$$

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと，$\overrightarrow{CH}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$
$CH\perp OA,\ CH\perp OB$ より，それぞれ，

$$3\sqrt{2}s+4t=5,\ 3\sqrt{2}s+8t=5$$

を得る．2式より，$s=\dfrac{5}{3\sqrt{2}}$，$t=0$ である．よって，

$$CH=\left|\frac{5}{3\sqrt{2}}\vec{a}-\vec{c}\right|=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta OAB=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}=3\sqrt{2}$$

これから，四面体$OABC$ の体積V は，

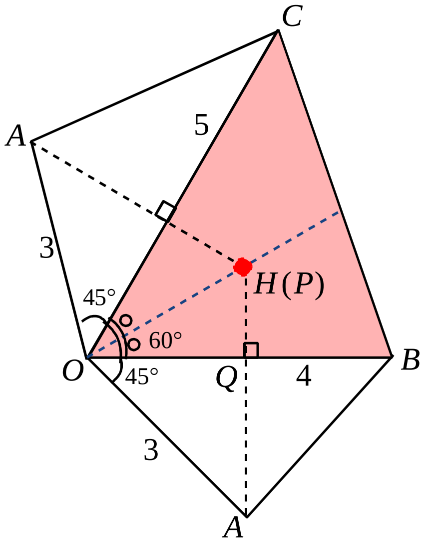
$$V=\frac{1}{3}\Delta OAB\cdot CH=\frac{1}{3}\times3\sqrt{2}\times\frac{5}{\sqrt{2}}=5$$

ベクトルによる解法は，思考法をすべて排除し，技術的計算のみで導くことを可能とする．したがって，図を書く必要すらなくなってしまい，図の中に隠れている性質は埋もれてしまう．これは，数学オリンピックの解答者層を考慮すると，出題者が意図することではけっしてないだろう．

解答)
底面をΔOBC として，三角錐$P-OBC$ の展開図を考える(展開図では$P=A$)．
展開図の三角形OAC，三角形OAB の各頂点A から辺OB, OC へそれぞれ垂線を引き，その交点をH とする．

$$\angle AOB=\angle AOC=45^\circ$$

より，OH は$\angle BOC$ の二等分線である．
OB とAH との交点をQ とすると，



$$OA:OQ=\sqrt{2}:1 \quad \text{より，}\ OQ=\frac{1}{\sqrt{2}}OA=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

また，$\angle BOH=30^\circ$ であるから，

$$OQ:OH=\sqrt{3}:2 \text{ より，}\ OH=\frac{2}{\sqrt{3}}OQ=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$$

点H は，四面体の頂点P から底面に下ろした垂線の足であるから

$$\therefore\ PH^2=OP^2-OH^2=3^2-\left(\sqrt{6}\right)^2=3 \qquad \therefore PH=\sqrt{3}$$

また，三角形OBC のOB を底辺とする高さh は，$\angle COB=60^\circ$ であることより，

$$h=OC\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore\ \Delta OBC=\frac{1}{2}hOB=\frac{1}{2}\times\frac{5\sqrt{3}}{2}\times4=5\sqrt{3}$$

以上より，三角錐$P-OBC$ の体積V は，

$$V=\frac{1}{3}AH\cdot\Delta OBC=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times5\sqrt{3}=5$$

この四面体の底面を他の面に変えるとどうなるだろう．
底面が三角形OCA になるように，三角形OBA を点O のまわりに回転させて展開図を作る．

三角形OABの点Bから辺OAに下ろした垂線の足をHとすると，$OH=2\sqrt{2}$．
また，三角形OBCの点BからOCに下ろした垂線の足をQとすると，$OQ=2$

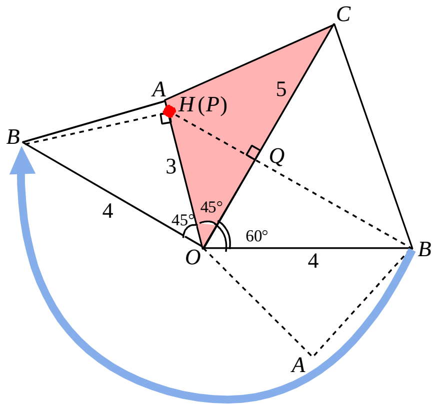
$$OH:OQ=2\sqrt{2}:2=\sqrt{2}:1$$

$\angle AOQ=45°$より，点HはBQの延長上の点である．
よって，点Hは三角錐$P-AOC$の頂点Pから底面に下ろした垂線の足である．

$$PH^2=OB^2-OH^2=4^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2=8 \qquad \therefore PH=2\sqrt{2}$$

以上より，体積Vは，

$$V=\frac{1}{3}PH\cdot\Delta AOC=\frac{1}{3}\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{1}{\sqrt{2}}=5$$



○ おわりに

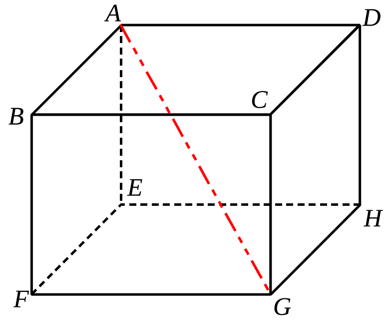
20世紀ミレニアムの8月，第9回数学教育世界会議ICME9が日本で開催された．千葉幕張メッセでの開会式では，森首相，クリントン大統領のライブメッセージが大型スクリーンで紹介され，ICME9 に寄せる期待と規模の大きさに誰もが感銘を受けたものである．同会場では，同時通訳による記念講演も開催され，著名な数学者の話に会場は熱気に包まれた．世界的建築家ガウディを生んだスペインからは，数学者C.アルシナ氏が招聘された．講演タイトルは

「あなたの授業のためのガウディのアイディア：３次元空間に生きる市民のための幾何学」

アルシナ氏は，ガウディの建築様式を分析することで，幾何学習は系統的に次元を拡張するのではなく，立体の内に入ったり，遊んだりする中に創造的に空間を認識する力を養うべきであると説いた．

講演の中で，聴講者に問いかけた問題．

右図の直方体$ABCD-EFGH$の対角線AGの長さを求めよ．



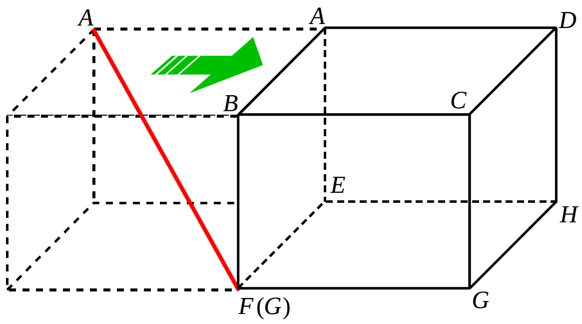
誰もが，AB,BC,CGの長さを計り，

$$AB^2+BC^2+CG^2$$

を計算するという答えを期待したが，氏の解答は，

直方体をずらし，右図のAFのみを計ればよい

というものであった．計測は１回で面倒な平方根を求める必要もない．直方体は床に固定されていて，線分AGは間接的にしか計測できないという凝り固まった思い込みに，氏は警鐘を鳴らした．そして氏は，幾何学習のキーワードとして「空間文化」に向かう」ことを提唱する．



三次元におけるビジュアルな思考，それは空間文化のキーポイントであるが，その思考は学年の初期に限定されるべきではなく，すべてのレベルに於いてその方向に向けられなければならない．

空間についての常識を持つ事は，必ずしも先天的な能力ではないので，啓発し発展させなければならない．

空間文化は，数学の教室における研究心を促進させる機会を提供する

氏は講演の最後に，

次元は３つではなく「時間」「色」「感情」といったものも含め，少なくとも９次元は考えるべきである

と述べ締めくくり，万雷の拍手を浴びた．この頃，日本では紙を折ることで数理的現象の研究をするオリガミクスが花盛りであった．折って畳まれたものを膨らませて折鶴のように形を作る発想・技術は日本独自のものである．目や手を使いながら折り紙で数学を学ぶことのできるオリガミクスは新鮮な驚きで迎えられ，数実研でも，第一人者である加藤渾一先生により，多くの研究成果，話題が提供された．ミレニアム時代，間違いなく本道の数学教員の折り紙のスキルは，日本のトップレベルにあったといっていい．オリガミクスは，まさに空間文化の9次元の中に含まれていたものである．しかし，時代はゆとり教育がじわじわと現場を侵食し，生徒の心象風景は枯渇していった．その萎えた想像・創造力を育てるために，オリガミクスを始めとして，種々の次元の活用が今こそ求められているのではないだろうか．

ところで北大の受験生は，例の図形問題を何次元で考察したのだろうか．もし実際に問題用紙から展開図を切り取り，三角錐を組み立て，遊ぼうとした受験生がいたならば，技術立国としての日本の未来は，少しは明るいものといえるかも知れない．

※本レポートの問題および解答については，札幌旭丘高校の中島先生より資料提供・アドヴァイスをいただきました．