集合と命題 ～ 命題を読み解き真理を解明しよう

Fuminori Nakamura

❖ 命題（*proposition*）

白黒はっきりつける!!

正しいこと(真)，誤っていること(偽)が明確に判断できる主張(文や式)

(1) 3は1より大きい	☞	真の命題
(2) 素数はすべて奇数である	☞	偽の命題
(3) この花は美しい	☞	非命題
(4) ドラえもんは猫型ロボット	☞	非命題

❖ 意見，感情，普遍的事実でない，といったものは真偽が定まらず命題とは言えない．

❖ 条件と命題

条件：変数の値によって真偽が変わる主張(文や式)

条件「x は素数である」は，$x=3$ のときは真であり，$x=4$ のときは偽である．真偽が決まったとき，条件は命題と考えることはできる(乱暴だけど)．

❖ 真理集合と含意(条件)命題

真理集合：x に関する条件 p が真となる x の集合P

含意命題：真である条件 p，q に対して，

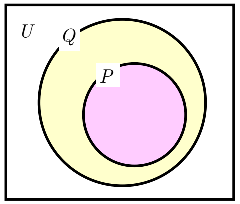
命題「p ならばq」☞「$p \Rightarrow q$」

条件 p…命題の仮定（前件）　条件 q…命題の結論（後件）

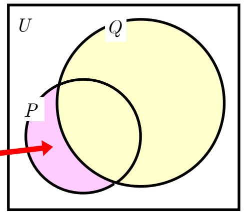
条件p，qの真理集合をそれぞれP，Qとする

命題「$p \Rightarrow q$」が真　$\Leftrightarrow$　$P \subset Q$

命題「$p \Rightarrow q$」が偽　$\Leftrightarrow$　$P \cap \overline{Q} \neq \Phi$



$P \cap \overline{Q}$ の要素を命題の反例という



❖ 必要条件・十分条件

含意命題「$p \Rightarrow q$」が成り立つ(真である)とき，

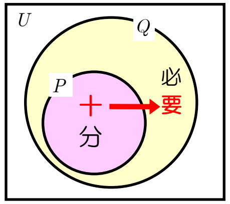
条件 p(仮定)は，（条件 q であるための）十分条件

条件 q(結論)は，（条件 p であるための）必要条件

仮定と結論をこのように読み替える．真理集合としては，

{十分}⊂{必要}

であり，十分条件は，必要条件より(拘束が)強い条件である．

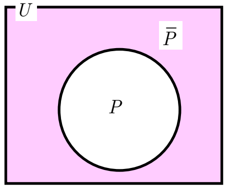


命題「$p \Leftrightarrow q$ が成り立つとき，

p は q であるための必要十分条件（*if and only if*，*iff*）であり，p と q は同値(*equivalent*)という．

❖ 条件の否定

条件「p でない」を条件 p の否定といい $\overline{p}$ と表す．条件 p の否定は真理集合では P の補集合 $\overline{P}$ である



重要 否定するのは名詞以外の品詞

「または」「かつ」の否定

$\overline{p\ かつ\ q} \Leftrightarrow \overline{p}\ または\ \overline{q}$

$\overline{p\ または\ q} \Leftrightarrow \overline{p}\ かつ\ \overline{q}$

《カルノー図》

	Q	$\overline{Q}$
P	$P \cap Q$	$P \cap \overline{Q}$
$\overline{P}$	$\overline{P} \cap Q$	$\overline{P} \cap \overline{Q}$

真理集合におけるド・モルガンの法則

$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$，$\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$

より得られる，カルノー図で考えれば明らかな性質．

「すべて(任意)」「ある(適当)」の否定

$\overline{すべての\ p} \Leftrightarrow ある\ \overline{p}$

$\overline{ある\ p} \Leftrightarrow すべての\ \overline{p}$

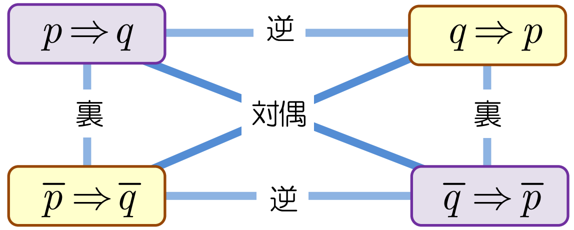
$\overline{「すべての生徒は出席している」}$
⇔「欠席している生徒がいる」
⇔「ある生徒は出席していない」

「ならば」の否定

$\overline{p\ ならば\ q} \Leftrightarrow p\ であって\ \overline{q}$

含意命題「$p \Rightarrow q$」が真であるとは，反例がないこと，すなわち真理集合の「$P \cap \overline{Q}$ の要素がない」ことである

❖ 命題の逆・裏・対偶



命題とその対偶の真偽は一致する

命題の逆と裏も対偶の関係より真偽は一致する．

$p \Rightarrow q$ は真 ☞ $P \subset Q$ ☞ $\overline{Q} \subset \overline{P}$ ☞ $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ は真

❖ 背理法(矛盾法)

命題の条件(仮定，結論)を否定し，論証を進めることで，条件や数学的事実と矛盾すること導き，命題が正しいことを証明する方法．

結論を否定し，仮定との矛盾(仮定の否定)を導く場合は対偶による証明となる．

(問題1)「勉強すれば成績は良くなる」の対偶は，「成績が悪ければ勉強しない」ということだろうか．

(問題2)「4 枚のカードの片方の面には、男の子と女の子が描かれていて、もう片方の面には ドラえもんとドラミの絵が描かれている。いま、4 枚のうち、2 枚のカードは，のび太としずかで 、残り 2 枚のカードは，ドラえもんとドラミの絵が見える状態で机の上に置いてある。このとき、「男の子のカードの裏はドラえもんの絵である」 という仮説が正しいかどうかを調べたい。最初にめくるのはのび太のカードである。では、 2 枚めはどのカードをめくればいいだろう。(*Wason selection task*)

p if and only if q

「p if q」 ☞ 「もし q ならば p である 」

☞ 「p は q であるための必要条件」

「p only if q」☞ 「もし q ならば p の場合に限る」

☞ 「q でなければ p ではない」

☞ 「p ならば q」(対偶)

☞ 「p は q であるための十分条件」

(問題 1) 命題「勉強すれば成績が良くなる」の対偶

勉強したら必ず成績はよくなるかというとそうではないかもしれない.

だからこれを命題にするのはどうかなという疑問はある.

でも真の命題であるからこそ向上があると考えてみよう.

さて,「成績が良くなる」の否定は「成績が悪くなる」ではない.

「成績が良くならない」であり，成績が変わらない場合もあるし悪くなる場合もある．ただ，その場合でも対偶は

「成績が良くならなければ勉強しない」

なんかふてくされているような姿勢でしっくりこない.

それは，時制を考慮していないからである. (数学では普通は，時制を考慮することはない)

時制をいれて考えてみると「勉強する」ことの結果として，やがて「成績は良くなる」ということで，それは将来のことである.

したがって，対偶を考える場合は,「成績が良くない」ことの原因が「勉強しない」ということであり，成績が良くないことに対して勉強しないことは過去のことなのである.

以上より，次のように考えればよい

「成績が良くないのは，勉強しなかったからだ」

これでスッキリする.

(問題 2) ウェイソンの選択課題

4 枚カード問題(for-cards problem)ともいい，心理学や認知科学，さらには行動経済学でも取り上げられる問題である.

もっとも多い誤答は,「ドラえもん」のカードをめくるというものである.

でも仮説は「男の子」のカードの裏が「ドラえもん」であり,「女の子」のカードについては何もいっていない．だから,「女の子」のカードの裏が「ドラえもん」であっても問題ない.「ドラえもん」のカードの裏は「男の子」「女の子」のどちらでもいいのである.

なお，命題「男の子のカードの裏はドラえもん」に対して「ドラえもんのカードの裏は男の子」はその逆である.「逆は必ずしも真ならず」ということである.

また,「しずか」のカードの裏についても同様であり,「女の子」のカードの裏は断定することはできない..

では,「ドラミ」のカードの裏はどうなるだろう.「ジャイ子」や「しずか」のように「女の子」であるのは問題ない．でも「スネ夫」や「ジャイアン」のように「男の子」の場合は,「男の子」のカードの裏が「ドラえもん」であるという仮説は間違いということになる.

よって,「ドラミのカードの裏は女の子である」ことを確認すればよい.

これはもとの命題の対偶を示したことになる.

(問題) $\sqrt{2}$ は無理数であることを証明せよ.

Remaork)

無理数の存在を最初に知ったのはピュタゴラスと言われている.

ピュタゴラス(BC572-BC496?)は古代ギリシアのアレキサンドリアの数学者であり，ギリシャの植民地サモス島に生まれた. ピュタゴラスは，この世は粒子で作られていると考え，自然数や自然数の比(有理数)以外の数の存在を認めず「万物は数である」と唱えた．彼の創設したピュタゴラス教団は，三平方の定理などの数々の数学の発見をしたが,それを外部に口外することは固く禁じたという．教団のメンバーは教団の象徴である星形五角形の徽章をつけて，儀式により結束を固め，徐々に宗教的な色合いが強めていく．彼らは，食肉を嫌い，動物を殺すことは殺人であり，食べることは食人と考えていた．(このような人たちをベジタリアンという造語ができる前は,ピュタゴリアンと呼ばれていた).

教団の最大発見は三平方の定理である．$a^2+b^2=c^2$ を満たす直角三角形の 3 辺の長さ a ，b ，c は有理数であり，何倍かすれば直角三角形は豆を並べることで作れることを意味した.しかしあるとき,教団の門下生のヒッパソスは,直角を挟む2辺の長さが1の直角二等辺三角形では斜辺の長さは有理数で表すことができないことに気がつき，これを幾何学的に証明したといわれる．このことを上層部のメンバーに話したが，これは教義を否定することになるため，ヒッパソスは海で溺死させられたという．教団は「Alogon(口にしてはいけない)」として門外秘とし，禁を破った者は秘密裏に殺害された.

しかし,やがては世に知れることとなり,閉鎖的で政治にも介入し始めた教団は恨まれ，学問所は焼き討ちにあう．どうにか難を逃れ，豆畑にたどり着いたピュタゴラスは豆を踏むことを拒み，つかまって惨殺されたという.

後日談としての次の逸話がある.

サモア島を訪れた旅人が,豆を一心不乱についばむ鶏が気になり声をかける(ここら辺でもうありえない話)．鶏は,「私は生前，ピュタゴラスという名の者でしたが，豆を貴ぶ余り人を殺めてしまったので，いまは豆しか食べることができないようになってしまったのです」,こう答えさめざめと泣いたという.

さて，$\sqrt{2}$ が無理数である証明は背理法で示すことができる.

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定し，$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$ とおく.

ここで，m ，n は，公約数をもたない自然数(互いに素という)とすると矛盾が生じる．互いに素であることに矛盾するするわけであるが，ここでは，別の矛盾点を引き出す証明を示そう.

証明) $\sqrt{2}$ は無理数でない，すなわち有理数と仮定する.

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m} \quad (m\text{ ，}n\text{ は自然数})$$

☜ 互いに素でなくていい

とおく.

$\sqrt{2}m=n$ の両辺を平方する.

$2m^2=n^2 \quad \cdots(*)$

ここで，m ，n を素因数分解したときの(*)の両辺の素数 2 の個数を調べると，右辺の n^2 は偶数個，左辺の $2m^2$ は奇数個であるから矛盾する.

よって，$\sqrt{2}$ は有理数ではない.

すなわち，背理法により，$\sqrt{2}$ は無理数である.　　Q.E.D.

(問題)素数は無数にあることを証明せよ.

Remark)

過去，出版された書物で最も読まれている本は何だろうか.

正解は，聖書である．では聖書に次ぐベストセラーは何かというと「原論」(ストイケイア・エレメント)という数学書である(ド・モルガンが述べた言葉)．紀元前 6 世紀に著されており，当時の数学の教科書であり今でも読まれている．著者は古代ギリシアの数学者エウクレイデス．聞いたことがない名前かも知れないが，英語圏ではユークリッドといい，こちらはどこかで一度は耳にした名前だろう.

「原論」は全 13 巻からなり，第 1 巻から第 4 巻までは平面幾何を取り扱い，ユークリッドは「幾何学の父」といわれている．またユークリッドは光の直進や反射の原理を発見し光学の分野でも有名である．アレキサンドリアの王，プトレマイオス 1 世に呼ばれ謁見したユークリッドは,，王から「原論によらないで幾何学をまなぶ道はないのか」と問われ,「学問に王道はなし」(近道はない)と，王を諌めた逸話はあまりに有名である.

さて,「原論」では素数が無数に存在することに触れている．後世の数学者はその証明を背理法によるものとしたが,「原論」の内容に合わせて示すと次のようになる.

証明) 素数が有限個しかないとし，すべての素数を,

p_1 ， p_2 ， p_3 ，……， p_n

とする(素数は n 個ある)．ここで,

$p=p_1p_2p_3\cdots p_n+1$

とすると，p は素数かまたは，素数でない数(合成数)である.

p が素数のとき，p は，$p_1, p_1, p_3, \cdots p_n$ のいずれよりも大きい数であるから新たな素数である.

p が素数でないとき，p は素因数分解できる.

p を $p_1, p_2, p_3, \cdots p_n$ のそれぞれで割るといずれも余りは 1 であるから，これらは p の素因数でないので新たな素数が存在する.

いずれにしろ，素数の個数は n であることに矛盾する.

すなわち，素数は無限にある.　　Q.E.D.

西暦 2006 年(諸君が生まれるちょっと前),ノースカロライナ大学グリーンズボロ校のフィリップ・サイダック先生は，背理法が当然とされていた証明に対して,「素因数分解の一意性」という中学生にもわかる方法で証明することに成功した.

実際の証明を原文で以下に示そう.

proof)

Let n be an arbitrary positive integer greater than l.
Since n and n+1 are consecutive integers,they must be coprime.
Heice the number N_2=n(n+1) must have at least tow different prime factors.
Similarly,since the integers n(n+1) and n(n+1)+1 are consecutive,and therefore coprime,the number N_3=n(n+1)[n((n+1)+1] must have at least three different prime factors.This process can be continued indefinitely,so the numeber of primes must be infinite. ■

ユークリッドの証明から 2300 年後，誰も公には示さなかった簡潔なものであり，これから数百年語り継がれる証明になるだろう.