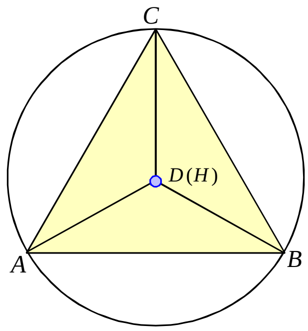
正四面体と正四面体に接する球の関係

1．正四面体の体積



正四面体 $D-ABC$ は，面である１つの正三角形 ABC を含む平面に垂直な方向から眺めると，頂点 D は，正三角形 ABC の外接円の中心に重なる点に位置する．

すなわち頂点 D から正三角形 ABC に下ろした垂線の足 H が外心であり，このことは次のように示される．

ΔDAH および ΔDBH は直角三角形であるから，$DA=DB$ より，$\Delta DAH \equiv \Delta DBH$

$\therefore HA=HB$

$DA=DB=DC$ であることより，同様に ΔDCH についても考えると，

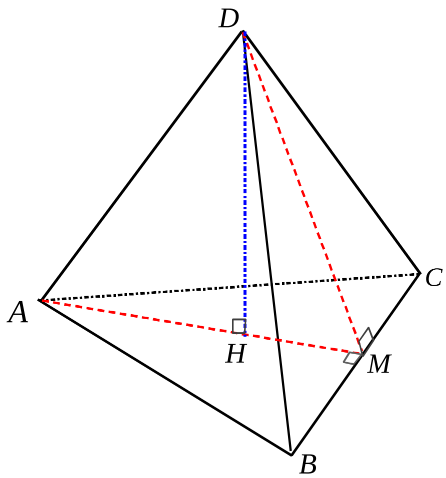
$HA=HB=HC$

以上より，点 H は三角形 ABC の外心である．

ここで，正三角形の外心と重心は一致するから，直線 AH と辺 BC との交点を M とすると，

$AH:HM=2:1$

である．このことを用いて正四面体の体積は次のように求められる．



$AB:BM:AM=2:1:\sqrt{3}$ より，　$AM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$AH:HM=2:1$　より，$AH=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

これより，

$DH^2=DA^2-AH^2=\dfrac{2}{3}a^2$　　$\therefore$　$DH=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

以上より，正四面体の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\Delta ABC\cdot HD=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AM\cdot HD=\frac{1}{6}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

1 辺の長さ a の正四面体の体積は　$\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

2．頂点から底面に下ろした垂線の交点

頂点 A とその対面である ΔBCD の重心 K を結ぶ線分との交点を O とするとき，点 O の線分 DH 上の位置を求めてみよう．

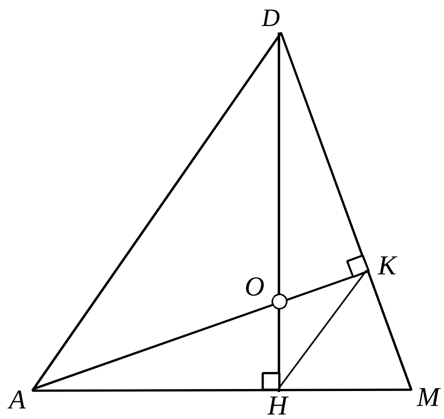
$AH:HM=2:1$ より，$MD:MK=MA:MH=3:1$

よって，$DA//KH$ より，$\Delta ODA \backsim \Delta OHK$

$DA=3KH$ より，　$DO:OH=DA:HK=3:1$

これは，正四面体の4つの頂点と，それぞれの対面の三角形の重心を結ぶ線分は，1 点で交わることを示しており，このことは任意の四面体においても成立する．

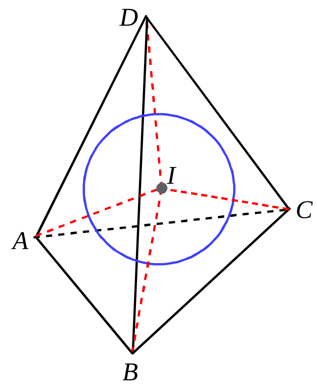
この共点 O を四面体の重心という．重心は四面体が一様な密度の物質でできているときの質量中心である．したがって，四面体が点 O によって分けられる4つの四面体 $OABC, OBCD, OCDA, ODAB$ の体積は等しい．



正四面体の各頂点とその対面の重心を結ぶ線分は１点で交わり， 線分を３：１の比に分ける

そして，この共点 O は，正四面体を頂点 D から三角形 ABC に垂直な方向で見下ろしたとき，DH 上に球の中心があることより，正四面体に内接する球，辺で接する球，外接する球の中心に一致する．

3．正四面体の体積より内接球の半径を求める



四面体の内接球の中心(内心)をIとするとき，Iから4面の三角形に下ろした垂線の長さは内接球の半径r_Iに一致する.

よって，4面の三角形の面積をそれぞれ，S_1, S_2, S_3, S_4とすると，四面体の体積Vは，

$$V=\frac{1}{3}r_I S_1+\frac{1}{3}r_I S_2+\frac{1}{3}r_I S_3+\frac{1}{3}r_I S_4=\frac{1}{3}r_I(S_1+S_2+S_3+S_4)$$

$S=S_1+S_2+S_3+S_4$は，四面体の表面積であるから，

$$V=\frac{1}{3}r_I S$$

で得られる．正四面体の場合は，4面は合同な正三角形であるから，$S=4\Delta ABC$である.

ここで，$\Delta ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$であること用いると，四面体の体積比較により，内接球の半径を求めることができる.

$$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{4}{3}r_I\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

これより，$r_I=\frac{\sqrt{6}}{12}a$である.

> 正四面体の体積Vは，内接球の半径をr_Iとすると，
>
> $$V=\frac{4}{3}r_I\Delta ABC$$
>
> である.

4．正四面体の切り口から得られる性質

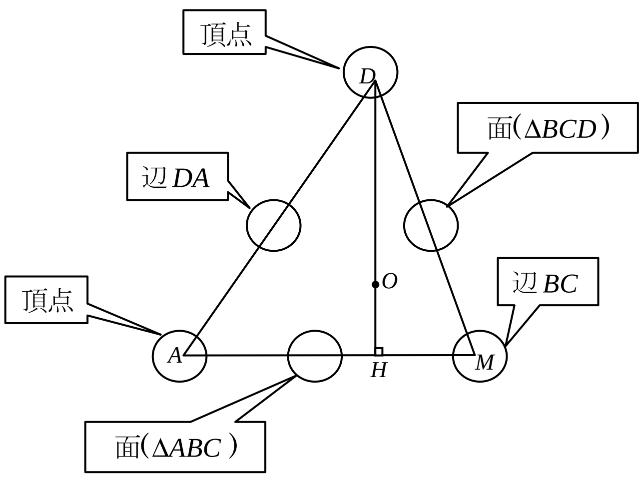
正四面体を頂点Dとその対面である正三角形ABCの中線AMを通る平面αで切ると，切り口は図の二等辺三角形DAMになる．このとき，正四面体の重心Oは，ΔDAMの垂心である.

いま，点Oを中心として球(円に見える，大円である)を膨らませていくと，内接球，辺に接する球，外接球ができあがる．すなわち点Oは3つの球に共通の中心ということになる．では，それぞれの球は右図のどの場所で接するだろうか.

ここで，平面αに対して垂直な方向で正四面体をみるとき，二等辺三角形DAMが見えるが，その点や辺は見かけ上のものであり，実際には違っていることがある場合に留意しよう.

例えばMは，B,M,Cが一直線上に並んでするものを直線に対して垂直にみているため点Mだけが見えている.

AMは，ΔABCを含む平面を真横から見るために線分に見えている.



残りの見かけ上の点や辺についても，もとの正四面体から見えるものとして眺めてみると，図のようになる.

内接，辺接，外接する球の中心はDHを$3:1$の比に内分した点Oであった．そこで，点Oを中心として球を膨らませてみよう．そうすると最初に球が接するのは，面である．次に接するのは辺である．そして最後には頂点を通る大きさに膨らむことが分かる.

内接，辺接，外接する場所をまとめると，次のようになる.

内接する	⇒	面と接する	⇒	$MD(\Delta BCD)$，$AM(\Delta ABC)$
辺に接する	⇒	辺と接する	⇒	$M(BC)$，AD
外接する	⇒	頂点と交わる	⇒	D，A

このことから，内接，辺接，外接する球のそれぞれの半径r_I，r_E，r_Oは，中心Oから，面，辺，頂点までの距離で与えられることになる.

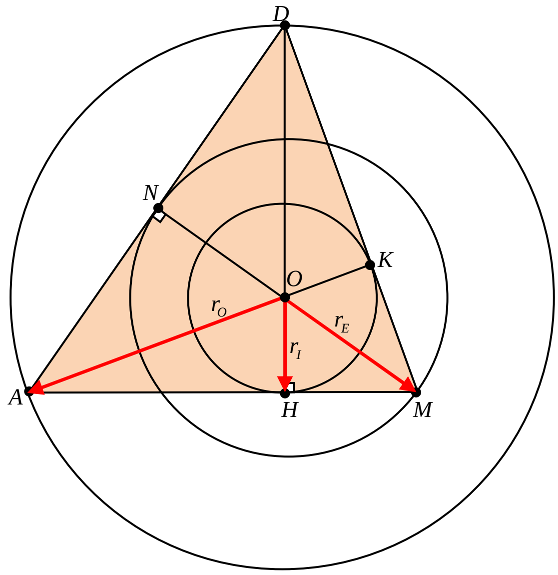
○内接球の半径

半径r_Iは点OからΔABCおよびΔBCDを含む平面までの距離より，OH, HK である.

$$DH = \frac{\sqrt{6}}{3}a \text{ ,} \quad DO : OH = 3 : 1$$

以上より，

$$r_I = OH = \frac{1}{4}DH = \frac{\sqrt{6}}{12}a$$



○辺に接する球の半径

半径r_Eは，辺DAおよび辺$BC(M)$までの距離より，ON, OM である. すなわち，MN は辺に接する球の直径ということになる. このことを示してみよう.

点Nは辺ADの中点である（辺に接する球の接点は，正四面体の6つの辺それぞれの中点）. $\therefore DN : NA = 1 : 1$
また，点Hは三角形ABCの重心であるから，

$AH : HM = 2 : 1$

ここで，三角形DAHにおいてメネラウスの定理を用いると，

$$\frac{MO}{ON} \cdot \frac{ND}{DA} \cdot \frac{AH}{HM} = 1 \quad \text{より，} \quad \frac{MO}{ON} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = 1$$

$\therefore$ $OM : ON = 1 : 1$から，$OM = ON$ である.

さて，$MN^2 = MA^2 - AN^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{2}a^2 \quad \therefore \quad MN = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

以上より，$r_E = OM = \frac{1}{2}MN = \frac{\sqrt{2}}{4}a$

○外接球の半径

半径r_Oは，点Oから頂点，D, Aまでの距離である.

$DO : OH = 3 : 1$

以上より，

$$r_O = DO = \frac{3}{4}DH = \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

○内接・辺接す・外接する球の半径の関係

正四面体の内接球，辺で接する球，外接球の半径をそれぞれ，r_I, r_E, r_O とするとき， $r_I = \frac{\sqrt{6}}{12}a$, $r_E = \frac{\sqrt{2}}{4}a$, $r_O = \frac{\sqrt{6}}{4}a$

ここで，接する3つの球の半径を比較してみると，

$$r_I : r_E : r_O = \frac{\sqrt{6}}{12} : \frac{\sqrt{2}}{4} : \frac{\sqrt{6}}{4} = 1 : \sqrt{3} : 3$$

すなわち，内接球から半径を$\sqrt{3}$倍する毎に，辺に接する球，外接球が得られることになる.

正四面体の内接球，辺で接する球，外接球の半径をそれぞれ，r_I, r_E, r_O とするとき， $r_I : r_E : r_O = 1 : \sqrt{3} : 3$

4．立方体から四面体を切り出す

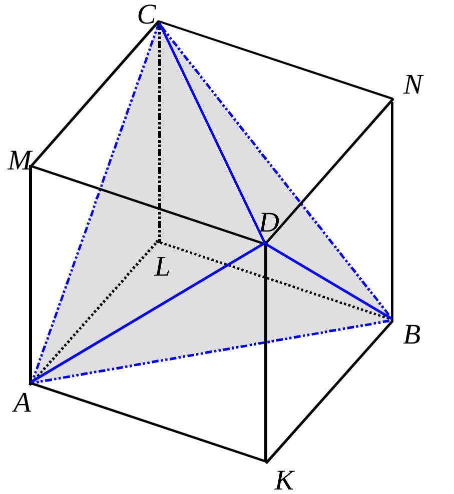
立方体の６つの面である正方形の対角線を結ぶことにより，立方体から正四面体を切り出すことができる．

立方体から四面体以外の図形を切り落としていくと，合同な４つの四面体ができる．そのひとつは右図の四面体 $AKBD$ であり，その体積 V_2 は，立方体の体積を V_1 とすると，

$$V_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}V_1$$

である．したがって，四面体の体積 V は

$$V=V_1-4V_2=V_1-4\times\frac{1}{6}V_1=\frac{1}{3}V_1$$

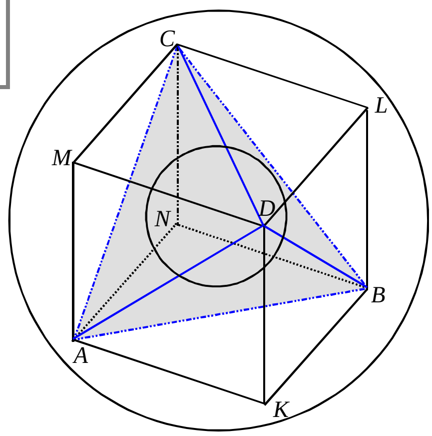


四面体の１辺の長さを a とすると，立方体の１辺の長さは $\frac{1}{\sqrt{2}}a$ より，

$$V=\frac{1}{3}V_1=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

である．

> 立方体の面である正方形の対角線を１辺とする正四面体の体積は、立方体の体積の $\frac{1}{3}$ である。



この立方体を用いて，正四面体に頂点，辺，面で接する球のそれぞれの半径 r_O, r_E, r_I を求めてみよう．

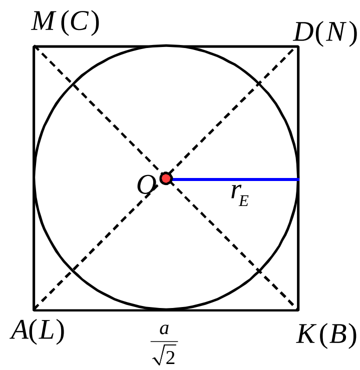
立方体の頂点は正四面体の頂点をすべて共有することより，四面体の外接球は立方体の外接球である．
半径 r_O は立方体の対角線であるから，

$$r_O=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}a=\frac{\sqrt{6}}{4}a$$

である．

球面が正四面体の辺に接するとき，その辺は，立方体の面である正方形の対角線である．よって，球面は立方体の面である正方形に内接する．
したがって，半径 r_E は立方体の１辺の長さの半分である．

$$r_E=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}a=\frac{\sqrt{2}}{4}a$$



右図のように，立方体を正方形である面に対して垂直にみると，辺に接する状態を見ることができる．

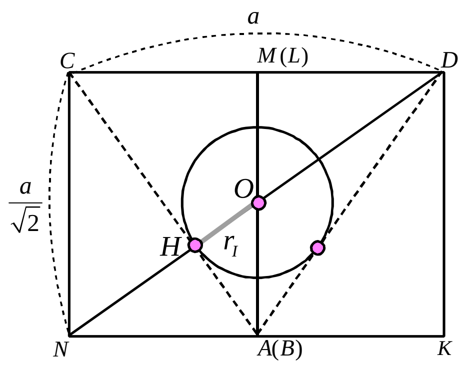
また，面 $CNKD$ に垂直な方向で立方体を見ると，四面体に内接する球の状態が分かる．図の OH の長さが内接球の半径 r_I である．

$$ND^2=NC^2+CD^2=\frac{a^2}{2}+a^2=\frac{3a^2}{2}$$

$$\therefore\quad ND=\frac{\sqrt{6}}{2}a$$

ここで，$CN:ON=2:1$ より

$$r_I=\frac{1}{3}ON=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ND=\frac{1}{6}\times\frac{\sqrt{6}}{2}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a$$



※本編は，レポート「立体図形により空間の彩り」を高校生配付用に編集したものである（札幌旭丘高校　中村文則）