

君はひょっとして、振り込め詐欺に引っ掛かっていないだろうか

市立札幌旭丘高校 中村文則

1 から 50 までの間の 2 桁の数をひとつ思い浮かべてください。
ただし、どの桁も奇数でかつ同じ数字ではないようにしてください。
例えば、11なんていうのはだめですよ。
では、あなたが思い浮かべた数を右に書いてください。



これは、マジシャンが観客相手に披露する「心理応用トリック」といわれるものです。
問いかけのひとつひとつに心理を誘導する言葉が隠されています。

(1 行目) 1 から 50 の数から選ぶことで「ずいぶんたくさんある」という印象が植え付けられます。

そのあと、2 桁の数と制限されても「たくさんの数」という印象は消えないのです。

(2 行目) 「どの桁も奇数」から、考えられる数はずいぶん減ります。十の位の数値は、1 と 3 しかありません。さらに一の位も奇数ですから、その場合の数値は 10 通りであり、「同じ数字ではない」ことより、8 通りになります。

(3 行目) 例として 11 を提示することで、気持ちは 1 を避け 30 台の数へと動きます。

30 台の数値は、31, 35, 37, 39 の 4 個です。しかし、9(苦)は 4(死)と同じように人気のない数です。また、1 と 5 の数字は 1 行目で 1 から 50 と言っているので深層心理では避けようと働きます(たいていの人はあまのじゃくで他人の言ったことを否定するものなのです)。何より、みんなラッキーセブンの 7 は好きな数なのです。

こうして絞り込まれた数値が、あなたが書いた数値なのです。

どうです。当たっていましたか？

この心理誘導は、論理的な思考にも働きかけています。相手の問いかけを咀嚼、推論しながら自分で数値の範囲を制限してしまうのです。心理的な誘導は、数学の講義でも用いることがあります。解答を一通り済ませてから、「実はね、途中で間違えてしまったのだけど、分かったかな」と問いかけます。すぐに手を挙げて答える生徒は、その場面で説明の誤りに気がついていたり、それともなんとなく変だと思っていたけど自信がなかった生徒でしょう。前者は数学ができる生徒であり、優越感を持つかもしれません。後者は、自分の考えが正しかったことに自信を持ち、数学が好きになるかもしれません。何も答えなかった生徒は、眠そうにしていた生徒も含め、「間違いがある」ことに興味を示し、先生の間違いを探そうと普段はしない解答の見直しをすることでしょう。もちろん、これを毎時間やってミスを連発していたら先生の権威は地に落ちてしまいますが。

このように人の思考を意図しない方向に向けさせ本当にしたいことの効果を高める手法をミスディレクション(Misdirection)といいます。あるマジシャンは指先を使うマジックの大半がミスディレクションであるといい、マジックの仕掛けやパフォーマンスには重要なのです。似たような手法として、ミスリード(mislead)があります。でもこちらは「誤った方向に導く」だけでその過ちは修正されません。場合によっては、相手はミスリードされたことに気づかず終わってしまうかもしれません。誤った認識を植え付ける行為は、思考操作から場合によっては思考攻撃となり、相手の精神を疲弊させ破壊します。

最近、よく報道されるオレオレ詐欺や振り込め詐欺は、そういったミスリードを始まりとして、相手を陥れ、やがて直接的な暴力に発展する場合があります。たぶん詐欺グループはミスリードのあらゆるパターンを研究してフローチャートを作っているのでしょう。手を変え品を変えてのアプローチに翻弄されてしまうのです。詐欺グループのリーサルウェポンは心理作戦です。心理の対象となるのは家族の命やお金であり、大切なものや弱いものに付け込めます。それらの感情は普段は大切に心の内に守られたものであり、だからぐっと握られると抵抗できなくなってしまうのです。感情を弄ぶ心理操作に感情で対処することはプロが相手では難しいことでしょう。だから感情に感情をぶつけるのではなく、感情は論理でかわし、論じて対抗すべきなのです。

お断りしておきますが、本稿では、振り込め詐欺の手口をもじって誤答から数学の理解を深めることを提示しているわけではありません。振り込め詐欺を防ぐために、数学のロジックが役立つと真面目に考えているのです。次の6つの項目を読んでみてください。

- ① 理解しているから大丈夫という思い込みは捨てる
- ② 解いたことのない問題は安易に取り組まずじっくり考える。
- ③ よく出題される問題の解答パターンを理解しておく
- ④ 解いた問題の解法や情報(利用する公式など)をノートにまとめておく
- ⑤ 解いた問題の正解および解説は必ず確認し解き直しをする
- ⑥ 解答に疑問があるなら誰かにアドバイスを受ける

どの項目も学習する上で大切なことです。講義の最初の時間のガイダンスやオリエンテーションで「学び方」として説明することでしょう。今度は次の6項目を読んでください。

- ① 「自分だけは大丈夫」という思い込みは捨てる
- ② 知らない番号からの電話はでない
- ③ 振り込め詐欺でよく使われる口実を理解しておく
- ④ 電話相手の情報を聞き出しメモする
- ⑤ 本人に確認する
- ⑥ 振り込む前に誰かに相談する

これらの項目は振り込め詐欺を防ぐための対策として公開されているものです。「数学の学び方」の項目をもう一度みて、項目の番号を比較してください。同じ内容のことをいっていると思いませんか。

よく「数学を勉強して何の役に立つの？」という質問を耳にします。どんな学問であれ専門職として研究するのでなければ役立つかどうかは分からないものです。学問を道具としてだけみるから必要ないという考えになるのではないのでしょうか。もし「数学を勉強して何に活かせるの？」という質問であれば、不確実で不条理に満ちている社会や生活を生きる力を養うこと、と答えるでしょう。数学の場合は、生きる力は、思考力、判断力、表現力をブレンドし論理の力になります。それは経験や体験により培われるものであり、論理のエッセンスを詰め込んだいろいろな数学の問題と対峙し解決することで実現できると思うのです。そこでここでは間違った解法に振り込んでしまいそうな10の問題を用意しました。上述した6項目を参考にして生きる力を験してみてください。災難を未然に防ぐために。

君は振り込め詐欺に引っ掛かっていないか？（解答のふりして、振り込められていないか）

◆解説篇

《ふり 1》

$$\text{関数 } y = \frac{2x-3}{x-1} \quad (x > 2) \text{ の値域を求めよ。}$$

【解答】 $y = \frac{2(x-1)-1}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}$ である。これから、 $x > 2$ より $x-1 > 1$ …①

①の両辺を $(x-1)$ で割る $\frac{1}{x-1} < 1$ …② ②の両辺に (-1) を掛ける $-\frac{1}{x-1} > -1$ …③

③の両辺に 2 を加える $2 - \frac{1}{x-1} > 1$ 以上より $y > 1$ 答

【解説】

不等式の変形は、負数の乗除をするときは不等号の向きが変わることに留意する。解答をみると、

①では、 $x-1 > 0$ だから両辺を割っても不等号の向きは変わらない

②では、 (-1) を掛けるから不等号の向きが変わる

一見すると誤りはなく、 $y > 1$ が得られている。でも、関数の分母の $(x-1)$ に対し、分子の $(2x-3)$ は、ほぼ 2 倍の値になるから x の値を大きくしても y の値はそれほど大きくならないことは予想できる。

実は、最初の式変形から x をどんなに大きくしても y は 2 より小さいことが分かる。

では、どの過程でこれを見落としたのかということになるがそれは②である。①で $x-1 > 0$ から正の値で割ると分かっているにもかかわらずそのことを式の中で表現することを落としてしまっている。本当は、

$$0 < \frac{1}{x-1} < 1$$

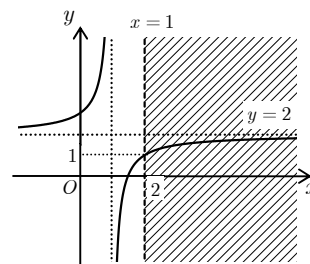
このようにすべきなのである。これから、

$$-1 < \frac{-1}{x-1} < 0 \Rightarrow 2-1 > 2 - \frac{1}{x-1} < 2 \Rightarrow 1 < y < 2$$

当たり前と思っていたことが、当たり前ゆえに抜け落ちて、誤答に振り込んでしまったのである。なお、この関数は一次分式関数といい、そのことを知っていれば、漸近線や極限から解答の誤りに気付くことはできる。でも知らなくても、最初の変形から、中学で学んだ反比例

関数 $y = \frac{1}{x}$ のグラフを y 軸に関して対称移動し、 x 軸方向に 1、

y 軸方向に 2 平行移動したものであることが理解できれば曲線の概形は予想できるだろう。新しい知識を得るも大事だけど、学んだ知識をフルに活用することも大事なのである。



《ふり 2》

$$\text{2次方程式 } 4x^2 - 2mx + 3m - 5 = 0 \text{ の2つの実数解を } \alpha, \beta \text{ とする。}$$

このとき、 $\alpha^2 + \beta^2$ の最小値を求めよ。ただし、 m は実数とする。

【解答】 2次方程式の解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = \frac{m}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{3m-5}{4}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{m^2}{4} - \frac{3}{2}m + \frac{5}{2} = \frac{1}{4}(m-3)^2 + \frac{1}{4}$$

以上より、最小値は $m = 3$ のとき、 $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{4}$ 答

【解説】

平方の和は 0 以上の値より最小値が負であれば「何かへんだ」と気が付く。そして、この説明からどこが誤りなのか分かるだろう。 α, β は虚数解なのである。 $m = 3$ を方程式に代入すると、

$$2x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{これから解を求めると、} x = \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{4}$$

すなわち、解答では実数条件の確認ができていないのである。2次方程式の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = m^2 - 4(3m-5) = m^2 - 12m + 20 = (m-2)(m-10)$$

$D \geq 0$ であるから、 $m \leq 2, 10 \leq m$ これを定義域として最小値を求めなければならない。

よって、 $m = 2$ のとき最小となり、その値は $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}$ である。

なお、問題で「実数解」という条件は外して提示すると誤答にはならない。解と係数の関係は、複素数解で成立し、2解の平方の和は実数値になり m が実数であれば 2次式の最小値は求められる。このようにすると今度は実数解と思い込んでしまっている人が誤答に振り込んでしまうことになる。

《5り3》 $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (x, -3)$ とする。 \vec{a} と \vec{b} のなす角が 45° のとき、実数 x の値を求めよ。

【解答】 $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + 9}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, -1) \cdot (x, -3) = 2x + 3$

内積の定義より、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ$ これから、 $2x + 3 = \sqrt{5} \times \sqrt{x^2 + 9} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

両辺を平方して、 $2(2x + 3)^2 = 5(x^2 + 9)$ 式を整理して、 $x^2 + 8x - 9 = 0$

因数分解すると、 $(x + 9)(x - 1) = 0$ 以上より $x = -9, 1$ 答

【解説】

式変形を続けると、いつの間にかもとの式と変わってしまうことがある。言葉巧みに説明されると最初に提示された条件とは違うものに誘導されてしまうようなものだ。同値の関係が崩れる代表的な式変形は「平方する」ことである。例えば、 $x = 1$ の両辺を平方すると、 $x^2 = 1$ である。このとき、いつの間にか、 $x = -1$ も解になっている。

次の式も、左辺から右辺への変形過程で条件が変わってしまっている。

① $\frac{x^2 - x}{x - 1} = x$ ② $\log_{10} x^2 = 2 \log_{10} x$

①の左辺は、分母から $x \neq 1$ であるが、右辺だけみるとその条件がなくなっている。

②の左辺は、真数条件から $x \neq 0$ であるが、右辺だけみると真数条件は $x > 0$ になっている。

このように解法の途中では余計なものを取り込んでしまう可能性があるため、そのことに留意して解答を進めるか、それでも引っかけかかってしまうことを考慮して、得られた結果が問題の条件を満たしているか確認する習慣をつけよう。どんどん余計なものを取り込んで得られた解は必要条件であり、そこから絞り込んで十分条件を調べるということである。

さて、誤答の原因は、平方したことにより同値性が崩れてしまったのである。

$$2x + 3 = \sqrt{5} \times \sqrt{x^2 + 9} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

両辺を平方する前に、右辺は正数だから、等しい左辺の値も正数であることを確認する。

$$2x + 3 > 0$$

よって、得られた値で $x = -9$ は満たしていないことになる。

この $x = -9$ は、2つのベクトルのなす角が 135° の場合である。2直線のなす角は一般的には鋭角(直角)を表すが、2つのベクトルのなす角 θ は、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であることにも注意しよう。

どんなに言葉巧みに説明されても、最後にもう一度、内容を確認すれば防げるものである。

《5り4》 x の2次不等式 $(2x - 2a - 1)(3x - 5a - 4) < 0$ を満たす整数 x は2個である。
正の整数 a の値を求めよ。

【解答】 $\frac{5a + 4}{3} - \frac{2a + 1}{2} = \frac{4a + 5}{6} > 0$ ($\because a$ は正の整数) ...①

よって、不等式の解は、 $\frac{2a + 1}{2} < x < \frac{5a + 4}{3}$

不等式の範囲の中に整数値は2個あるので、①より、

$$2 < \frac{4a + 5}{6} \leq 3 \quad \text{これを解いて} \quad \frac{7}{4} < a \leq \frac{13}{4}$$

a は正の整数より、 $a = 2, 3$ 以上より $a = 2, 3$ 答

【解説】

まず、正解を示す。不等式の解は、

$$\frac{2a + 1}{2} < x < \frac{5a + 4}{3}$$

$\frac{2a + 1}{2} = a + \frac{1}{2}$ より、2個の整数解は、

$$x = a + 1, a + 2$$

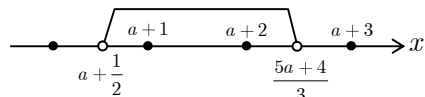
このことより、 $a + 2 < \frac{5a + 4}{3} \leq a + 3$...①

これを解くと、 $1 < a \leq \frac{5}{2}$ a は正の整数であるから、 $a = 2$

さて、解答では a の不等式は、

$$2 < \frac{4a + 5}{6} < 3 \quad \dots \text{②}$$

これは、①とは異なる。どこに誤りがあるのだろうか。



$\frac{4a+5}{6}$ は、不等式を満たす x の両端(問題の場合は等号はついていないが)の差であり、区間の長さを求

めている。 $A(a)$, $B(b)$ とすると、 $AB = |a-b|$ のことである。

例えば、 $AB = d$ とし、 $a = \frac{1}{2}$ のとき、 b の値を変えて調べてみよう。

$$b = \frac{7}{5} \text{ とすると、 } d = \frac{7}{5} - \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$$

$0 < d < 1$ で、区間 AB に含まれる整数は 1。

$$b = \frac{7}{4} \text{ とすると、 } d = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$1 < d < 2$ で、区間 AB に含まれる整数は 1。

$$b = \frac{7}{3} \text{ とすると、 } d = \frac{7}{3} - \frac{1}{2} = \frac{11}{6}$$

$1 < d < 2$ であるが、区間 AB に含まれる整数は 1 と 2 の 2 個になる。

このように、点 B の位置により、 $1 < d < 2$ であっても、区間 AB に含まれる整数の個数は 1 個になつたり 2 個になつたりする。

整数値が 1 個の場合は、さらに、点 A も動かし 0 や 1 の方向に近づけると、1 個の整数値を含むには、

$$0 \leq d < 2$$

であればよい。同じように考えると、2 個の整数値を含む場合は、右図をみて分かるように、

$$1 \leq d < 3$$

である。これから、 $1 \leq d < 2$ の場合は、区間の整数値の個数は、1 個、2 個ともに起こり得ることになる。

同様に、 $2 \leq d < 3$ の場合は、区間の整数値の個数は、2 個と 3 個の場合がある。

本問の 2 次不等式で考えてみよう。不等式は、等号は含まないことに注意すると、

$$1 < \frac{4a+5}{6} \leq 3$$

$$\text{これから、 } \frac{1}{4} < a \leq \frac{13}{4}$$

a は整数だから、 $a = 1, 2, 3$ であり、3 つの候補が得られたことになる。

そこで、 a の値を不等式の解 $\frac{2a+1}{2} < x < \frac{5a+4}{3}$ に代入してみる。

$$a = 1 \text{ のとき、 } \frac{3}{2} < x < 3 \text{ より整数値は、 } x = 2$$

$$a = 2 \text{ のとき、 } \frac{5}{2} < x < \frac{14}{3} \text{ より整数値は、 } x = 3, 4$$

$$a = 3 \text{ のとき、 } \frac{7}{2} < x < \frac{19}{3} \text{ より整数値は、 } x = 4, 5, 6$$

このように、区間の幅により、整数値の個数は変わってしまう。そこで、区間の幅から得た a の値を 2 次不等式の解に代入して戻すことで、解答を得ることはできるが、いい方法とは言えない。

思い込みは幾つも重なるとは物事の本質はぼやけてしまう。さらに要領悪く原因を追究しようとしてもたついていると、「そろそろいいでしょうか」と相手に強引に押し切られてしまうかもしれない。

《5り5》

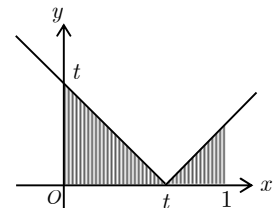
$f(t) = \int_0^1 |x-t| dx$ とする。次のそれぞれを求めよ。

- (1) $0 \leq t \leq 1$ のとき、関数 $f(x)$ (2) $I = \int_0^1 f(x+1) dx$ のとき、 I の値

【解答】(1) $0 \leq t \leq 1$ であることより、

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t (-x+t) dt + \int_t^1 (x-t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + tx \right]_0^t + \left[\frac{1}{2}x^2 - tx \right]_t^1 = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(1-t)^2 \end{aligned}$$

$$\text{以上より、 } f(t) = t^2 - t + \frac{1}{2}$$



$$(2) t = x+1 \text{ とすると } f(t) = f(x+1) = (x+1)^2 - (x+1) + \frac{1}{2} = x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$I = \int_0^1 \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$\text{以上より、 } I = \frac{4}{3} \quad \boxed{\text{答}}$$

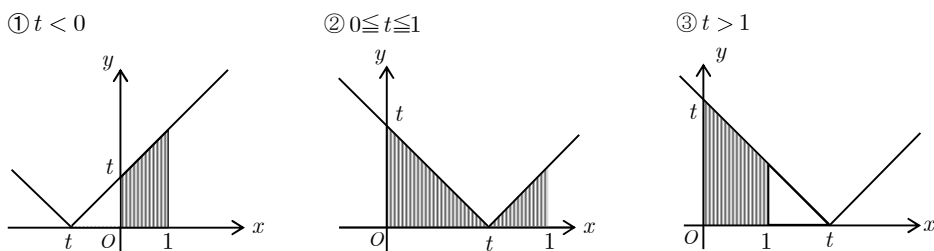
【解説】

- (1) 解答の間違いは見つけられなかったかもしれない。そういうときは、「解答を見る」ではなく、「解答を解く」ことから始めてみる。そして自分の答案と解答を比較してみる。すると解答にミスはほとんどないことが分かる。物事にしても、間違いがあるという前提で見ると、すべてが間違いのように見え疑心暗鬼になり惑わされてしまう。そういうときは自分を信じることから始めてみよう。でも最後まで気を抜かないように。しっかり確認すれば最後の答のミスを発見できる。本問で要求しているのは $f(t)$ ではなく $f(x)$ なのである。

このように、資料が渡されたら、相手の説明の前にまずその資料をざっとでも目を通すことが肝要である。そして最後の一字一句まで見逃さず確認する。最後に落とす穴があるかもしれない。

- (2) こちらも自分で解いた解答と同じになったから間違いがない、そう思ったら駄目である。まず(2)は(1)と link しているだろうか。否である。(1)の前に、 $f(t)$ の説明として $0 \leq t \leq 1$ があれば、この条件は小問(1)と(2)に適用される。しかし(1)で与えられた条件は、(1)だけで閉じている。(2)は単独の問題として扱うことになる。(1)の条件を(2)に適用させるには、(2)の設問で「(1)のとき」と説明を加える必要がある。

まず関数 $f(x)$ を求めてみよう。下図のように t での場合分けとなる。



$$\textcircled{1} f(t) = \int_0^1 (x-t) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - tx \right]_0^1 = \frac{1}{2} - t$$

$$\textcircled{3} f(t) = \int_0^1 (-x+t) dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + tx \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + t$$

これから、 $f(t)$ が得られる。そして t を $x+1$ に置き換える。

$$f(t) = \begin{cases} -t + \frac{1}{2} & (t < 0) \\ t^2 - t + \frac{1}{2} & (0 \leq t \leq 1) \\ t - \frac{1}{2} & (1 < t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x+1) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2} & (x < -1) \\ x^2 + x + \frac{1}{2} & (-1 \leq x \leq 0) \\ x + \frac{1}{2} & (0 < x) \end{cases}$$

以上より、

$$I = \int_0^1 f(x+1) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right]_0^1 = 1$$

ただ、この方法は、 $f(t)$ を計算してからまた $f(x+1)$ を計算しており、随分計算に時間がかかってしまう。でも、関数 $y = f(x+1)$ は関数 $y = f(x)$ を x 軸方向に -1 平行移動したグラフであることに気が付くと、被積分関数を x 軸方向に 1 平行移動することで、次のように求められる。

$$I = \int_0^1 f(x+1) dx = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \right]_1^2 = 1$$

これは、数学IIIで学ぶ置換積分であるが、大仰に構えなくても曲線で囲まれた図形の求積は平行移動で簡単に求めることができるのだ。例えば、本問の積分範囲を次のように変えると計算がずいぶん楽になることが実感できる。

$$J = \int_{-1}^1 f(x+1) dx = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) dx + \int_1^2 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{4}{3}$$

本問の教訓であるが、契約書の条項には無駄に多くのことが記載されているが、ポイントを押さえて整理するという。そして条項同士が関連しているかどうかを見極めること。また、前述の条項が、後述の条項により反故になっていないかということも注意しよう。

《5/6》

方程式 $\pi^x + \pi^{-x} = 2 \cos x$ を解け。
 なお、 π は円周率であり、 x は弧度法の角度とする。

【解答】 π^x と π^{-x} は正数であるから、相加平均と相乗平均の関係より、

$$\pi^x + \pi^{-x} \geq 2\sqrt{\pi^x \times \pi^{-x}} = 2$$

よって、 $2 \cos x = \pi^x + \pi^{-x} \geq 2$ これより、 $\cos x \geq 1$

ここで、 $-1 \leq \cos x \leq 1$ であるから、 $\cos x = 1$ 以上より、 $x = 2n\pi$ (n は整数) 答

【解説】

解答は何かおかしいとは感じたことだろう。例えば、解の $x = 2n\pi$ で、 $n = 1$ とすると、

$$\pi^{2\pi} + \pi^{-2\pi} = 2 \cos 1$$

左辺、右辺ともに求められない値だけど、 $\pi > 3$ より、 $\pi^{2\pi} > 3^6$ 左辺は右辺に比べ大きな値になる。どこかに誤りがあるのだが、分かるだろうか。それは「相加平均・相乗平均」を用いる場合の鉄則「等号成立の場合」を調べることが抜けているのである。等号成立は、平均をとる 2 数が等しいときだから

$$\pi^x = \pi^{-x}$$

すなわち、 $x = -x$ より、 $x = 0$ のときのみである。このとき、

$$\pi^0 + \pi^0 = 2 \quad 2 \cos 0 = 2$$

両辺の値は確かに一致する。

では、これで正解かというと、「この問題の場合」という制限がつく。

例えば、次の問題を考えてみよう。

$$x > 0 \text{ のとき、方程式 } x + \frac{1}{x} = 2 \cos x$$

相加平均・相乗平均の関係より、

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 2 \quad \text{これから、} 2 \leq 2 \cos x \text{ より、} \cos x = 1 \therefore x = 2n\pi$$

ところが、等号成立を考えると、 $x = \frac{1}{x}$ より $x = 1$ 。明らかに矛盾する。

原因は、左辺と右辺の x は同じ変数なのに、変数 x を独立して動かしているからだ。

$\pi^s + \pi^{-s} = 2 \cos t$ となる独立した 2 変数 s, t を考えてみよう。左辺の変数 s を動かすと、相加相乗平均の関係より、最大値は 1 であり、等号成立より s の値が得られる。しかし、ここまでは、右辺の t はまったく動かしていない。次に、右辺の余弦関数の最大値が 1 であることから t の値を求める。そして、最後に $s = t = 0$ であることを示している。

いってみれば結果オーライの解答なのである。

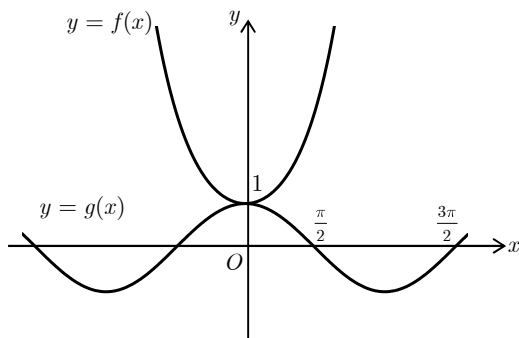
だから、正解を記述するならば、1 つの方法として、グラフを用い、視覚的に示してみる。

$$f(x) = \frac{\pi^x + \pi^{-x}}{2}, \quad g(x) = \cos x$$

とおく。 $y = g(x)$ は余弦関数であり、 $y = f(x)$ は、懸垂曲線(catenary)と呼ばれ、 y 軸対称の曲線である。それぞれの関数は右のグラフになり、その位置関係より、

$$f(x) \geq g(x)$$

そして、 $x = 0$ のときだけが共有点をもっている。



このように相手の説明がどの範囲の中で述べられるかはしっかり把握しよう。「オレオレ」と電話口の相手がいうとき、俺が俺のことをいうのは間違いではないが家族のオレではないかもしれない。インターホンで、「消防署の方から来ました」も本当にそちらの方向から来たのかもしれない、消防署の職員とは限らないのである。

《ふり 7》

$$y = a \sin x + \cos x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \right) \text{ であるとき、} y \text{ のとり得る値の範囲を求めよ。ただし、} a \geq 0 \text{ とする。}$$

【解答】 $y = \sqrt{a^2 + 1} \sin(x + \theta)$ ただし、 $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$, $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$

ここで、 $a \geq 0$ であるから、 $\cos \theta \geq 0$, $\sin \theta > 0$ よって、 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ としてよい。

$$0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ より、} \quad 0 \leq x + \theta \leq \frac{7}{6}\pi \text{ よって、} \quad -\frac{1}{2} \leq \sin(x + \theta) \leq 1$$

$$\text{以上より、} \quad -\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{2} \leq y \leq \sqrt{a^2 + 1} \quad \boxed{\text{答}}$$

【解説】

解答では、

$$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ および } 0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ から、両辺の和を考えて、} 0 \leq x + \theta \leq \frac{7}{6}\pi$$

としている。これは正しいだろうか。

一般的な不等式の性質でいうと、

$$\text{「} a \leq b, c < d \text{ ならば、} a + c \leq b + d \text{」}$$

ということであるが、これは間違いである。

$$a \leq b \text{ より、両辺に } c \text{ を加えて } a + c \leq b + c$$

$$c < d \text{ より、両辺に } b \text{ を加えて } b + c < b + d$$

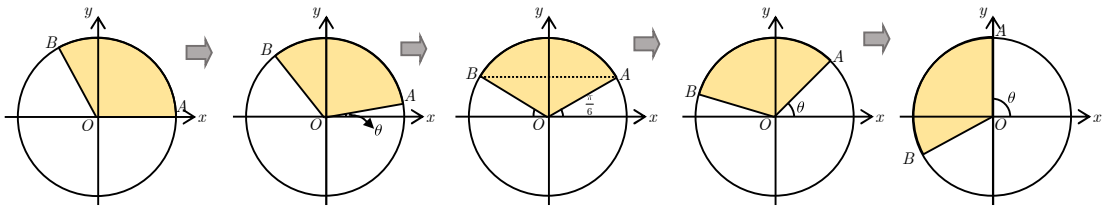
$$\text{これから、} a + c \leq b + c < b + d \therefore a + c < b + d \text{ である。}$$

同じように、 a, b, c, d が正数のとき、「 $a \leq b$, $c < d$ ならば、 $ac < bd$ 」
積についても等号は成立しない。

したがって、本問では、 $0 < x + \theta \leq \frac{7}{6}\pi$ となる……、ということだがこれで終わってしまったら、
木を見て森を見ずということになってしまう。
本問の内容は、次の問題と同じ扱いである。

$f(x) = x^2 - 2ax + 1$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値と最小値を求めよ。

放物線 $y = f(x)$ の頂点は、 a の値により変わり、放物線の軸は x 軸方向に移動する。したがって定義域と軸・頂点の位置関係により最大・最小は a の値で場合分けをして求める。
本問も同様に三角関数を合成して得られた正弦曲線は a の値により振幅は変わり、 x 軸方向に移動する。その変化した関数に対し、定義域 $0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ の範囲で最大・最小を求めなければならないが、解答は、角度 θ と x を同時に動かしてしまっている。ここでは、正弦曲線の変化を追うことは大変なので、円関数とみて中心角 $\frac{2\pi}{3}$ の扇形 AOB の動きを調べてみよう。角度 θ を $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で変化させると扇形は、下図のように変わっていく。



これから、最大値は、つねに $x + \theta = \frac{\pi}{2}$ のときであり、 $y = \sqrt{a^2 + 1}$ である。

最小値は、 $\theta > 0$ で変化させると最初は扇形 AOB の点 A であるが、角度 θ が大きくなると点 A から点 B へ移る。 $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$ だから、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ のときが点 A が移る角度である。これから、

$0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ のときは、 $x = 0$ である点 A で最小となり、 $y = 1$ 。

また、このとき、 $0 < \sin \theta < \frac{1}{2}$ より、 $0 < \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} < \frac{1}{2}$ すなわち、 $a > \sqrt{3}$ である。

$\frac{\pi}{6} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のときは $0 \leq a \leq \sqrt{3}$ であり、 $x = \frac{2\pi}{3}$ である点 B で最小となり、 $y = \frac{\sqrt{3a-1}}{2}$ である。

以上より、 $0 \leq a \leq \sqrt{3}$ のとき、 $\frac{\sqrt{3a-1}}{2} \leq y \leq \sqrt{a^2 + 1}$

$\sqrt{3} < a$ のとき、 $1 \leq a \leq \sqrt{a^2 + 1}$

《5/8》

$0 \leq x \leq 2$ を満たすすべての x に対して、不等式 $2x^2 - (2a+3)x + (a+6) \geq 0$ が成り立つように、実数 a の値の範囲を求めよ。

【解答】 $2x^2 - 3x + 6 \geq 2ax - a$ これから、 $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$, $g(x) = 2ax - a$ とすると
 $f(x) \geq g(x)$ ($0 \leq x \leq 2$) である。

$y = g(x)$ は、定点 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を通る直線より、

直線 $y = g(x)$ が 2 次関数 $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{8}$ ($0 \leq x \leq 2$) に接するとき、

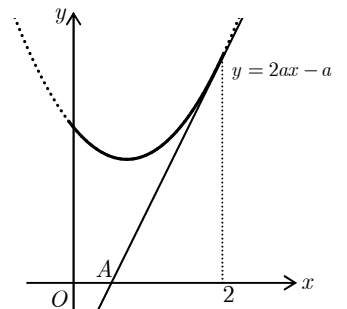
$g(x)$ の傾きは、接線の傾き以下になればよい。

2 次方程式 $2x^2 - (2a+3)x + (a+6) = 0$ の判別式を D とすると、

$$D = (2a+3)^2 - 8(a+6) = 4a^2 + 4a - 39$$

$$D = 0 \text{ より、 } a = \frac{-2 \pm \sqrt{160}}{4} = \frac{-1 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

右図で、2 次関数 $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq 2$ の範囲で考える。



以上より、 $a \leq \frac{-1 + 2\sqrt{10}}{2}$ 答

【解説】

解答は、傾き(2aの値)をどこまで小さくできるかを調べていない。

定点Aを通る直線y=g(x)の傾きaを小さくしていくと図の点B(0,6)を通るときが最小値である。

$$g(0) = 6 \text{ より, } a = -6 \quad \therefore -6 \leq a \leq \frac{-1+2\sqrt{10}}{2}$$

この誤りはみつけることはできたとする。しかし、もうひとつ大きな誤りが潜んでいる。直線y=g(x)が、放物線y=f(x)に接するとき、その接点を調べてみたらどうか。

2次方程式 $2x^2 - (2a+3)x + (a+6) = 0$ の重解が接点のx座標より、

$$x = \frac{2a+3}{4}$$

$$a = \frac{-1+2\sqrt{10}}{2} \text{ を代入すると, } x = \frac{\sqrt{10}+1}{2} > 2$$

接点は、 $0 \leq x \leq 2$ の範囲外なのである。よって、直線y=g(x)は放物線上の点C(2, 8)を通るときにaは最大となる。

$$g(2) = 8 \text{ より, } a = \frac{8}{3} \quad \text{以上より, } -6 \leq a \leq \frac{8}{3}$$

だから、解答に示されたグラフは不正確ということになる。

しかし、点Cと接点Aのxの値の差を求めると、

$$\frac{\sqrt{10}+1}{2} - 2 = \frac{\sqrt{10}-3}{2} \approx 0.08$$

このわずかな違いを図でみることは難しい。だからこそ、接線を引いて微妙な位置にある場合は、定義域に含まれているのかしっかり確認しなければならない。ちょっと重解を求めるだけの所作が解答に大きな影響を与えてしまうことになる。

なお、本問は次の解法も考えられる。

$f(x) = 2x^2 - (2a+3)x + (a+6)$ とすると、 $f(x) \geq 0$ であるためには、

$$f(x) \text{ の最小値} \geq 0 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

このように、最小値を求める問題として考えることができる。

$$f(x) = 2 \left(x - \frac{2a+3}{4} \right)^2 - \frac{D}{8} \quad (D = 4a^2 + 4a - 39)$$

放物線y=f(x)の軸の方程式は、 $x = \frac{2a+3}{4}$ である。よって、軸が定義域に含まれるかどうかで場合分けをして最小値mを求める。

$$\textcircled{1} \quad 0 \leq \frac{2a+3}{4} \leq 2 \quad \text{ie} \quad -\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{5}{2} \text{ のとき,}$$

$$m = f\left(\frac{2a+3}{4}\right) = -\frac{D}{8} \geq 0 \quad \therefore \frac{-1-2\sqrt{10}}{2} \leq a \leq \frac{-1+2\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{ここで, } -\frac{3}{2} - \frac{-1-2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}-1 > 0 \text{ より, } \frac{-1-2\sqrt{10}}{2} < -\frac{3}{2}$$

$$\frac{-1+2\sqrt{10}}{2} - \frac{5}{2} = \sqrt{10}-3 > 0 \text{ より, } \frac{5}{2} < \frac{-1+2\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{このことより, } -\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{5}{2} \quad (\text{ここで接点が外れることが示される})$$

$$\textcircled{2} \quad 2 < \frac{2a+3}{4} \quad \text{ie} \quad \frac{5}{2} < a \text{ のとき,}$$

$$m = f(2) = -3a+8 \geq 0 \quad \therefore a \leq \frac{8}{3} \quad a > \frac{5}{2} \text{ より, } \frac{5}{2} < a \leq \frac{8}{3}$$

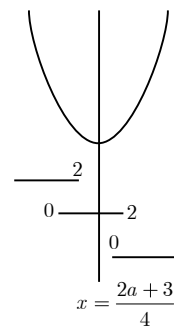
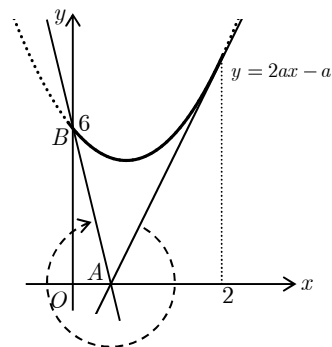
$$\textcircled{3} \quad \frac{2a+3}{4} < 0 \quad \text{ie} \quad a < -\frac{3}{2} \text{ のとき,}$$

$$m = f(0) = a+6 \geq 0 \quad \therefore a \geq -6 \quad a < -\frac{3}{2} \text{ より, } -6 \leq a < -\frac{3}{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ を合わせて } -6 \leq a \leq \frac{8}{3}$$

この方法は、逐一細かくaの値を確認でき、より一般的な解法といえる

本問は、明らかな誤りを見つけて出せるようにしている。小さなミスの発見で解答する側は安心してしまいがそれが相手のととの付け目であり、誤りはもうないと思わせ、大きな仕掛けをその背後に隠す。付け入るスキを与えないためには、まず自分の得意とする(可能な)方法で取り組み、自主主導で考えて見るべきだ。相手の掌で踊らされてはいけない。



赤球 4 個と白球 3 個をテーブルの上に一列に並べるとき、両端は赤球である確率を求めよ。

【解答】全体の並べ方は、同じものを含む順列より、

$$\frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \times 3!} = 35$$

両端の 2 個の赤球を除いた残り 5 箇所に赤球 2 個と白球 3 個を並べる場合の数は、

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \times 3!} = 10$$

$$\text{よって確率は, } \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

以上より $\frac{2}{7}$ 答

【解答】

確率は、試行における根元事象は同様に確からしく起きることを用いてすべて異なるものとして扱い計算する。だから、全事象の捉える方がポイントとなってくる。

本問のように球を並べる確率を考える場合、赤球と白球の 2 種類の色の球があってもすべて異なるものとするのが一般的だろう。すなわち、4 個の赤球は、赤い色であってもどれほどの色合いの赤なのかを示しているわけではない。また、球の大きさや形状にも違いがあるかもしれない。だから異なる 4 個の赤球とみなす。白球 3 個も同様である。これは赤球を女、白球を男に読み替えれば納得できると思う。誰も自分は他人と同じと見なされたくはないだろう。

したがって、異なる 7 個の球があるとき、これを 1 列に並べる場合の数は、 $7! = 5040$ 通り。これが全事象の場合の数である。この 5040 通りの中で両端が赤球であるものの割合がその確率になる。

まず両端の赤球を置く場合の数は、4 個の赤球から 2 個選び両端に並べるから、 ${}_4C_2 \times 2!$ 。

この並べ方の各々に対して、両端以外の 5 つの場所に残りの球を並べる場合の数は $5!$ 。

これから確率は、

$$\frac{{}_4C_2 \times 2! \times 5!}{7!} = \frac{4 \times 3}{7 \times 6} = \frac{2}{7} \quad \dots (a)$$

この結果は、本文の解答と同じになっている。これは偶然だろうか。

(a)は、異なる 7 個の球の $7!$ 通りの順列に対してどれも同様に確からしいとしている。

解答は、赤と白の球の色の区別はせず、同じものを含む順列で求めているがその並べ方は組合せによる。

①から⑦までの番号がついた列を用意する。この列から白球 3 個を置く場所の番号を選ぶ方法は ${}_7C_3$ 。

次に、赤球を置く場所は両端の①と⑦であるから、②から⑥までの番号の中で白球 3 個を置く場所の番号を選ばばいいので、その場合の数は ${}_5C_3$ である。これからその確率は、

$$\frac{{}_5C_3}{{}_7C_3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{7 \times 6 \times 5} = \frac{2}{7} \quad \dots (b)$$

(b)は、区別のある①から⑦の異なる 7 つの場所に、赤と白の球を置く場所を指定することを同様に確からしいとしていることになる。ここで、赤と白の場所が指定された 1 つの列の並びに対して、異なる赤球 4 個と白球 3 個を置く場合の数は $4! \times 3!$ である。すなわち、

$$\frac{{}_5C_3 \times 4! \times 3!}{{}_7C_3 \times 4! \times 3!} = \frac{2}{7}$$

結局、異なる 7 個の球の並べ方に対して確率を求めていたことになる。これが (a) の求め方に一致しているわけであり、解答は「同様に確からしい」ということの説明は不十分であるが間違いではない。しかし、この場合においても 7 個の球はみな区別をしていると考えられ、全事象の扱いが球の並べ方から列の並べ方に変っただけである。

このように、確率は何を同様に確からしいとして全事象を決めるかで、求め方が異なってくる。

例えば、本問では、両端に赤球を置か置かないかを考えるわけだから、両端にない球の置き方は同様に確からしく(どうでもよく)配置される。だから、両端に置く球の並べ方を全事象とする。そう考えれば両端の球の置き方は ${}_7C_2 \times 2!$ 。両端に赤球を置く場合の数は ${}_4C_2 \times 2!$ である。よって確率は、

$$\frac{{}_4C_2 \times 2!}{{}_7C_2 \times 2!} = \frac{4 \times 3}{7 \times 6} = \frac{2}{7} \quad \dots (c)$$

また、確率の乗法定理を用いると、次のように考えることもできる。

1 列に並べる①から⑦の場所を考える。このとき①の場所に赤球を置く確率は $\frac{4}{7}$ である。続いて⑦の場所に赤球を置く確率は $\frac{3}{6}$ である。②から⑥の場所に残りの 5 個の球を置く方法は同様に確からしく(どうでもよく)その確率は 1 である。以上より、

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times 1 = \frac{2}{7} \quad \dots (d)$$

このように、確率計算は、ある事象の全事象に対する割合(割り算)より、同様に確からしい確率の積(掛け算)として処理する方がいいようだ。

ところで、同様に確からしいということは、社会においては、公平であるということである。金額が絡む場合は、どこに公平さを求めるかといったら損得がないということになる。得がある状態(ラクして儲かる)から始めるのは公平さに欠けている。また多額のお金を投資(無理して振り込む)ことは損からの始まりである。世の中、上手い話はないし欲得尽くで渡れる確率は極めて低いものである。

次の連立漸化式において、 $a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = r(a_n + \alpha b_n)$ が成り立つとき、 α 、 r の値を求めよ。

$$a_1 = b_1 = 1 \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n & \cdots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = -a_n + 4b_n & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

【解答】

① + α × ② より、

$$a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = (2 - \alpha)a_n + (1 + 4\alpha)b_n \quad \cdots \textcircled{3}$$

数列 $\{a_n + \alpha b_n\}$ が、等比数列になるには、

$$1 : \alpha = (2 - \alpha) : (1 + 4\alpha)$$

であればよい。式を整理して、

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \quad \therefore \alpha = -1$$

③に代入して、 $a_{n+1} - b_{n+1} = 3a_n - 3b_n = 3(a_n - b_n)$

以上より、 $\alpha = -1$ 、 $r = 3$ 答

【解説】

連立漸化式を等比型の漸化式にするために、特性方程式の解を求める問題である。

解答に誤りはないようにみえるだろうか。もしそう思うなら、引き続き、漸化式から等比数列を作り、一般項を求めてみよう。

数列 $\{a_n - b_n\}$ は公比 3 の等比数列である。その初項は、

$$a_1 - b_1 = 1 - 1 = 0$$

ここで、ちょっと変だぞ、ということに気が付くはずだ。初項 0 だが気にせず続けていくと一般項は、

$$a_n - b_n = (a_1 - b_1)3^{n-1} = 0$$

である。すなわち、初項が 0 より、

$$a_n - b_n = 0 = 0r^{n-1}$$

公比 3 が消えてしまい、任意の r に対して式は成立してしまう。

次に、 $a_n - b_n = 0$ より、 $a_n = b_n$

よって、設問の①の漸化式より、 $a_{n+1} = 3a_n$

数列 $\{a_n\}$ は公比 3 の等比数列である。その一般項は、 $a_n = a_1 3^{n-1} = 3^{n-1}$

$$\therefore b_n = a_n = 3^{n-1}$$

このとき、

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = 3^n - \alpha 3^n = 3(3^{n-1} - \alpha 3^{n-1}) = 3(a_n - \alpha b_n)$$

すなわち、 $r = 3$ のときは、任意の α で等式は成立している。

以上より、 $\alpha = -1$ または $r = 3$ 答

妙な結論に至った理由は、数列 $\{a_n - b_n\}$ の初項が 0 になってしまうことにある。

解答は r と α の値を求めたところで、「その後、どうなるか」ということを考えず、思考を止めてしまった。その結果、本当の目的である数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ の一般項の所在を無視してしまったのである。確かに設問は、 α と r を求めることである。しかし、解答の中にある「奇妙な感触」の部分に疎かにしたのではないだろうか。解答をみると、

$$a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = (2 - \alpha)a_n + (1 + 4\alpha)b_n \quad \cdots \textcircled{3}$$

これから、数列 $\{a_n + \alpha b_n\}$ が等比数列になるためには、左辺の 2 項 a_{n+1}, b_{n+1} と右辺の 2 項 a_n, b_n の係数の比が等しいと考え、次の比例式を得ている。

$$1 : \alpha = (2 - \alpha) : (1 + 4\alpha) \quad \cdots \cdots (*)$$

これは少し乱暴な展開といえる。設問の条件である

$$a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = r(a_n + \alpha b_n) \quad \cdots \textcircled{4}$$

との整合性を「比が等しい」と解釈し進めている。本来は③と④の右辺を比較して、

$$(2 - \alpha)a_n + (1 + 4\alpha)b_n = ra_n + \alpha rb_n$$

ここで、 $a_1 = b_1 = 1$ を代入すると、

$$(2 - \alpha) + (1 + 4\alpha) = r + r\alpha$$

$$3(1 + \alpha) = r(1 + \alpha) \quad \text{より、} \quad (\alpha + 1)(r - 3) = 0$$

すなわち、 $\alpha = -1$ または $r = 3$ となる。後は、 α または r のどちらかが与えられるだけで十分であることを確認すればよい。

このように、トラップが最後に仕掛けられていると怖い。「そうですね」と相槌を打ちながら話が盛り上がり、自分にとり最善の解決策を相手が提示してくれていると錯覚してしまう。信用という言葉の裏に悪意が潜んでいる。不親切を隠すための親切であり、信用できないことを見破られないために信用という仮面を被るのである。本質を見失わず見抜くことは重要であり、そのスキルは数学でも学ぶことはできる。