

メイクる数学

～ 数学を make-up! しよう

札幌旭丘高校 中村文則

本時のメニュー

ボディパラで不等式を解こう

レシピ

【材 料】 本時で使用する素材(食材)

生徒または教師のからだ
モップのような長い棒
照れ笑いと勇気を小さじ少々

ペンダントを下げておく
ちょっとした演出が生徒
を引き付ける

【下ごしらえ】

簡単な準備体操と、「ボディパラ(BodyPara)」の説明

～まずはボディパラの復習だ！～

放物線の平行移動で学習したボディパラ覚えているかな。

みんなの周りにある放物線でもっとも身近なものは腕を伸ばした体の姿勢にあるってことだったよね。体(Body)を使って放物線(Parabola)を表現することをボディパラ(BodyPara)って名づけたわけだ。相手を受け入れるときに両腕が放物線を形作るのは、相手の愛情のようなエネルギーを受け止めて集めているわけで、これが放物線の大事な性質であり、エネルギーの集まる位置を焦点といったね。

まあっ、放物線の「こころ」ってことだけど、ところでもうひとつ放物線には「こころ」があることをみんなは知っているかな。分かる人……

はい、くん、そう、そのとおり、頂点です。

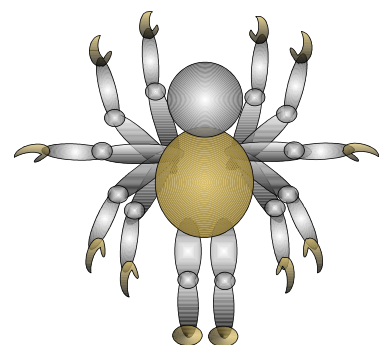
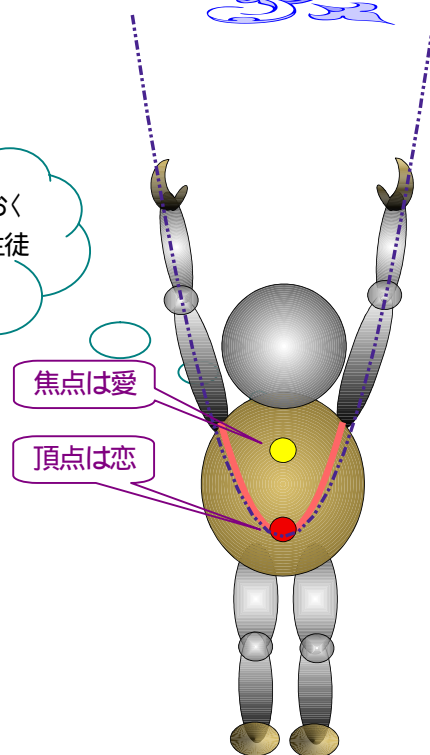
下に凸の放物線では、焦点という心はボディパラでは胸の位置、全体の真ん中あたりにある。これをラブラブに例えるならば、このこころは「愛」になる。何故って？、愛の漢字の「つくり」で「心」の位置をみてごらん。分かっただろ。これに対して頂点の方は放物線の下に位置に心があるから、漢字に当てはめると「恋」になるね。だから放物線には恋と愛(恋愛)があり、ボディパラで放物線を表現することは、恋愛術にも通じるものなんだ。みんなは、頂点で放物線の平行移動・対称移動などの性質を導いたわけだからこれは恋し方を学んでいたことになる。放物線をさらに勉強していくと、焦点でもその性質を調べることができるようになる。恋が愛に変わるってことかな。

ちなみに、愛と恋はその心の位置から、「愛は真心」(真ん中のある心)、「恋は下心」ともいうみたいだけど、……(この部分は教室の雰囲気、生徒の許容度を勘案して適宜レシピに付け加えてみよう)

このボディパラを使って本時は2次不等式の解を表現することを考えよう。

まずはからだを慣らすためにボディパラ準備体操。

オイッチ、ニー、サン。腕を高く挙げて ……<体で放物線をメイクるレシピ参照>



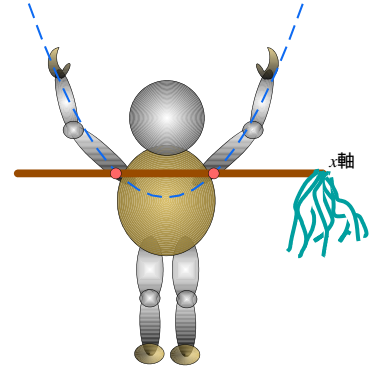
【調 理】

【解をイメージする】

不等式の解は、グラフ化することで視覚的に捉えることができることを指導する。

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \text{ (x軸)} \end{cases} \quad f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y > 0 \text{ (x軸上方)} \end{cases}$$

方程式 $f(x) = 0$ の解は、関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸との共有点、不等式 $f(x) > 0$ の解は、関数 $y = f(x)$ のグラフで x 軸上方にある部分の範囲として視覚化できることを確認しよう。



【2次方程式の解をボディパラ】

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) のグラフを、腕を伸ばしてボディパラしよう。

x 軸はモップのような長い棒で見立て、肩の線に合わせてモップを置く(担ぐ、あるいは持つ、持たせる)。

このとき、 x 軸と放物線の交点は、腕の付け根の位置にある。この部分が方程式の解である。

腕の付け根 x 軸との交点

このことをしっかり意識付けしよう。

【2次不等式の解をボディパラ】

不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) の解を表現してみよう。

$f(x) = ax^2 + bx + c$ のグラフをボディパラする。 $f(x) > 0$ であるから、

この範囲にある x の値を示すために、両手に x と書いた紙を持つ。(x と書いてある小旗を持つともっと効果的)。 x 軸(モップ)上方にある x の値を x 軸上に表すために、腕をゆっくりと下ろし、両手でモップを掴むようにする。

右下図の形になるようにモップをもつ。

さて、ここで重要事項の確認。

$f(x) > 0$ である x をみると、 x 軸上での範囲は、右腕と左腕の2つのパーツに分かれているということ。

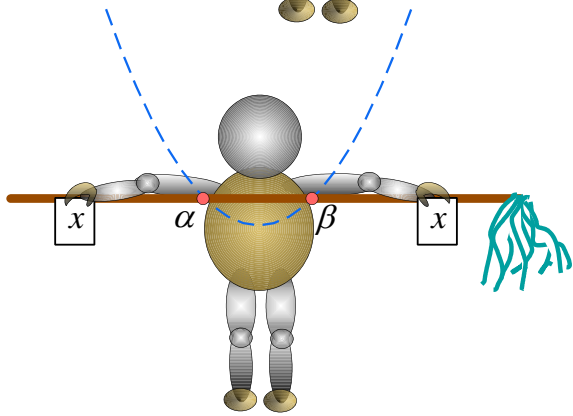
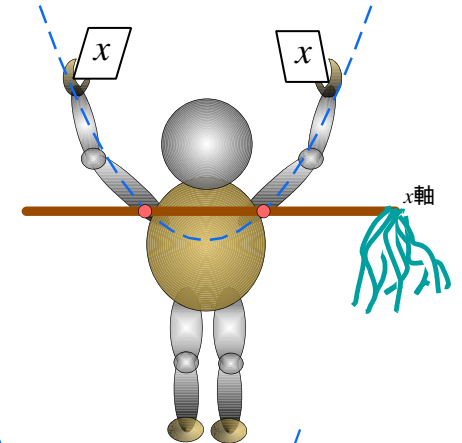
腕の付け根の値を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、

付け根 α の左側、付け根 β の右側となる。

(本当は生徒に背を向けてモップを担ぐと左腕の付け根 α の左側、右腕の付け根 β の右側であり、分かりやすいけど、生徒とはいつも目を合わせていたい)

この2つのパーツの範囲を式で表そう。

腕の付け根 α の左側のパーツ $x < \alpha$
腕の付け根 β の右側のパーツ $\beta < x$



今度は 不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ の解を表現する。

ここで、 x 軸はモップに替えて黒板に書くことにする。そろそろモップを持っているのは疲れたとでもいえばよい。肩の高さあたりに x 軸を引く。

グラフで $y < 0$ である部分は、 x 軸の下方だから、この部分の放物線を両手を組んで形作る。両手の位置は頂点、すなわち、恋の心になることを確認しよう。

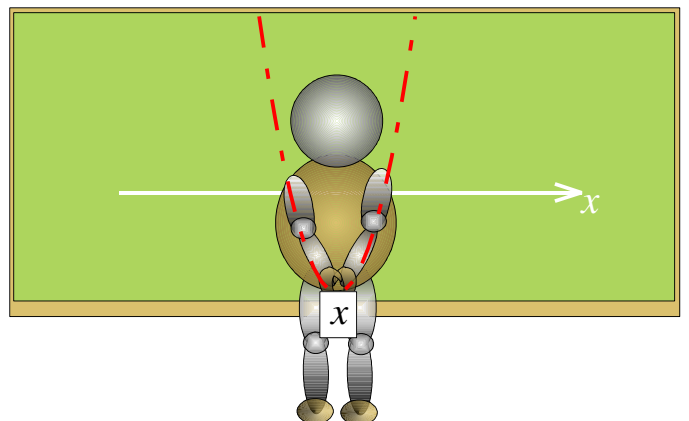
手と手を結んで恋になる

ここが大事なポイント。

両手の掌の恋愛線のシワを合わせて手を結ぶから、

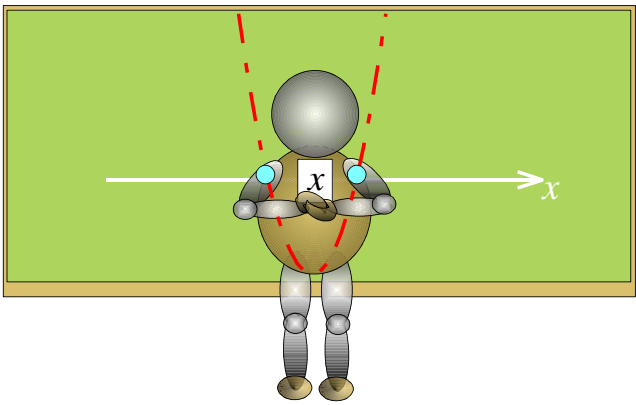
シワ合わせで結ぶ 転じて 幸せに結ばれる

なんて、親父ギャグをいって強調してもいい。



次に、 $y < 0$ の部分にある x の値の範囲をボディパラする。
 組んだ両手を x 軸のある上方に持ち上げる。
 両手が結ばれているから x の範囲は、両腕の付け根の間の部分になる。生徒に両腕の付け根の x の値 α, β を求めさせ、黒板に書かせる(あるいは自分で書く)。最後に解をまとめよう。

x の範囲は両腕の付け根 α と β の間
 $\alpha < x < \beta$



このことを強調し、理解させる。
 次のように、口上を垂れてもいいし。
 頂点、すなわち恋の位置にある両手を、上方の位置にある愛
 という焦点に向かって上げてやる。

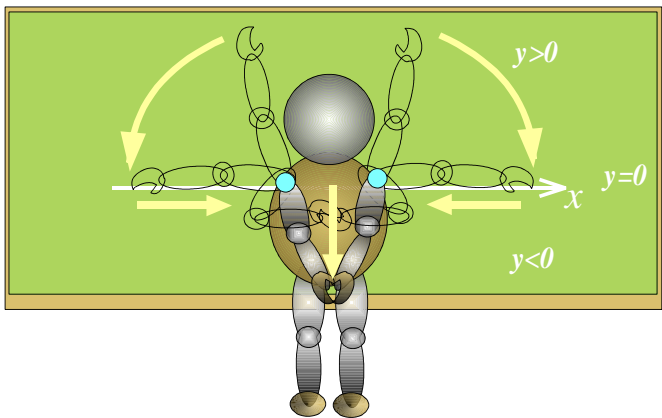
そうすると x の範囲は、両腕の付け根の x の値、そうだな、仮にまなぶとかず子とでもしようか。
 まなぶとかず子の中に愛があることになる。

(ここら辺の比喩やら親父ギャグやらについては、信頼・信用というバロメータの高さおよび対象とするカップルの設定に十分配慮して語ろう。自分の親父ギャグに酔わない、ダメだししない等、場の雰囲気を見極めること)

【2次不等式の解のまとめ】

最後に、ボディパラを用いて2次不等式の解を視覚化しておく。

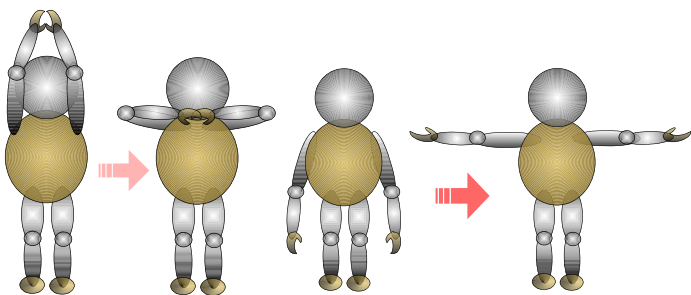
- 両手を空に向けて伸ばす (バンザイ)
- x 軸の上では左腕と右腕に別れて伸びている
- ゆっくり腕を下ろして水平 (セーフ)
-両腕の付け根から両手に向かって x は伸びる
- 両手を水平に移動させ掌を合わす (合掌)
-両腕の付け根の間に x が集まる
- 手を合わせたままゆっくり腕を下ろす
- x 軸の下部分が現れる
- 合わせた手をハートの形にする
-手の位置が頂点になる



威厳を失わず、流れるような動作でボディパラしよう。

なお、手が頂点の位置に来たときに、合わせている手を握りなおすことを忘れないようにする。そのままだとコマネチポーズになってしまう。

手を握った状態から逆にバンザイする形に持っていくこともできるが、恋から愛になって、愛が分かれてバンザイといった意味にも受け止められるので、注意すること。



【バラエティに調理】

2次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ ($a < 0$) の場合、上に凸の放物線で2次不等式を解くことになるが、背伸びの状態から組んだ手や下ろした状態の腕を水平にすることで同様にボディパラできる。この場合、焦点は頭あたりになるから心は頭(脳)にあるんだよと言添えてもいいかもしれない。しかし、不等式をグラフ化する前には、

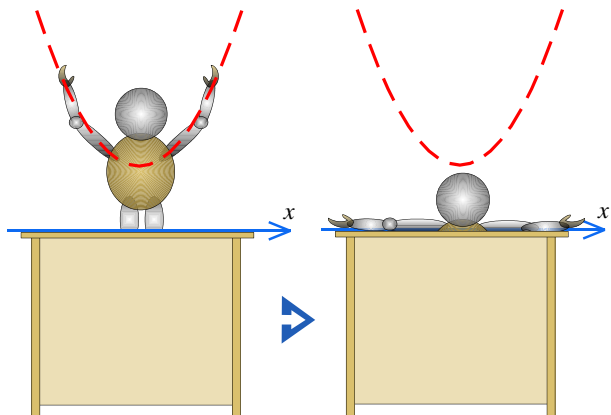
「降べきの順に整理、項の係数の整数化」

といった式整理をし、2次の項は正数にしてしまうので殊更触れる必要はないだろう。

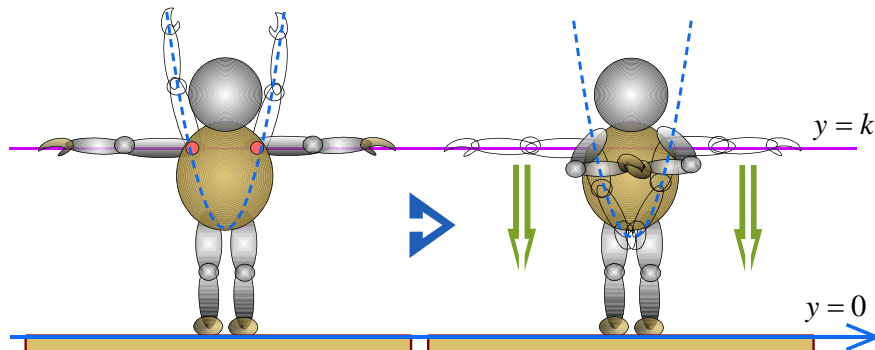
また、2次不等式の解が「すべての実数」といった場合でもボディパラは可能である。2つのシチュエーションを設定する。

教卓の高さを x 軸に見立てる

教卓の後(生徒から見て)に置いた椅子の上に立ち、バンザイポーズから、セーフポーズに移行する。椅子から降りて、水平になっている腕の高さを教卓の高さにする。(教卓の上に首が乗っている斬首台みたいでちょっと気持ち悪い)



床を x 軸に見立てる
 肩の高さを $y = k$ ($k > 0$) に設定する。
 バンザイポーズからセーフポーズに移行
 両腕から両手に向かう範囲の確認
 手を頂点に組んだ状態から $x = k$ の高さまで上に上げる
 両腕の間の範囲の確認
 2つの範囲を合わせて x 軸上に落すことで
 すべての実数が解となる。



「解なし」、「 $x = \alpha$ 」といった解になる場合も工夫して考えてみよう。

あとがき

「現地調達主義」が流行った時代がありました。数学の教科書がコアとオプションに分かれた前指導要領は、コアの内容にオプションや必要項目をどう単元に配置し指導するかを問うた柔軟性あるカリキュラムでした。その後、現場は単線型にオプションを選択履修することで収束し、結局、現指導要領では数学 A のオプションは外されてしまいます。易きに水は流れてしまった訳ですが、「現地調達主義」の理念は教育・生徒層の多様化するいまの時代にこそ必要なのではないのでしょうか。そしてそれは学習項目のみならず、学習の補助興具においても姿勢は継承されるべきであり、この「メイクる」数学も身近な素材から数学を語ってみようということが始まりました。興具を「現地調達」することは学習のモチベーションを確かに高めるのです。

例えば放物線。生徒が高校入学後、最初にぶち当たる抽象化の壁であり、だからこそ慎重、丁寧にイメージを育ててあげたいわけです。放物線を黒板にさらっと書いて終わりではあまりに素っ気なく、曲線としていまひとつ動きを伴いません。黒板に「書く」のではなく、生徒の頭の中に「描く」ことができればと思うのです。そこで、チョークを投げて、「放物線が見えたかな」と問いかけた先生がいました。針金ハンガーを加工して放物線を作った先生がいました。紙で作ったカモメを糸に通し、折鶴のように連ねて、糸の両端を持って 2 次不等式の解を見せた先生がいました(この場合の曲線はカタナリーですけど)。ムーヴすることを実感させるように放物線を見せることが大切なのです。

しかし、興具作成に時間をかけ、意気込み授業で紹介したけど不評に終わったという経験もきっとあることでしょう。興具の意識付けは 3 分で終わってしまうことも多く、作成に要した時間とのギャップは教育力を削ぎかねません。だから、「3 分の興具は 3 分で作成しよう!」これもまたメイクる数学の目標でした。その究極に位置する興具が本時のボディパラなのです。ボディパラでの授業は随分昔からやっているのですが、卒業生が学校に遊びにくるときもボディパラは強い印象として残っていることを懐かしく語ってくれます。なんとって体を張っている授業なのですから。

そこで、柳の下の 2 匹目のドジョウを、ということで第二弾を作ってみました。2 次不等式の解もイメージしづらいものであり、公式として解の形を覚えてしまっている生徒も多いことでしょう。でも、その解の形に至るまでの過程が大切なのであり、ボディパラでは、両腕と両手の位置関係からイメージを組み立てています。愛やら恋やらとずいぶん脱線した内容にも見えますが、数学は「楽(ラク)する」ことを学ぶと同様に「楽しい」ことを学ぶという気持ちも大切にしたいのです。数学を生かすということは、数学を生活の中に生かすだけでなく、数学という学問そのものが生かされなければ教えているこちらが楽しいってことを見失ってしまうのではないのでしょうか。

さてさて、ボディパラ 2 次不等式を思い出すとき、生徒はくすっと笑ってくれるかな？

話は「現地調達」に戻りますが、ボディパラがそうであるように、興具は教室の中にも少なからず転がっているもので、意外と簡単に現地調達できます。私がよく教室の中で拾っているものを 2 点紹介しましょう。

教室の壁に貼ってあるいらなくなった掲示物、あるいは古紙回収箱の中の紙。縦に半分に折って、折り目の方の頂点から開いたときに放物線になるように手でちぎっていきます。この作成法は放物線の対称性を意識させます。切って作った紙にはチョークで軸や座標を書いたりして黒板の上で飛ばしてやります。なお、マジックやハサミなどを事前に用意して使ってははいけません。そこに放物線があることを示すことが重要なのですから。

学校祭が終わった暑い頃の授業。教室の中には団扇が置かれていたり、不届きな生徒が扇いだりしています。そのウチワを拝借して、「これと放物線に見えるだろ」と特定の生徒に問いかけます。生徒は不信な顔をしていても、2 度、3 度とちょっと語尾を強めて「見えるよな」と問い詰めると、素直に「見えます」と応えてくれるものです。団扇の柄の部分の軸になるわけで、柄を上にとすることで、最大最小、解の配置などの応用問題にも効果的に使うことができます。

生徒だけでなく、教室の中全体にも目を配ってみると、散りばめられている宝物の興具をきくと発見できることでしょう。紙と鉛筆だけでなく、数学は有りとあらゆるものをリユースして語ることのできる楽しい学問なのです。

