不思議数との出会いの覚書

0から9までの数字が数に変わる十人十色のお話

ハンティング帽を被りパイプをくゆらせ
学問を愛する人間を探している神様

0

…存在と非存在に揺れる泡のような数

目の前にあるのに手を伸ばすと消えてしまう。数０は淡い夢のような存在かもしれません。

エレベータで降下すると，３階，２階，１階，そして次の階は地下１階になります。０階がないのに誰もそのことを不思議とは思いません。雪降る頃になり，1°，0°，−1°と温度が下がると，0°の存在を否応でも肌身で感じることでしょう。人は０の存在をときに意識したり，ときに意識しなかったり。その境界は何なのでしょうか。

０の概念はインドで十進位取りの空位を埋めるものとして考案されました。インド仏教では空の概念は教義の象徴であり，空であることと無であることを区別していました。器に水を注ぐとき，水がない状態が空であり器がないこととは違います。器そのものがないときが無なのです。数０は位取りの器であり，その中に様々に変容する数 0(Sunya)の概念が注ぎ込まれました。やがてインドを征服したイスラム教国のアラビアに０は伝わります。神は宇宙を無から創造したとするイスラム教徒は「存在しない０」の概念についても受け入れます。9 世紀になると，バグダードの数学者アル・クワリズミは算術書「Al-jabr」を著し，その中でインド数学を紹介します。従来の算盤を用いた計算とは異なり数字だけで一次方程式や二次方程式を解くことができる記数法は画期的なものであり，代数学という数学領域の基盤が確立されるのです(ちなみに Algorithm や代数学を示す Aljebra は彼の名と著書から派生した単語です)。しかしヨーロッパの国々への０の浸透は滞ります。算術書がアラビア語で書かれていたことも理由の一つですが，それ以上に，無限や無のようなあやふやな存在に対する抵抗感や，０が悪魔を呼び出す魔法陣を象る円形○に似ていることの恐れなどがキリスト教徒にはあったからです。フランスでは価値のない人間を「位取り記数法のゼロ」と呼び揶揄しました。また当時の流行歌からもそのことを読み取ることができます。

「人形が貴族になり，ロバがライオンになり，猿が王様になったら，０も数になれるだろう」

しかし 12 世紀に「Al-jabr」の翻訳が出版され，13 世紀に入ってイタリアの数学者フィボナッチが，著書「算盤の書」でインドの計算術を紹介し，複雑で難しい計算や通貨の換算を容易に処理することができるインド式計算術の素晴らしさにイタリアの商人や銀行家は飛びつきます。さらに，活版印刷の考案により書物の大量印刷が可能となったことで０の概念は火をつけたようにヨーロッパ全土に広がっていきます。ローマ数字は追放され，０および１から９の 10 個の数字で表現するアラビア数字(算用数字)の時代の訪れです。エルサレム修道院の所蔵書に当時の様子が記されています。

「すべての数は１から始まる。だがいまやそれは０からである。何とも不思議なことである」

このように０は，信仰，学問，経済の発達と微妙に絡み合い見え隠れしながら根付いていったのです。

そのため０には他の数と異なり不可侵のルールがあります。

ホテルでは０階は地上階といいます。西暦では紀元０年はなく，紀元前と紀元後をまたぐとき１年分が消えてしまっています。数学では，「０の除算は認めない」という呪文が掛けられています。

さて，日本では明治になると西洋数学が伝えられ，漢数字で表された和算は次第に算用数字の数学に淘汰されます。ところで０は日本語でどう読むでしょうか。レイ，それともゼロ，どちらでしょう。それぞれ漢字で書くと，零，○となります。二種類の読み方があるのは，日本でも数の歴史は０の存在と非存在に翻弄されたからなのです。

和算は実用的な学問であり，旅人算，鶴亀算，植木算などの算法は，測量，建築，暦法などのいろいろな分野で活用され，算盤，算木，曲尺を用いて具体的な数値を求めています。その数値は極めて精度の高い小数値でした。大工が家を建てるとき，曲尺片手に職人技で小数値を計測するのです。尺貫法では，分，厘，毛，糸，忽，微，……，空，清，浄のように小数以下の桁にも名称があります。分数で表現するとスッキリするのに，これほど小さい数に拘るのは日本人以外にはいないかもしれません。和算は小数文化の学問といえるのです。さて，このような霞のような数値を漢字では「零」と書きます。すなわち存在する 0(レイ)のことです。零はわずかの意味であり零細などの言葉や，澪などの単語にも使われています。これに対して○(ゼロ)は，位取りとして存在を表すこともありますが，無という意味もあります。

日本語はその違いをレイとゼロで巧みに使い分けています。さて，右下の文の９つの０は，どちらの読み方でしょう。

今日の欠席者は…，０人だね。
さて，天気予報では降水確率 0%の晴天だけど，
先生の心は雨で濡れている。理由はテストの結果だ。
平均 42 点で標準偏差は 0.7
前回のテストと比較すると一気に頂上から急直下して
海抜０メートルまで落ちた生徒がいる。
あり得ないことだけど３人が０点だ。
なんで sin0°の値は０と答えられないんだ。
頭の中の思考が絶対０度になって凍りついている。
この分野の理解度はほとんど０だ。

- 欠席者は，まったくいない(存在していない)のでゼロ人です。
- 天気予報の降水確率は１の位を四捨五入して示します。
  0%は 5%未満のことだから，レイ%と読みます。
- 0.7 はもちろんレイです。でもこれが，0.3010 である場合は，
  どうでしょうか。レイ.3 ゼロ１ゼロと読まないでしょうか。
- 海抜は温度と同じで０を基準とする高さなのでゼロです。
- ０点はレイ点。どうして得点がないのにレイなのでしょう。
  例えば千点満点ではひょっとしたら１点ぐらいは貰えたのかもしれません。百点満点では中間点に満たなかったという意味でレイなのでしょう。白紙の答案はゼロ点というべきかもしれません。
- 角度の 0°と正弦の値の０はもちろんゼロです。
- 絶対０度は，絶対零度と書きますね。シャルルの法則より温度の下限値の存在は証明されていますが，その下限値でも原子は僅かながら振動しているのです。そのおおよその温度が−273.15° であり，正確には分からないのでレイになります。
- ほとんど０は，ほとんど存在していないと読み替えれば，ゼロとすべきかもしれません。

どれだけ正解しましたか。存在，非存在に関わらず，少しは数０を身近に感じることができたのではないでしょうか。

1

………収束値としての根元数

数 4 の話題では、自然数の各桁の数の平方の和を繰り返すと、ほとんどの数は 4 に収束することをみました。このようにある操作の繰り返して収束する有名なものにコラッツ–角谷の予想と言われるものがあります。

> 自然数 n に対して、
> ①偶数ならば 2 で割る。
> ②奇数ならば 3 倍して 1 を加える
> この操作を繰り返し行うとき、自然数 n は最終的に 1 になる。

例えば、数 3 は、 $3 \overset{②}{\Rightarrow} 10 \overset{①}{\Rightarrow} 5 \overset{②}{\Rightarrow} 16 \overset{①}{\Rightarrow} 8 \overset{①}{\Rightarrow} 4 \overset{①}{\Rightarrow} 2 \overset{①}{\Rightarrow} 1$

このように 1 にたどり着きます(1 に収束と表現します)。他の 1 桁の数も、7 のように繰り返し操作が 16 回と多いものもありますが、最終的にはすべて 1 に収束します。2 桁の数では 1 桁に対して繰り返し回数は増え、平均で 34 回であり、一番多いものは数 54,55 がどちらも 112 回で収束します。3 桁は 62.5 回の平均で、数 871 の 178 回が最高回数です(871 と 178 という面白い関係)。4 桁は平均 87.7 回、最高は 53 個の数字が 199 回で収束します。このように回数は異なってもどんな自然数も 1 に収束しそうなのです(なお、386 から 391 までの連続する 6 つの自然数は、すべて回数 120 で収束します。この操作では同じ回数で収束する連続する自然数が多いことも特徴です)。

ではどうして 1 に収束すると予想できるのでしょうか。①と②の操作をみてみると、①の 2 で割る操作は合成数から 2 の倍数をそぎ落とし、スリム化することであり、次の操作に言い換えることができます。

> ① 2^m($m \geqq 1$)を因数にもつとき、2^m で割る(奇数化)

これに対して②は、奇数を $2k+1$ と置くと、3 倍して 1 を加えることより、$3(2k+1)+1=6k+4=2(3k+2)$

結局、この操作で奇数は偶数に変換され、①によりさらに $3k+2$ に変換されます。②は偶数化の操作なのです。

数 7 でその過程を見てみると、

$$7 \overset{②}{\Rightarrow} 22 \overset{①}{\Rightarrow} 11 \overset{②}{\Rightarrow} 34 \overset{①}{\Rightarrow} 17 \overset{②}{\Rightarrow} 52 \overset{①}{\Rightarrow} 13 \overset{②}{\Rightarrow} 40 \overset{①}{\Rightarrow} 5 \overset{②}{\Rightarrow} 16 \overset{①}{\Rightarrow} 1$$

操作は①と②が交互に繰り返されることが分かります。だからこの操作は奇数を偶数に変えてから 2 のべき乗でそぎ落としていき、4⇒2⇒1 とスリム変換をしているわけです。でも偶数化するための操作はなぜ②でなければいけないのでしょうか。例えば、②の奇数を偶数にするには 1 を加えれば終わりですが、この場合はもちろん必ず 1 に収束しますが価値のない操作といえます。それでは 5 倍して 1 を加えるとしたらどうなるでしょう。数 7 でみると、

$$7 \Rightarrow 36 \Rightarrow 9 \Rightarrow 46 \Rightarrow 23 \Rightarrow 116 \Rightarrow 29 \Rightarrow 146 \Rightarrow 73 \Rightarrow 366 \Rightarrow 183 \Rightarrow 916$$

奇数化した数が大きくなっていくことが分かり、あっという間に発散しオーバーフローになってしまいます。
3 倍して 1 を加えることでどんなことが起こっているのでしょう。

n が偶数のときは $n=2k$ とすると 2 で割ると操作後 k になります。これから自然数 n は $\dfrac{n}{2}$ の値になります。

n が奇数のときは $n=2k+1$ とすると 3 倍して 1 を加えると操作後は偶数 $6k+4$ になり、さらに 2 で割り $3k+2$ になります。

すなわち、$2k+1$ が $3k+2$ になるわけですから、自然数 n は大雑把にいうと $\dfrac{3}{2}n$ の値になります(ちょっと乱暴ですが)。

①の奇数化と②の偶数化は交互に起こることより、その回数は等しいと考えられます。そこで $2m$ 回の繰り返しをするときは、

$$n \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{3}{2}\right)^m n = \left(\frac{3}{4}\right)^m n$$

回数 m が増えると値が収束することが分かりますね。これが 5 倍のときは、$\left(\dfrac{5}{4}\right)^m$ となり発散してしまうのです。

では、「3 倍して 1 を引く」という操作は良さそうに思えます。でも数 5 を見てください。 5⇒14⇒7⇒20⇒5⇒14⇒7⇒…
5 はループになってしまい、振動という意味で発散するものがでてくるのです。
それならば②を 2 倍して 2 を加えてみましょう。 $2(2k+1)+2=4(k+1) \Rightarrow k+1$

数 n は約 $\dfrac{1}{2}$ になるから偶数の操作と合わせて $\left(\dfrac{1}{4}\right)^m$ 。この操作では 1 に収束しそうです。でもその収束回数は 4 桁の数でも最大の回数 36 回です。あまりに収束は速く、思わせぶりがなくストレート過ぎるため面白くないですね。このようにみていくと「3 倍して 1 を加える」という操作はなかなかどうして奥深いものがありそうです。そのため放浪数学者エルデシュ氏は、「数学はまだこの種の問題に対する用意ができていない」といい、氏にしては破格の 500 ドルの懸賞金を出しています。

さて、数 1 はすべての始まり、根元を表す数で、4 が終着数であるならその対極にある数といえます。ところで、自然数が 1 に収束後もさらに操作を続けていくと、1⇒4⇒1⇒4… というループになり、根元数と終着数は振り子のように反復します。

数の振る舞いもまた、人生のように輪廻転生を繰り返すのです。

2

…表裏一体の数

1ではなく2であるといったら,「第2の人生」,「2度目」,「2部」,「2軍」,「2番手」のように1の次に来る数でありちょっと遅れをとっているようなイメージでしょうか。
ドイツの詩人(東洋哲学者)のフリードリヒ・リュッケルト(1788-1866：東洋的な抒情詩がマーラーやシューベルトなど多くの作曲家を魅了し曲を付けたことで知られています)は，著書「婆羅門の知恵」の中で，数2を評して

2は疑念，分裂，不和…，2は分裂の双生児で，甘く苦い

としています。何とも否定的な表現であり，1つのものが分裂あるいは派生してできる二面的な部分を指摘しています。すなわち，表に対する裏，陽に対する陰，美に対する醜，能動に対する受動…，対立的構図を設け，善に対する悪のように，片方の引き立てるための分裂であり2つを対等に扱っているわけではないのです。
「婆羅門の知恵」にある言葉を幾つか拾ってみると，

・古いものはけっして古くない。新しいものが古くなっただけである。
・愚者は最後に，利口者は中間で，賢者のみが第一歩で目標をとらえる。
・真の友情は，前と後ろのどちらも同じもの。前から見ればバラ，後ろから見ればトゲなどというものではない。

どの言葉も，対比によって2つのうちの1つを強調していることが分かるでしょう。
では，数の世界では2の立場はどうなのでしょう。
「2つを合わせ，2で割る」という数の計算は演算の意味を考えてみると面白いものです。

$$1+1=2 \quad \Rightarrow 2\div 2=1$$

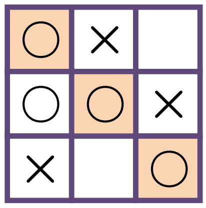
ということであり，一見すると2回の操作で1に戻ったように見えます。しかし加減の演算は外延量，乗除の演算は内包量です。感覚的にいうなら2数の和は一次元であり積は2次元ですから，次元が違っています。「2つを合わせ，2で割る」ことによって，元と異なる 1 を作り出しているのです。それは「水と塩をかき混ぜて」食塩になることであり，「水と油を混ぜて」も2層に分かれて戻るということではないのです。$\dfrac{1+1}{2}=1$ は2数の平均であり同じ数1ですが，概念的には異なっています。そう考えると数2の人が捉えるドロドロとした排他的なイメージと異なり，対等であり融合的，発展的であると言えるかも知れません。
また，$2+2=2\times 2$ のように「足しても掛けても同じ値になる2つの自然数」は「2つの2」しかありません。
2つの自然数 a,b に対して，$a+b=ab$ より，$(a-1)(b-1)=1$ これから，$a=b=2$ となることが分かります。
このようにみると2は他の数と異なり特殊な立場にもあります。
自然数 x,y,z が $x^n+y^n=z^n$ を満たすとき，$n=2$ は，ピュタゴラスの定理であり x,y,z は直角三角形の三辺を表します。しかし $n\geqq 3$ の自然数 n に対しては「そのような3つの数の組は存在しない」とフェルマーは予想しました。
2より大きいすべての偶数は，2つの素数の和で表されることを予想したのはゴールドバッハです。
このように2は容易に胸襟を開いてくれるのですが，2より大きい数は殻を閉ざすのです。
その代表的なものが素数でしょう。2は最初の素数であり唯一の偶数の素数です。ちょっと言葉遊びをすると，「2以外のすべての素数を英語で書くと必ずeを含む」ことが知られています。

1…*one*　　3…*three*　　5…*five*　　7…*seven*　　9…*nine*

1桁の奇数のどのスペリングにもeが含まれています。2以外の素数は奇数より，必ず1桁目にeが含まれるのです。ところでeは数学では自然対数の底であり，ネイピア数とも呼ばれる超越数です。eの値は，$e=2.7182818284\cdots$ であり，整数部分は2 です。これから奇数の素数の中にはスペリングとして2が潜むとみることはあまりに強引でしょうか。しかし，素数が2を用いて表現されるかどうかは素数の殻を開くために重要なことなのです。
メルセンヌは，$M_n=2^n-1$ が素数ならば，n は素数であることを証明しています。さらに，2^n+1 が素数ならば，n は2のべき乗であることが導かれます。では，この逆の「$F_n=2^{2^n}+1$ は素数である」は言えるでしょうか。フェルマーは，$F_0=3,\ F_1=5,\ F_2=17,\ F_3=257,\ F_4=65537,\ F_5=4294967297,\cdots$ と計算を続けた結果，素数であると予想しました。しかし100年後，オイラーは，$F_5=641\times 6700417$ を示し，フェルマーの予想は潰えます。その後フェルマー素数は見つかっておらず，いまだ現在まで知られているのは $M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3, M_4$ の5つしかないのです。また，
「p が素数である正 p 角形のうち，定規とコンパスだけで作図可能なものは p がフェルマー素数のときのみである」
ガウスが証明したこの定理により，新しいフェルマー素数の発見は，最大の素数を見つける道であると同時に正多角形の作図可能性を調べることにもなるのです。$n>5$ であるフェルマー素数を探す研究はいまも続けられています。
さて，このように数2は，独立性，特殊性を内在しながらも他の数の拡張に大きく影響を与え，まさに表裏一体の面を併せ持つのです。そしていま，2は1(表)と0(裏)の2つの数字で万物を表裏で表現する世界へと我々を誘います。
そう，2進法で構築される電子の世界です。2進法での数の表現可能性を最初に示したのはライプラッツでした。
「ここには光と闇が書き込まれている。空虚な深みと形なき闇はゼロと無になるが，光を放つ神の霊は全能の1となる」
彼は，1を神，0を無とみなし，陰陽の2つの数だけで表現される表裏の世界に神秘的な何かを感じていたのでしょう。
そして，情報社会の現在では，0と1に変容した2は深く深く電子データの中に浸透し，拡散しています。新しい世界の女王となった数2は，唯一神として君臨しているのです。

3

………最善の選択を模索する数



小さい頃、3 目並べ(Tic Tac Toe)にハマった人は多いことでしょう。

ルールは、図のような 3×3 の 9 つのマス目がある盤にプレイヤーである 2 人が〇と×を交互に書き込みます。最初に、縦横斜めのいずれかに自分が書く記号(〇,×)を書き並べた方が勝者になります。

このゲームは盤など用意しなくても紙と鉛筆(あるいは地面と棒)があればいつでもできます。さらに先攻と後攻が書く〇×の数は最大でそれぞれ 5 手、4 手ですから勝敗までに要する時間は 1 分足らずであり、手軽にできるゲームとして昔から世界中で遊ばれています。

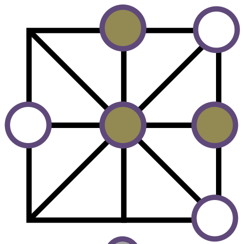
イギリスのモリス、フィリピンのタパタン、ケニアのシシマ、中国の三子棋などがそうですが、面白いことに「一直線上にコマを並べると勝ち」とすることは、それぞれの国が独自に考案したルールなのです。このゲームの最古のものは、古代エジプト時代のボードゲーム「ナインメンズモリス」といわれ、「真夏の夜の夢」(シェークスピア)の第二幕第二場にも登場します。

さてゲームの勝敗は、先攻と後攻どちらが有利であるかは気になるところですが、置ける最大コマ数から先手が有利であることは明らかです。では後攻は不利かというとそうでもないのです。このゲームは、先攻と後攻が「最善の置き方」に従いゲームを進めると、、常に引き分けに持ち込めることが知られています。

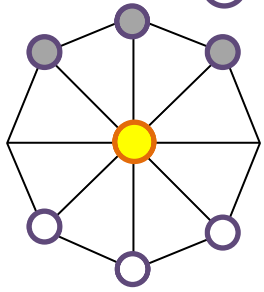
その「最善の置き方」は次のとおりです。

①2 つ並んでいれば、3 つめのマスに置く。
②相手が 2 つ並んでいれば、その 3 つめのマスに置く。
③ 2 段目の中央のマスに置く。
④隅のマスに置く。

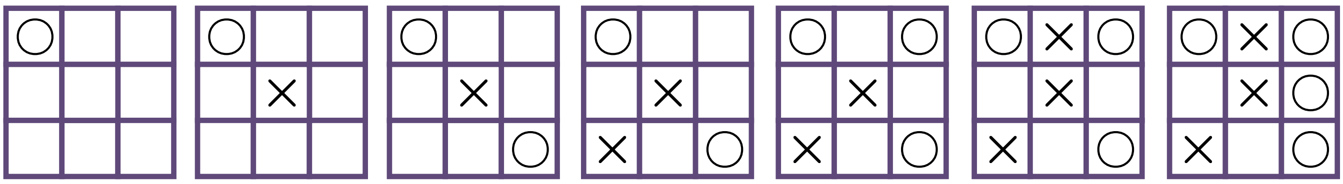
【タパタンの遊び方】
2 人がそれぞれ 3 つのコマを持ち、順に好きな格子点に置く。
置き終えたら、順に自分のコマを線で結ばれた隣の格子点に動かす。ただし、すでにコマのある格子点には動かせない。
自分のコマを先に一直線上に並べた方を勝ちとする。



【シシマの遊び方】
2 人が〇か●のコマを決め、図のように置く。2 人が順に、コマを線に沿って空いている点に動かす。中央のシシマにも動かすことはできるがすでにコマのある点には動かせない。
自分のコマを先に一直線上に並べた方を勝ちとする。



①は勝つために攻めること、②は負けないために守ることであり、当たり前のことです。③、④のマス目が確保できるどうかが勝敗の鍵を握りますが、「最善の置き方」で攻め凌ぎ合いを進めると 9 つのマスがすべて埋まり引き分けになるのです。ただこれはあくまで双方が「最善の置き方」をした場合です。先攻が③ではなく④を置き、後攻が「最善の置き方」をすると、先手が勝ってしまうこともあります。ただその場合も、後攻は「注意深く最善の置き方」をすると引き分けに持ち込めます。



このように三目並べは引き分けになる確率が高いため、1 回のゲームで勝敗が決まることは稀です。「最善の置き方」を心がけゲームの回数を重ね、集中力が切れてどちらがミスを犯すときに決着がつくのです。お手軽ではあるけど持久戦ゲームでもあるのです。そこで、三目並べの改良ゲームも作成されています。例えば、三目並べのルールを次のように変更します。

2 人がそれぞれ 3 つの〇と●をもち、三目並べの要領に交互に並べます。3 つとも並べて勝敗が着かない場合は、交互に盤上に置かれた〇と●を空いている上下、左右のマスに移動させ、一直線上に並べた方を勝ちとする。

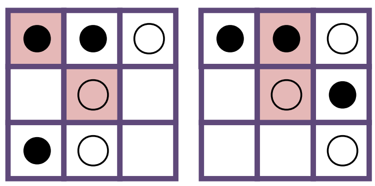
この三目並べをオヴィディウスのゲームといいます。日本では「みつならべ」として知られており、タパタン、シシマは盤を改良したものであり、さらにルールを複雑にし難易度を高くしたものがナインメンズモリスなのです。

そして、このオヴィディウスのゲームは、先攻〇の第 1 手を、盤上の 2 段目中央におくことで先手必勝になります。後攻●の第 1 手は、上段の左隅か上段の中央として考えると、先攻の第 2 手の置き方で右番の配置になるように後攻の手を操作することが可能になります。

〇と●が 3 個ずつ右図のように置かれた後は、上下と左右にコマを 1 マス移動し、ゲームを進めますが、先攻〇は残り 2 手で勝つことができます。

後攻 1 手め 上段の左隅

後攻 1 手め 上段の中央



このゲームは、最初の〇●の 3 つずつの置き方についてもルールが必要なのです。

1983 年公開の映画「WarGames」(米)は、大きな話題となりました。仮想空間での世界戦争シミュレートゲームが、パソコンの暴走により現実の核戦争の危機を引き起こしそうになるという内容でしたが、そのラストで、クラッカーである主人公は米ソのコンピュータにアクセスし、三目並べのゲームを組み込みます。対戦を始めた両国のコンピュータシステムは、「最善の置き方」で応酬し、引き分けを繰り返すうちにやがて「勝者はいない」ことを学ぶのです。

数 3 は、社会を作る数と言われます。夫婦 2 人に生まれる一粒種は家族を平和にします。2 人の後の 3 人目の子どもの誕生は、こどもたち 3 人の情緒と生活を安定させます。3 本足の椅子がガタつくことなく床に固定されるように、三位一体を表す数 3 は、いつでも最善の方法を模索し選択しているのです。

4

4 は陽の目をみない数です。1 は根源を表す神性の象徴、2 は偶数で唯一の素数である極性を示し、3 はあらゆる現象の背後に常に伏在し 9 を従えています。では 4 はどういった性質を持つのでしょう。一番小さな合成数であり、「物質界を秩序づける数」と言われ、座標により平面を 4 分割することで世界を統合しているといいながら、3 点で決定する平面に、4 つめを加えることでバランスを失い平面を壊してしまうこともあります。他の数の活躍に比べると何となく疎まれている印象はあります。

でも 4 にはとても不思議な性質が潜んでいます。

4 を平方した数 16 の各位の数の平方の和を求めてみましょう。

$$1^2+6^2=37$$

次に 37 についても同様に各位の数の平方の和を求め、この操作を値が 4 以下になるまで続けていきます。

$$3^2+7^2=58 \Rightarrow 5^2+8^2=89 \Rightarrow 8^2+9^2=145 \Rightarrow 1^2+4^2+5^2=42$$

$$\Rightarrow 4^2+2^2=20 \Rightarrow 2^2+0^2=4$$

8 回の操作で 4 に戻りました。では、他の数はこの操作でどんな数に収束するでしょうか。

5 は平方して 25。以降は次の通り。

$$2^2+5^2=29 \Rightarrow 2^2+9^2=85 \Rightarrow 8^2+5^2=89 \Rightarrow 8^2+9^2=145$$

$$\Rightarrow 1^2+4^2+5^2=42 \Rightarrow 4^2+2^2=20 \Rightarrow 2^2+0^2=4$$

これも 8 回目に 4 に収束します。これを、100 以下の自然数について調べてみた結果が右表になります。大半が 4 に収束し、次が 1,2,3 と続きます。ただし、2 の平方は 4 ですから実際には 2 の欄にある 2,11,78,87 は 4 に収束します。また、3 についてもさらに平方して 9 とみると、右表から 9 は 4 に収束することが分かります。

結局 100 以下の数で 1 に収束するものは 20 個。そして 4 に収束するものは 80 個であり、この 2 数以外の収束値はないのです。

では、1000 以下の自然数はどうなっているか調べてみると、857 個が 4 に収束します。100 以下の 80%から 85.7%に増えました。10,000 以下で 4 は 8558 個。ちょっと 1 が巻き返しました。100,000 以下では 4 は 85,623 個。1,000,000 以下では、856,929 個。どうやら 85%の値で落ち着いてきそうです。また、収束するまでの最高回数をみると、

100 以下　14 回　1,000 以下 15 回　10,000 以下 15 回　100,000 以下　16 回

そして、1,000,000 以下でも僅か 16 回で収束してしまいます。

なお、3 は平方することで収束値を 4 とみることができましたが、3 のままでみると、1000 以下で収束するのは、3 と 111 しかありません。111 は、

$$1^2+1^2+1^2=3$$

で 1 回で収束してしまうのですが、これ意外にないのも驚きです。ところが 10,000 以下になると一気に 69 個に増えてしまいます(これでも少ない個数ではありますが)。

さて、それでは計算のルールを「平方の和」から「立法の和」に変えるとどうなるでしょう。

4 の立法数 64 に対して、

$$6^3+4^3=280 \Rightarrow 2^3+8^3+0^3=520 \Rightarrow 5^3+2^3+0^3=133$$

$$\Rightarrow 1^3+3^3+3^3=55 \Rightarrow 5^3+5^3=250 \Rightarrow 2^3+5^3+0^3=133$$

分数を小数展開したときに循環節 3 で繰り返されるように、無限ループに入ります。

また、2,3,5 はそれぞれ、371,153,371 になるとそれ以降は無限小数のように繰り返されます。

すなわち、これから、

$$3^3+7^3+1^3=371$$

$$1^3+5^3+3^3=153$$

という面白い結果が得られます。

ついでに 1～10 について 4 乗も調べてみましょう。

1 と 10 はもちろん 1 に収束しますが、ところが、2 から 9 までは、

……,13139,6725,4338,4514,1138,4179,9219,……

1 以外のすべての一桁の数でこの循環節 7 のループになります。いったい何が起こっているのでしょう。

No.	1	2	3	4	
1	1	2	3	4	50
2	7	11	(111)	5	51
3	10	78		6	52
4	13	87		8	53
5	19			9	54
6	23			12	55
7	28			14	56
8	31			15	57
9	32			16	58
10	44			17	59
11	49			18	60
12	68			20	61
13	70			21	62
14	79			22	63
15	82			24	64
16	86			25	65
17	91			26	66
18	94			27	67
19	97			29	69
20	100			30	71
21				33	72
22				34	73
23				35	74
24				36	75
25				37	76
26				38	77
27				39	80
28				40	81
29				41	83
30				42	84
31				43	85
32				45	88
33				46	89
34				47	90
35				48	92
36					93
37					95
38					96
39					98
40					99

「平方の和」だけが、1 と 4 に収束することは驚きです。1,3,9 といった多くの数が、合成数の中に内存し潜んでいるのに対して、4 はもっと先にある到達の数ではないでしょうか。日本では 4 は「死」に繋がり敬遠されますが、その「死」は終焉であるけど、来世を意味するものと考えれば、4 は崇高な数といえるのです。

5

………鳩の巣原理のモデル数

（問）適当な自然数を５つ選んで書き並べ、何個かを選んで和を求めると、
その中には５の倍数が必ず存在します。何故でしょうか。

例えば、

314　1592　653　58　979　（円周率の並び）

を選んでみましょう。この中の幾つかの和で、５の倍数になるものが存在するということです。５の倍数は１の位の和が０または５になればいいから、そうなるような数の組合せは簡単に探せます。

左から３番目以降の和　653　58　979　　左から２番目と３番目の和　1592　653

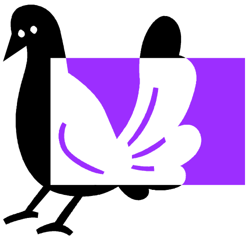
これらは５の倍数です。不思議だけど、当たり前のよう気もします。ですが条件を

適当な自然数を７個選んで書き並べ、何個かを選んで和を求めると、
その中には７の倍数が必ず存在する。

７の倍数の判定が先ほどより優しくないことより、もう当たり前ではなく、不思議度は格段にアップしましたね。
実は、n 個に対して、n の倍数の存在が証明できるのですが、それは５の倍数の証明と何も変わりません。
その証明のコアとなるのが「鳩の巣原理」(部屋割り論法)と言われるものです。
鳩の巣原理とは、鳩の数と鳩が入る巣箱の数の関係を表す性質です。

「$n+1$ 羽の鳩が、n 個の巣箱に入るとき、どれかの巣箱には必ず２羽以上の鳩が入る」

当たり前ですね。でもこの当たり前のことから当たり前でないことが導かれるのです。
さて、(問)の証明の前に補題となる次の問題を鳩の巣原理で示してみましょう。



適当な自然数を６つ選ぶと、その中には２数の差が５の倍数になるものが存在する。

選んだ６つの自然数を５で割ると、その余りは、0,1,2,3,4 の５つの数のいずれかになります。自然数は６つあるわけですから、鳩の巣原理より、余りが等しい自然数は２つ以上存在することが分かります。その余りを r とすると、２つの自然数 a,b は、

$a=5m+r$、$b=5n+r$　（$0 \leqq r \leqq 4$）

と表すことができます。これから、$a-b=5(m-n)$。よって２数の差は５の倍数になります。
この問題をみると当たり前の事実がちょっと揺らいできますね。では、これを用いて(問)の解答をしましょう。
選んだ５つの数をそれぞれ、a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 とし、この５つの数を用いて新たに次のような６つの数を作ります。

$$b_0=0,\ b_1=a_1,\ b_2=a_1+a_2,\ b_3=a_1+a_2+a_3,\ b_4=a_1+a_2+a_3+a_4,\ b_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

明らかに $b_i\ (0 \leqq i \leqq 5)$ は、右の数ほど大きくになっています。ここでこれら６つの数から２数 $b_i, b_j\ (i<j)$ を選び、b_j-b_i を計算すると鳩の巣原理よりその値は５の倍数であるものが存在します。ところが、b_j-b_i は $a_k\ (1 \leqq k \leqq 5)$ の幾つかの数の和の形になっています。すなわち、これから問いの証明ができたことになります。(選んだ数は、元々の数列 a_k の並びの一部であることも分かります)。そしてこの証明のプロセスをみると、

適当な自然数を n 個選んで書き並べ、何個かを選んで和を求めると、
その中には n の倍数が必ず存在する。

同様に一般化された性質が導かれることが分かります。ただし、$n=5$ の場合と異なり具体例での検証は難しくなっています。
例えば $n=7$ のときは、(また円周率の並びを抜き出すと)

31,41,59,26,53,58,97　⇒　26+31+41=98　31+41+58+59=189

存在することは分かっていますが実際にどのような組合せか調べることは大変になっています。
だから今回の話題の数５は、鳩の巣原理の具体例として分かり易い数であり、そこから具体例は分からなくとも一般化できるモデルとなる数なのです。さて、鳩の巣原理で得られる数の性質をもう一つ紹介しましょう。

２の倍数でも５の倍数でもない数は、何倍かすると必ず数 111……11111(各桁の数がすべて 1)になる。

２でも５でもない数は簡単に見つけられますがその数が 111……1111 で割り切れることを示すことは大変です。
その保証は鳩の巣原理で示すことができます。

２の倍数でも５の倍数でもない数を n とし、$n+1$ 個の数を $a_m=\sum_{k=0}^{m}10^k\ (0 \leqq m \leqq n)$ とします。すなわち、$a_0=1$、$a_1=11$、$a_2=111$、…ということです。これらの $(n+1)$ 個の数を n で割ると鳩の巣原理より余りが等しい数が２個以上あります。その２個の数の差の絶対値は、111……1100……0000 の形になり、この数は n で割り切れます。ところが n は 10 の倍数ではないから、n は 111……11 の倍数になり、その存在が証明されました。
具体的なことは分からないけどその存在は確認することができる。このことは、人生において「今取り組んでいるいろいろな経験がどのような結果を生むかは分からないけど、その中には最終的には自分にとって最善のものが必ずある」、そんな教訓を数達はいっているようにも思えるのですが。

6

6はそれ自身を除く約数1,2,3の和がもとの数6に等しい性質をもち、ユークリッドはこれを完全数と命名しました。6は自然数で最初に現れる完全数ですが、ギリシャ時代では他の意味においても完全であることの象徴でした。

ピュタゴラス学派が発見した最初のピュタゴラス数3,4,5は、三平方の定理である

$$3^2+4^2=5^2$$

を満たすだけでなく、その周の長さの半分は6であり、その面積もまた6になります。

ピュタゴラス学派は、最初の偶数2を女性数、根元の数である1を除く最初の奇数3を男性数と考え、その積である6を健康、愛そして結婚を表す数としています。互いに離れることのない結婚はまさに完全であることの象徴なのです。後世、聖アウグスティヌスは「6は完全ゆえに、神は世界を6日間で作り上げ、その6日間の神の仕事がなければ世界はたいらのままであったろう」と述べています。

女性数2と男性数3を1辺とする立方体の体積の積は、$2^3\times3^3=216$ですが、ピュタゴラスはこの数を神聖視したと言われています。6の累乗は最後の桁が常に6になるため循環的な数であり、6の3乗である216日は受胎の後、胎児が母体に留まる最短の日数と考えられました。そして、古代ギリシャの書物には、ピュタゴラスの輪廻転生の周期もまた216日であると記されています。その転生で彼は過去に植物であったこと、動物であったことを主張し、自然界すべてのものが幸福になれると信じていました。さらには太陽系のすべての惑星(ピュタゴラスは宇宙をコスモスと名づけました)に生物が生息しており、地球から遠く離れるほどその生命体は人類より進化しているとも考えました。だから創始者であるピュタゴラスを学派の人達は地球外の高度な生命体(宇宙人)であると見ていたようです。

そして数は純粋であり、物質的な変化に影響を受けることのない神のように尊大であり、「万物は数である」とし、「数はもっとも知恵あるもの」と考えました。自然界のモノの基準である数は粒子(有理数)でなければならず、学派は粒子論を説くようになり、白い衣服をまとう教団へと転じていきますが、やがて無理数の発見により教義は決壊し滅んでしまいます。

しかしその思想は、ピュタゴラスの影響を受けたプラトンへと受け継がれます。プラトンの著書「饗宴」は、彼の師であるソクラテスに招かれた5人の客がギリシャ神話のエロス神を称える対話で進められる恋愛論ですが、6を神聖化した愛と結婚が語られるのです。著書「メノン」では、ソクラテスに「魂は不死であり、その輪廻の過程ですべてのことを経験してきており、学ぶことはそれを想い起こすことである」(アナムネーシス:想起説)と語らせ、ピュタゴラスの思想を発展させています。

また、プラトンの著書「国家」の第8巻には、後にプラトン数と呼ばれる不可解な数の記述がありますが、ここにも完全数6が隠されています。数3,4,5はそれぞれ、政治家、市民、法律を表し、これを3辺とする直方体の体積60は国家を意味すると考えました。その体積の4乗である12,960,000は国家の存続日数であり、この聖数がプラトン数であると後世の学者は分析しています。プラトン数は、年に換算すると36,000年(1年は360日とします)。これらのすべての数は6により形成されているのです。

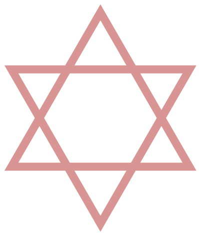
そして数3,4,5の立方数の和は、

$$3^3+4^3+5^3=6^3$$

この等式は、1辺の長さ6の立方体は1辺の長さが3,4,5である3つの立方体に分割できることを示しています(実際、もとの立方体を8片に切り離すことで3つの立方体が組めることが知られています)。連続した3つの整数x, y, z, wに対して、

$x^n+y^n+z^n=w^n$と分解することができるのは、$6^3=216$以外にはなくこの美しい数216もまた聖数と考えられました。

なお、イスラム圏ではこの世を立方体の6面のカゴとみなし、人間はその中に捕らえられており、視覚、聴覚、触覚、味覚、嗅覚の五感と地、水、風、火の四大に束縛されて抜け出ることはできないと考えました。



また、ヘルメス神秘主義の六芒星形は、上向き、下向きの2つの正三角形を組合せて作られますが、上向きの三角形は、善・努力・創作の象徴、下向きの三角形は、物質・悪・破壊の象徴であると考えられ、これにより精神ー物質、神ー混沌、空間ー時間の両極を示すことになり、宇宙が形成されると説いています。

どちらも、ギリシャ思想と比較すると、ネガティブな神秘性に包まれていますが、それでも世界の創造という面では同じ価値観に基づいているのです。

さて、近世、216を魔法陣の中に封じ込めたパズリストがいます。その名はデュードニー。

彼は、縦、横、斜めの積が一定になる3×3魔法陣で、その積が一番小さいものを発見しました。その積は6の3乗の216であり、右のような魔法陣が作られます。歴史(思想史)に登場する6に対する彼なりの解釈なのでしょうか。

12	1	18
9	6	4
2	36	3

もう一つ、6の不思議な性質を紹介しましょう。

連続する3つの整数で一番大きな数が3の倍数であるものを考えます(連続する3整数は必ず3の倍数になります)。その最小のものは1,2,3であり、その和は$1+2+3=6$。これが完全数の定義でした。最大数が3の倍数である連続する3つの整数で次に現れるのは、4,5,6ですが、その和は$4+5+6=15$。次に、15の各位の数の和を求めると、$1+5=6$。また6になりました。ひょっとしたらと思いませんか。その予想を適当な数で調べてみましょう。例えば、214,215,216とします。

$$214+215+216=645 \Rightarrow 6+4+5=15 \Rightarrow 1+5=6$$

このように、各位の数の和を1桁になるまで計算することを続けていくと、その最終的な和は必ず6になるのです。プラトン数についても計算して、同じ結論になることを確認して下さい。

このように人類が数6を聖数化する以前に、既に神によって数6には輪廻転生のシステムが組み込まれていたのです。

7

………カレンダーマジック数

毎月 22 日は何の日か知っていますか。

正解は、「ショートケーキの日」。ショートケーキが日本で初めて売られた記念日かというとそうではありません。カレンダーで 22 日の上(前週の同じ曜日)に位置するのは 15 日。だから「イチゴが上に載っている日」なのだそうで、ケーキ屋さんが考えたちょっとしたウィットある美味しい日なのです。

カレンダーの日にちは週 7 日を 1 行として配置されるため、曜日を表す各列の中の日にちは、公差 7 の等差数列になります。

この性質を用いた簡単なカレンダー・マジックを紹介しましょう。

日	月	火	水	木	金	土
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

カレンダーのある月から、縦 3 列、横 3 行を選びます。選んだ正方形の中には 9 つの日にちがありますが、その和を 9 つの中から一番小さい日にちだけを知ることで求めることができるでしょうか。

日	月	火	水	木	金	土
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

8	9	10
15	16	17
22	23	24

⇒

-8	-7	-6
-1	0	1
6	7	8

例えば、右図の正方形を選ぶときの和はどうなるでしょう。すべてを足さなくとも、最小数である 8 をみるだけで瞬時に 144 になることを知ることができるのです。まず正方形内の中央にある日にち 16 に注目します。この日数を 9 つの日にちから引いてみましょう。数の配置のしくみがみえてきます。正方形内の日にちの和が 0 になることが簡単に分かるでしょう。ということは、もともとの日にちの和は、減じた 16 日の 9 つ分ですから $9\times16=144$ になります。では、中央の数 16 と一番小さい日にち 8 との関係はどうなっているのでしょうか。16 日は、8 日を 1 日進め、その 1 週間後ですから、$8+1+7=16$

すなわち、一番小さい日にちに対して中央にある日にちは 8 を加えたものということになります。以上のことから、「最小数に 8 を加え 9 倍」を計算することで和が簡単に求められるのです。例えば、一番小さな日にちが 3 日であれば、作られる正方形内の日にちの和は、$(3+8)\times9=99$ となります。

次に、この原理を用いてもう少し複雑なマジックを考えてみましょう。

カレンダーのある月の日にちを、縦 4 列、横 4 行になるように囲み 16 個選びます。一番上の行の中から適当な日にちを選び、その日にちと同じ行(週)と同じ列(曜日)にある日にちすべてに×をつけます。次に 2 行目の週では、×のついていない日にちを選び、同様に、同じ行と列にある日にちに×をつけます。3 行目、4 行目についても同じルールで日にちを選びます。結局、各週から 4 つの日にちを選んだことになりますが、この 4 つの数の総和を最初に囲んだ 16 個の日にちを見るだけで瞬時に求めることができるでしょうか。

各週の日にちはどう選ばれるか分からないわけですからその和を予測することは難しいように思われます。そこで実際に下図のように選んでみましょう。この場合、8 日、13 日、23 日、28 日の順に選ぶので、和は、$8+13+23+28=72$ となります。

さて、一見するとバラバラに日にちを選んでいるような見えたのが、書き抜いてみると、同じ行と同じ列を消すことにより、実は各週から選ばれる曜日はみな異なっていることが分かります。

~~6~~	~~7~~	8	~~9~~
13	14	~~15~~	16
20	21	~~22~~	23
27	28	~~29~~	30

⇒

~~6~~	~~7~~	8	~~9~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~
~~20~~	21	~~22~~	23
~~27~~	28	~~29~~	30

⇒

~~6~~	~~7~~	8	~~9~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23
~~27~~	28	~~29~~	~~30~~

⇒

~~6~~	~~7~~	8	~~9~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23
~~27~~	28	~~29~~	~~30~~

6	7	8	9
6	7	8	9
6	7	8	9
6	7	8	9

その関係を見やすくするために、2 行目、3 行目、4 行目の各週の日にちから、それぞれ 7,14,21 を減じてみましょう。右図のように、各週の日にちはすべて 1 週目と同じになり、和は、各週からどのように日にちを選んでも必ず $6+7+8+9=30$ になることが理解できます。これに先ほど減じた日数の和、$7+14+21=42$ を加えればいいわけですが、これでは直接選んだ 4 つの数を足した方が計算は速いわけで、瞬時というわけにはいきませんね。でもよく考えてください。各週からどのように日にちを選んでもいいのであれば、正方形の左上の隅から右下の隅の対角線方向に選んでもいいのです。このとき、ある週の翌週の日にちは、1 日進め、さらに 1 週進めた位置にあることより 8 を加えた日にちになります。これから、対角線上に並ぶ数は、公差 8 の等差数列になり、その和は

「対角線の両端にある最小数と最大数を加えたものの 2 倍」

になります。すなわち、$(6+30)\times2=72$。これででたらめに選ばれているように思える和が瞬時に求められるのです。

1 年 365 日は、7 で割ると、$365=7\times52+1$ であり、52 週と 1 日分になります。7 で割り切れればすっきりするように思えますが、そうすると毎年元旦は同じ曜日になってしまい、何か 1 年間がマンネリ化してしまいそうです。1 日分ずれるからこそ曜日の変化を楽しめ、一年の計は元旦にありと決意し、新年に気持ちを新たにすることができるのかもしれません。数 7 は、人間の背中をほんのちょっと押してくれているようです。

8

…無限(∞)の数

奇数の平方同士の差は８の倍数になります。奇数を平方すると、

$$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1 \quad (n\geqq 2)$$

すなわち「奇数の平方は８の倍数プラス 1」です。その差を求めると、連続する２整数の積 $n(n+1)$ は偶数であることより８の倍数になることは明らかですが、このことを古代の人達はすでに知っており、このような数８の数学的性質や神秘性に関心と興味を持っていたようです。８の興味深い性質をもう一つ。

ナルシスト数は３桁の数では「各位の数の３乗の和が元の数に一致する数」であり、153($1^3+5^3+3^3=153$)がよく知られています。８はナルシスト数でありませんが、３乗してから各位の数の和を求めてみると、

$$8^3=512 \rightarrow 5+1+2=8$$

すなわち、8 は「3 乗の各位の数の和が元の数に一致する数」なのです。なんとなくナルシスト数に似ていますね。でもナルシスト数ほど自己愛的ではなく、もっと根源的な数であり、仮にリビドー数とでも命名しましょう。
17 もその仲間です。

$$17^3=4913 \rightarrow 4+9+1+3=17$$

このような「3 乗の各位の数の和が元の数に一致する」リビドー数はそれほど多いわけではありません。なぜなら、数が大きくなると３乗した数の各位の和がもとの数の大きさに追いつかなくなってしまうからです。

数 N は n 桁の数とします。$10^{n-1}\leqq N<10^n$ ですから、$10^{3n-3}\leqq N^3<10^{3n}$ 。
このとき N^3 の各位の数の和が最大になるのは、$(3n-1)$ 桁の数で各位の数がすべて９の場合です(3 乗してそういう数があるとすればですが)。そのとき各位の数の和は、$(3n-1)\times 9=27n-9$ になります。すなわち $N=27n-9$ ということです。N の最小数は 10^{n-1} ですが、$n=3$ のとき最大数 N は $N=72$ であり、N の最小数 100 より小さくなっています。このことより、このような数 N がある桁 n は $n=1,2$ の場合だけなのです。

次に N^3 は最大５桁の数なので、

$$N^3=a\times 10^4+b\times 10^3+c\times 10^2+d\times 10+e \ (0\leqq a,b,c,d,e\leqq 9)$$

とおきます。ここで $a+b+c+d+e=N$ であることより、

$$N^3=a\times 10^4+b\times 10^3+c\times 10^2+d\times 10+(N-a-b-c-d) \quad \text{より} \quad (N-1)N(N+1)=9(1111a+111b+11c+d)$$

右辺は９の倍数より、$N=9k, 9k\pm 1$ の形の数であることがわかります。
以上より N の候補は、1,8,9,10,17,18,19,26,27,28,…,89,90,91,98,99 の 33 個です。
これらの数に対して実際に計算すると、残りの仲間が見つかります。

$$18^3=5832 \rightarrow 5+8+3+2=18$$

$$26^3=17576 \rightarrow 1+7+5+7+6=26$$

$$27^3=19683 \rightarrow 1+9+6+8+3=27$$

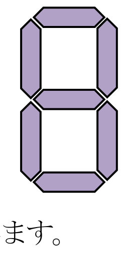
結局、リビドー数は、1,8,17,18,26,27 の僅か６個しかないのです。

リビドー数は、特別な数である１を除けば、最初の数が８であり、３乗して各位の数の和を求め、その数をまた３乗し各位の数の和、これを繰り返すと無限に８が再生されていきます。８の文字は 90° 回転させると無限∞を表します。ミトラ神秘主義においては、7 つの門の次に開かれる神の山で８つめの門は光の国でありまさに無限の果であるわけです。キリスト教においても、キリスト復活は８日目であるため８は聖数として敬い、８は人間の体と魂に永遠なる至福を保証するとしています。

また、中国では、森羅万象を４つに分類しさらにそれを２つに分けるという考え方があり、八卦、八音、八方、八徳、八仙、八紘など８をひとまとめにすることが多く、家には永遠の繁栄と発展をもたらすものとして、赤い∞の紐を幾重にも合わせた縁起物の装飾品が飾られています。北京オリンピックの開催式は 2008 年８月８日午後８時 08 分の８尽くしの時間に開催されたことは大きな話題になりました。

無数の島からなる日本は、古代は大八州と呼ばれ、日本人も８を聖数と考えました。八百万の神、八岐の大蛇、八幡様といった神を示す言葉が多く残っています。漢数字「八」は末広がりの字体であることから永遠と繁栄を示す吉数であり、八百屋、八面六臂、八百八町、八重桜で用いられる８はたくさんということを意味するのです。

そして数八は「当たるも八卦、当たらぬも八卦」、「一か八かの勝負」、「口八丁手八丁」、「七転び八起」、「傍目八目」のように庶民の間に末広がりに広がっていきます。
このように、多くの国の歴史の中で８は信仰と生活に密接に結びついているのです。



８は２の３乗ですから、リビドー数でこれをさらに３乗することは２の９乗を計算することになります。数２はパソコンの基盤となる２進法を示す数です。8bit パソコンの開発競争からコンピュータは急速に発達し、世界は情報化社会の歩みを始めました。８は時代の寵児の象徴であり、アナログ社会からデジタル社会への転換を与えた数なのです。アナログ時代に数８は無限を表しましたがデジタル時代の数８はデジタルパネルの点滅で右図のように浮かびます。デジタル数８は０から９のすべての数を含み無限の繰り返しを映します。
ここにも永遠があるのです。

9

4桁の数を紙に書いてください。
次に、その4桁の各位の数を適当に並べ替えて新しく4桁の数を作ってください。
2つの4桁の数を大きい数から小さい数を引いてください。
計算した各位の数から適当に一つの数を選んで○で囲ってください。
それでは、○で囲った以外の数を私に教えてください。
○印のついた数を私が当てて見ましょう。

例えば、4287を紙に書いたとすると、

4287 ⇒（数を入替え）7482 ⇒（最初の数との差をとり）7482－4287 ⇒（どれか一つに○で囲み）319⑤

この数字の中の3，1，9を教えてもらい、○のついた5を当てるというものです。
次のようにして調べます。
まず5以外の各位の数を聞いた順に足していきます。和が2桁になったら、その数の各位の数の和を求め1桁の数にした後に、数を聞いて足していきます。この操作を繰り返します。

319 ⇒ 3＋1＋9＝13 ⇒ 1＋3＝4

ここで、最後に残った1桁の数4を9から引いた数が○で囲った数になります。この理由を考えて見ましょう。
始めに紙に書いた数を N とし、その数字の並びを $abcd$ とします。

$$N = a\times 10^3 + b\times 10^2 + c\times 10 + d = a(999+1) + b(99+1) + c(9+1) + d = 9(111a + 11b + c) + (a+b+c+d)$$

この式から、9の倍数は、各位の数の和が9の倍数かどうかで判定できることが分かりますね。和が2桁以上になったらまた各位の数の和を求めてそれが9の倍数かどうかを判定すればよいのです。
次に、各位の数を適当に並べ替えて作った4桁の数を例えば M とし、その数字の並びを $bdac$ とします。

$$M = b\times 10^3 + d\times 10^2 + a\times 10 + c = 9(111b + 11d + a) + a + b + c + d$$

2数 M, N の差を求めると、$a+b+c+d$ がなくなりますから、その差は9の倍数となります。したがって、各位の数の和は9となるから、3つの数の和が分かれば、残りの一つの数は9から引いて求められるのです。

このことは、各位が $a_{n-1}a_{n-2}\cdots\cdots a_2 a_1 a_n$ なる n 桁の数 N であっても成立します。

$$N = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\cdot 10^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}(10^{k-1}-1) + \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} 9(10^{k-2} + 10^{k-1} + \cdots + 1) + \sum_{k-1}^{n} a_{k-1}$$

これから、N を9で割った余りは $\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}$ を9で割った余りに一致します。各位の数を適当に入れ替えて差をとるとその値は9の倍数になります。この数当てマジックは桁数を増やすことで、神秘性は深まります。計算は大変になりますが……。

このように、ある数の各位の数の和を求めて、それが2桁になったらまた分解して求めるという操作を続けて得られる数を、もとの数の数字根(Digital Root)といいます。例えば、

13578 ⇒ 1，3，5，7，8 ⇒ 1＋3＋5＋7＝16，8 ⇒ 7，8 ⇒ 7＋8＝15 ⇒ 1＋5＝6

数13578の数字根は6です。
和が2桁の数16であるとき、さらに1＋6＝7として計算することは、16を9で割った余りを求めることでもあります。

9で割った余りは、9を取り去ることであるため、この操作を九去法といいます。九去法はインドで考案され、ヨーロッパに広がり、加法・減法(応用すると乗法・除法)の四則演算の験算法として古くから用いられていました。
その方法は、数字根が加減法の計算の後も変わらないことを利用したものです(ガウスの導入した合同式によりその性質を調べることができます)。

$$a \equiv b,\ c \equiv d \pmod n \Rightarrow ac \equiv bd,\ a+c \equiv b+d,\ a+k \equiv b+k \pmod n$$

各位の数字が0，1だけで構成される72の倍数で最小のものを求めてみましょう。

72＝9×8

72は9の倍数です(72⇒ 7＋2＝9とみても分かります)から、各位の数字が1のみで構成されるレピュイット数で最小の9の倍数を考えると、111，111，111。また、72は8の倍数ですから、その中で0，1のみで構成される最小の数は1，000。このことから、求める数は、

111，111，111，000

となります。

さて、特異な性質を有する数達の数字根を調べると、その多くは9になっています。

123456789，1089，2925，3087，142857，6174，297，………

サム・ロイドは「9のもつ神秘性はひとえに9が十進法の最終数字であるという単純な事実に基づいている」と指摘していますが、数達のエンターティナーたる資質は9なるDNAによって決定されているようです。