

# 不思議数との出会いの覚書

～50篇の素敵な出会いのエピソード



ハンティング帽を被りパイプをくゆらせ  
学問を愛する人間を探している神様

平凡な数なんてありやしない

みんなすべて Only One

## 出会いを始める前に……

本稿は、「不思議数との出会いの覚書」(18篇)とその続編「不思議数との出会いの覚書Ⅱ」(32篇)の集冊版です。

「不思議数との出会いの覚書」は、数学を生業とする仕事柄、いろいろな機会や場所で触れることのできた数たちを書き留めてあったものをまとめたもので、「どうして?」「へーっ!」といった疑問符や感嘆符といった素朴な感情を大切にしながら数たちを紹介しています。だから数学の苦手な人や中学生にも読める内容になっています。これに対して「覚書Ⅱ」はその方向性が少し違ったものになってしまいました。数たちとの出会いが加齢とともにめっきりと減ってしまい、渴望から次第に数の話題を求め探そうになりました。ExcelVBA やら多倍長計算ソフトを用いて重箱の隅を楊枝でほじくるように、数の性質を強引に引き出そうとしたのです。

その結果、内容は話題にした数とは直接関係がないものや極めてマニアックなものとなってしまい、その根拠の説明や論理の証明のために行を費やしてしまいました。だから「覚書Ⅱ」は数学的な色がより強くなり、新教育課程の「課題学習的」な傾向になっているかと思います。今回、2つの覚書の話題が合わせて50篇になったこともあり1つにまとめたのですが、そういった方向性の違いもあり篇と篇を繋いでいる統一感が希薄になってしまったかも知れません。だから1日1篇の短編として捉えていただいたほうがいいでしょう。

でも、数との出会いが減っても、根本にあるコンセプトは崩さなかつたつもりです。それは、話題にする数は、「極力グループに属さず、群れの外にいる孤高の数達」であり、一人だけでも立派に主張し、舞台を闊歩できるエンターティナーであるということです。だから、円周率 $\pi$ や黄金数といった超有名数にご遠慮いただき、その代わりに円周率の歴史に潜む近似数、未来の美を予感させるプラスチック数のように有名数の陰に隠れていて、ハーディいわく、ちっとも深刻でないけど個性的な数にスポットを当てています。

ただ、「個性のない平凡な数など存在しない」のも事実です。

仮に、平凡な数が存在したとしたら、その集合の中での最小(最大)数は、「平凡な数の最小(最大)値」という特性をもち、平凡な数から除外されます。残った平凡な数にはまた最大・最小数が存在するわけですから、結局最後に残るのは1つの数になります。ただこの最後の数は、平凡の中の平凡という極めて平凡でない数になってしまいます。

右の図をみてください。4人ずつ4列に並んだ生徒が「前ならえ」をしています。各列で目立つ(特徴・特性のある)生徒は誰でしょう。1列目は2人めの頭がちょっと大きいようです。2列目は3人めの体格が他の生徒より大きく、3列目は4人目がさぼって腕をあげていません。では、4列目で目立つ生徒は誰でしょう。

4列目は1から3列めにいた目立つ生徒がみんないる個性的な集まりであるため、逆に1番前の何にも特徴のない標準的な生徒が目立ってしまい、そのことが、特徴・特性になってしまいます。

今度は、次の4つの数で平凡な数はどの数か考えてみてください。

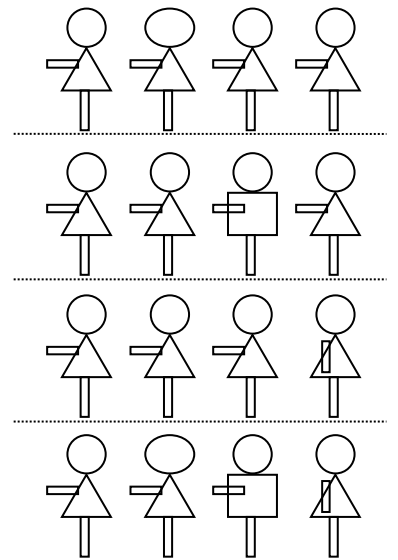
2, 4, 6, 9

答えは何になりましたか。2は素数です。4は平方数、そして9は奇数ですね。これらの特性は他の数と異なるものです。そうすると答えは6になるのでしょうか。6は奇数でも素数でも平方数でもありません。ということはそのどの特性でもないことが6の特性になるとも言えます。でも数学的にみると6の約数は、1, 2, 3, 6ですが、6自身を除く約数の和を求めると、 $1+2+3=6$ 。このような数を完全数といい、その中でも6は、4の倍数でないただひとつの完全数という際立った特性を有するのです。

先ほどの前ならえは、特性の基準となる要素が「頭、体、手」に固定されているのでそこで区別をつけているわけですが、本当は「メガネをかけている、性別、髪の毛の色、人種」などいろいろな特性が隠されています。数についても同様ことがいえ、さらに数にはその数に対する人の「思い入れ」も影響しています。記念日、ラッキーナンバーなどその人だけが特別と考える数もあるわけです。だから結局は4つの数に特性の区別などつけることはできなく、すべての数が特別であり only one ということになります。

だから本編で取り上げた数は浅学であるわたしがみる(判断する)ことができたものだけなのです。日々営まれる数の歴史の中で本編の話題は僅か50篇に過ぎません。書き足りなかった分はあなただけの特別な数を育ててください。

なお、本編にはページは振っていません。ページで数の個性の序列を付けたくなかったからです。でもそれでは数の検索をしづらくなってしまいますので、数を読み上げたときに最初にある数で順にまとめ記載しました(まあ、結局、人間の都合で序列をつけてしまったこととなります)。だから0, 1, 2, 3, …9の順番になるのですが、0の特性はあまりに有名なため最初から取り上げるつもりはありませんでした。そうしてならべてみると、数字8が一度も登場していないことが分かりました。8からは、立方数、正八面体、末広がり、いろいろな特性が頭に浮かびます。もともと覚書は、出会った数を脈絡もなく書き綴っただけですから、数の登場回数に偏りがでてしまうのは当然かもしれません。わたしの中では数字8は感情的にも記憶に残っていませんでした。でも登場しなかったことがその数の特性を絞らず固定化しなかったともいえます。だから数8の特性は想像した人の数だけきつと生まれることでしょう。





数4の話題では、自然数の各桁の数の平方の和を繰り返すと、ほとんどの数は4に収束することをみました。このようにある操作の繰り返して収束する有名なものにコラッツ-角谷の予想と言われるものがあります。

自然数  $n$  に対して、  
 ①偶数ならば2で割る。  
 ②奇数ならば3倍して1を加える  
 この操作を繰り返すとき、自然数  $n$  は最終的に1になる。

例えば、数3は、 $3 \xrightarrow{\text{②}} 10 \xrightarrow{\text{①}} 5 \xrightarrow{\text{②}} 16 \xrightarrow{\text{①}} 8 \xrightarrow{\text{①}} 4 \xrightarrow{\text{①}} 2 \xrightarrow{\text{①}} 1$

このように1にたどり着きます(1に収束と表現します)。他の1桁の数も、7のように繰り返し操作が16回と多いものもありますが、最終的にはすべて1に収束します。2桁の数では1桁に対して繰り返し回数は増え、平均で34回であり、一番多いものは数54,55がどちらも112回で収束します。3桁は62.5回の平均で、数871の178回が最高回数です(871と178という面白い関係)。4桁は平均87.7回、最高は53個の数字が199回で収束します。このように回数は異なってもどんな自然数も1に収束しそうです(なお、386から391までの連続する6つの自然数は、すべて回数120で収束します。この操作では同じ回数で収束する連続する自然数が多いことも特徴です)。

ではどうして1に収束すると予想できるのでしょうか。①と②の操作をみても、①の2で割る操作は合成数から2の倍数をそぎ落とし、スリム化することであり、次の操作に言い換えることができます。

①  $2^m$  ( $m \geq 1$ ) を因数にもつとき、 $2^m$  で割る(奇数化)

これに対して②は、奇数を  $2k+1$  と置くと、3倍して1を加えることより、 $3(2k+1)+1=6k+4=2(3k+2)$   
 結局、この操作で奇数は偶数に変換され、①によりさらに  $3k+2$  に変換されます。②は偶数化の操作なのです。

数7でその過程を見てみると、

$7 \xrightarrow{\text{②}} 22 \xrightarrow{\text{①}} 11 \xrightarrow{\text{②}} 34 \xrightarrow{\text{①}} 17 \xrightarrow{\text{②}} 52 \xrightarrow{\text{①}} 13 \xrightarrow{\text{②}} 40 \xrightarrow{\text{①}} 5 \xrightarrow{\text{②}} 16 \xrightarrow{\text{①}} 1$

操作は①と②が交互に繰り返されることが分かります。だからこの操作は奇数を偶数に変えてから2のべき乗でそぎ落としていき、 $4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$  とスリム変換をしているわけです。でも偶数化するための操作はなぜ②でなければいけないのでしょうか。例えば、②の奇数を偶数にするには1を加えれば終わりですが、この場合はもちろん必ず1に収束しますが価値のない操作といえます。それでは5倍して1を加えるとしたらどうなるでしょう。数7でみると、

$7 \Rightarrow 36 \Rightarrow 9 \Rightarrow 46 \Rightarrow 23 \Rightarrow 116 \Rightarrow 29 \Rightarrow 146 \Rightarrow 73 \Rightarrow 366 \Rightarrow 183 \Rightarrow 916$

奇数化した数が大きくなっていくことが分かり、あっという間に発散しオーバーフローになってしまいます。3倍して1を加えることでどんなことが起こっているのでしょうか。

$n$  が偶数のときは  $n=2k$  とすると2で割ると操作後  $k$  になります。これから自然数  $n$  は  $\frac{n}{2}$  の値になります。

$n$  が奇数のときは  $n=2k+1$  とすると3倍して1を加えると操作後は偶数  $6k+4$  になり、さらに2で割り  $3k+2$  になります。

すなわち、 $2k+1$  が  $3k+2$  になるわけですから、自然数  $n$  は大雑把にいうと  $\frac{3}{2}n$  の値になります(ちょっと乱暴ですが)。

①の奇数化と②の偶数化は交互に起こることより、その回数は等しいと考えられます。そこで  $2m$  回の繰り返しをするときは、

$$n \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{3}{2}\right)^m n = \left(\frac{3}{4}\right)^m n$$

回数  $m$  が増えると値が収束することが分かりますね。これが5倍のときは、 $\left(\frac{5}{4}\right)^m$  となり発散してしまうのです。

では、「3倍して1を引く」という操作は良さそうに思えます。でも数5を見てください。 $5 \Rightarrow 14 \Rightarrow 7 \Rightarrow 20 \Rightarrow 5 \Rightarrow 14 \Rightarrow 7 \Rightarrow \dots$   
 5はループになってしまい、振動という意味で発散するものがでてくるのです。

それならば②を2倍して2を加えてみましょう。 $2(2k+1)+2=4(k+1) \Rightarrow k+1$

数  $n$  は約  $\frac{1}{2}$  になるから偶数の操作と合わせて  $\left(\frac{1}{4}\right)^m$ 。この操作では1に収束しそうです。でもその収束回数は4桁の数でも最

大の回数36回です。あまりに収束は速く、思わせぶりがなくストレート過ぎるため面白くないですね。このようにみていくと「3倍して1を加える」という操作はなかなかどうして奥深いものがありそうです。そのため放浪数学者エルデシュ氏は、「数学はまだこの種の問題に対する用意ができていない」といい、氏にしては破格の500ドルの懸賞金を出しています。

さて、数1はすべての始まり、根元を表す数で、4が終着数であるならその対極にある数といえます。ところで、自然数が1に収束後もさらに操作を続けていくと、 $1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1 \Rightarrow 4 \dots$  というループになり、根元数と終着数は振り子のように反復します。

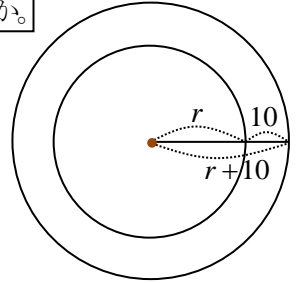
数の振る舞いもまた、人生のように輪廻転生を繰り返すのです。

$2^{64}$  は天文学的な大きさの数ですが、 $2^{10} = 1024 \approx 1000$  と大雑把にみると、 $2^{64} = 2^4 \times (2^{10})^6 \approx 16 \times (10^3)^6 = 16 \times 10^{18}$ 。

京の位にまで達する値ですがグンと数が身近になったことは間違いないでしょう。数 10 は、10 進数の世界で生活するヒトの尺度基準となる数であり、古代のピタゴラス学派は「すべてを包括し、すべてに境界をつける母」と名づけました。10 はもっとも親しみのある数ですから、10 を例にとりて問題を考察すると一般化もしやすいのです。数 10 を用いた計算からちょっと信じられないような結論を導いてみましょう。

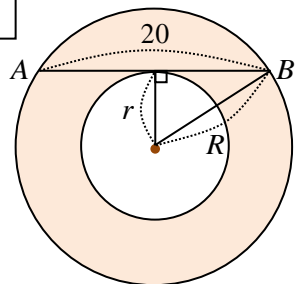
問1) 円 C の半径を 10 cm 長くして同心円を描くとき、円 C よりどれだけ円周は長くなりますか。

円 C の半径を  $r$  cm とすると円周の長さは  $2\pi r$ 。半径を 10 cm 長くした円の円周の長さは  $2\pi(10+r)$ 。円周の差を求めると、 $2\pi(10+r) - 2\pi r = 20\pi$ 。約 62.8 cm 長ければいいことになります。ここで不思議なことが起こっているのが分かりますか。この問題では円 C の半径は与えられていません。ということはどんな円であっても半径を 10 cm 長くするにはそのもとの円の円周の長さを 62.8 cm 増やせばいいということです。それが地球の赤道に沿ってロープを巻いたものを、地上より 10 cm の高さまで上げたとしてもです。そしてこのことは円周の長さだけでなく、面積においても拡張できます。



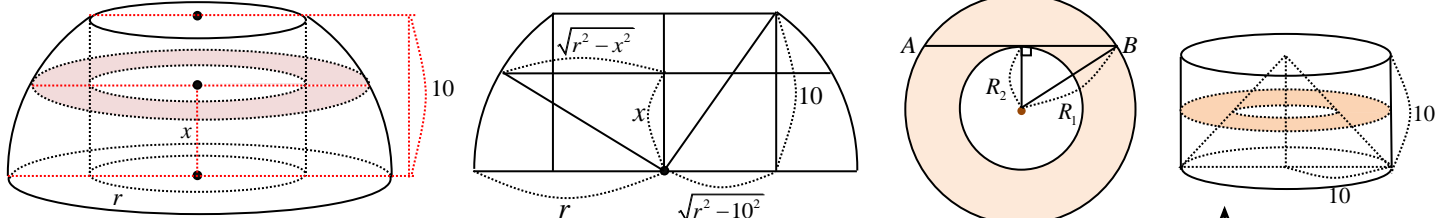
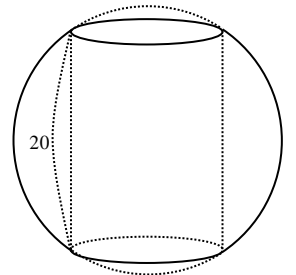
問2) 2 つの同心円があり、外側の円の弦 AB が内側の円に接しています。AB = 20 (cm) のとき、外側の円の内部および内側の円の外部にあるドーナツ状の部分の面積を求めなさい。

2 つの同心円の半径は与えられていないので、半径をそれぞれ  $R, r (R > r)$  としましょう。外側、内側の円の面積はそれぞれ  $\pi R^2, \pi r^2$  です。また、2 つの円の半径には、 $R^2 - r^2 = 10^2$  という関係が成立しています。2 円の面積の差を求めると、 $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 100\pi$ 。この結果もまた、同心円の大きさに関わりなく決定してしまうのです。このどちらの問題も円の半径に関係ないのであれば、問 1 の円や問 2 の内側の円の半径を限りなく 0 にしても成立するはず。そう考えると問 1 の増える円周の長さは半径 10 の円周である  $20\pi$ 、問 2 の増える面積は半径 10 の円の面積  $100\pi$  ということがいえるのです。



問3) 球の真ん中に深さ 20 cm の円筒状の穴をあけると、残りの部分の体積を求めなさい。

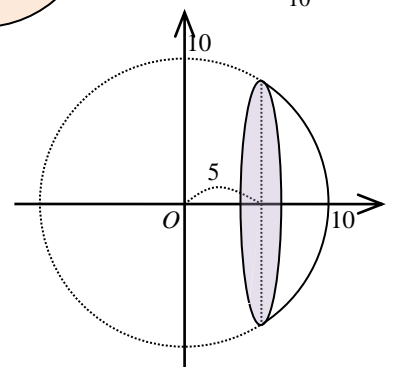
答えの予想はできますか。円柱の底面の円の半径を限りなく 0 に近づけると円柱の体積は 0 になるため、残りの部分は半径 10 cm の球の体積に等しいはず。すなわち  $\frac{4000}{3}\pi$  ということになります。確かめてみましょう。球の半径を  $r$  とし、半球の部分の体積を  $V$  とします。半球の底面の円から高さ  $x$  の点で底面に水平な平面で切るときにできるドーナツ面の面積  $S$  を求めます。外側の円の半径は  $R_1 = \sqrt{r^2 - 10^2}$ 、内側の円の半径は  $R_2 = \sqrt{r^2 - x^2}$ 。外側の円の弦で内側の円に接するものの長さは  $2\sqrt{R_1^2 - R_2^2} = 2\sqrt{10^2 - x^2}$ 。問 2 の考え方からドーナツ面の面積は、 $S = \pi(10^2 - x^2) = 10^2\pi - \pi x^2$ 。ここで  $x$  の値を 0 から 10 まで変化させると、 $10^2\pi$  は半径 10 の円の面積より、円を高さ 10 まで積み上げた円柱の体積になり、 $V_1 = 10^3\pi$  が得られます。次に  $\pi x^2$  は半径  $x$  の円の面積ですから、半径が 0 から 10 まで変化させて円を積み上げると、底面は半径 10 の円で高さが 10 の円錐ができます。その体積は  $V_2 = \frac{1}{3}10^2\pi \times 10 = \frac{10^3\pi}{3}$  です。以上より、 $V = V_1 - V_2 = \frac{2}{3} \times 10^3\pi$ 。半球の部分を 2 倍すると予想通りの結果が得られました。



惑星のような大きな球体であっても 10 cm の深さになるような円柱をくり抜くことは可能です。そのときのくり抜かれた残りの部分の体積が一定であり、丸めると小さな球になるなんて信じられるでしょうか。そしてこのことを用いると積分計算を必要とする部分球の体積を求めることも可能になるのです。例えば半径 10 の球を右図のように 2 つの部分球に分けると、

$$\text{小さい方の体積 } V \text{ は、 } V = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{3}\pi \times 10^3 - \left( \frac{4}{3}\pi \times 5^3 + 75\pi \times 10 \right) \right\} = \frac{625}{3}\pi$$

この計算の意味、あなたは分かりますか。



11のお茶目な悪戯はたくさんありますが(数 1001 参照)、ここでは速算をサポートする 11 の活躍をお見せしましょう。

下のような表を用意します。さて、適当な数を思い浮かべ、表の値の欄の 1 回目、2 回目に書いてください。表は 12 と 31 の場合です。その 2 数の和を 3 回目の値の欄に書きます。次の値の欄には、2 つ左手前、1 つ左手前の数の和を書き、以下続けていきます。結構計算は大変ですね。でもまだまだ序の口。本当の計算はこれからです。今度はその下の和の欄に、値の和を計算します。記入する欄の左の数と上の数を足すと和は求められます。下の表は、10 回繰り返したものです。

さてこの表の中で、7 回目の 2 段目の数 308 で、10 回目の 3 段目の数 3388 を割ってみましょう。

$$\frac{3388}{308} = 11 \text{ 隠れていた } 11 \text{ が姿を表しました。}$$

回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
値	12	31	43	74	117	191	308	499	807	1306
和	12	43	86	160	277	468	776	1275	2082	3388

このしくみを最初の 2 数を  $a, b$  として、同様に表を作って調べてみましょう。

回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
値	$a$	$b$	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	$3a+5b$	$5a+8b$	$8a+13b$	$13a+21b$	$21a+34b$
和	$a$	$a+b$	$2a+2b$	$3a+4b$	$5a+7b$	$8a+12b$	$13a+20b$	$21a+33b$	$34a+54b$	$55a+88b$

表から、7 回目の値は  $5a+8b$ 、10 回目の和は  $55a+88b$  になります。

$$55a+88b = 11(5a+8b)$$

これから、7 回目の値を 11 倍すると 10 回目の和が得られるわけです。

この性質は、数当てゲームに応用できます。

適当な 2 数を選び各回の値を計算させます。さんざん計算をさせてから、「大変でたね」といって労をねぎらい、追い打ちを掛けるように

「さあ、では 10 回目までの値の和を求めてください。」

あなたは 7 回目の値が  $n = 5a+8b$  になることは知っているわけですから、相手が途中で計算ミスをしていたら、指摘して訂正させてください。計算が終了したら、おろろろに、 $n$  と  $n$  の桁をひと桁ずらしたものを足し、「その値は〇〇ですね」と答えるのです。周りの人はあなたの速算力に舌を巻くことでしょう。実際に偉いのは数 11 なんですよ。

この 11 が次に現れるのは何回目か調べてみましょう。右表は、各回の値と和の  $a, b$  の係数をそれぞれ書き抜いたものです。20 回目、30 回目の和は、

$$6765a+10945b = 11(615a+995b)$$

$$832040a+1346268b = 11(75640a+122388b)$$

いずれも 11 の倍数であり、どうやら 10 回ごとに悪戯を仕掛けているようです。

ただし、この 2 つの回については、対応する値はなく、数当てゲームにすることはできません。

ところで、右表をみると、同じ数字が何度も登場していることが分かるでしょうか。

$n$  回目の値の  $a$  の係数は  $(n-1)$  回目の値の  $b$  の係数に等しく、

$(n-1)$  回目の値の  $b$  の係数は  $(n-2)$  回目の和の  $a$  の係数に等しく、

$(n-2)$  回目の和の  $a$  の係数は  $(n-3)$  回目の和の  $b$  の係数+1 に等しく

なっています。値や和の生成法を考えればそのことは理解できると思います。

ところでちょっと値の  $a$  の係数を 3 回目以降、抜き出してみましょう。

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …

この数列の一般項を  $F(n)$  とし、 $n$  回目の値を  $P(n)$ 、和を  $S(n)$  とすれば、

$$P(n) = F(n-2)a + F(n-1)b \quad S(n) = F(n)a + \{F(n+1) - 1\}b \quad (n \geq 3)$$

$P(n)$ 、 $S(n)$  は  $F(n)$  を用いて表すことができます。

この  $F(n)$ 、どこから会ったことがありませんか。

そう、フィボナッチ数列です。上の関係式は実はフィボナッチ数列の性質を示して

いるのです。フィボナッチ数列の隣り合う 2 数の比の極限は、自然界の美と調和の頂点に君臨する黄金比を表します。だから 11 は、大胆にも美の女王に悪戯を仕掛けているのです。王女様の愛着のドレスを等間隔にかじって穴を空けてしまったネズミのように。

No.	値の $a, b$ の係数		和の $a, b$ の係数	
	$a$	$b$	$a$	$b$
1	1	0	1	0
2	0	1	1	1
3	1	1	2	2
4	1	2	3	4
5	2	3	5	7
6	3	5	8	12
7	5	8	13	20
8	8	13	21	33
9	13	21	34	54
10	21	34	55	88
11	34	55	89	143
12	55	89	144	232
13	89	144	233	376
14	144	233	377	609
15	233	377	610	986
16	377	610	987	1596
17	610	987	1597	2583
18	987	1597	2584	4180
19	1597	2584	4181	6764
20	2584	4181	6765	10945
21	4181	6765	10946	17710
22	6765	10946	17711	28656
23	10946	17711	28657	46367
24	17711	28657	46368	75024
25	28657	46368	75025	121392
26	46368	75025	121393	196417
27	75025	121393	196418	317810
28	121393	196418	317811	514228
29	196418	317811	514229	832039
30	317811	514229	832040	1346268

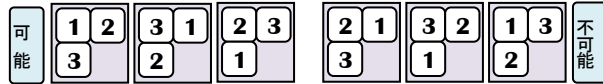


15 は平方数である 16 より 1 だけ少ない数。その 1 だけ少ないことを用いてあるパズルが作られ、後に多くのパズル愛好家の頭を悩ませることになります。縦横 4 分割の 16 のマス目がある正方形の盤に 1~15 の数字を入れた正方形のピースを組み込みます。1 つ空いたスペースがあるので、他のピースはそこに移動することができます。デタラメに置かれたピースをスペースに移動させながら順番に並べていくこのゲームを 15(スライド)パズルといいます。数字を絵柄に変え、絵を完成させる幼児用の玩具もありますね。さて、このパズルは、1978 年にアメリカのパズリストであるサム・ロイド (Sam Loyd) が発表した次の問題により一躍脚光を浴び、爆発的に売れたといえます。

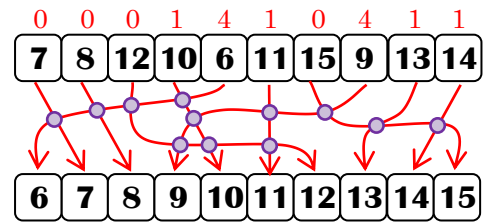
「14 と 15 のピースだけを入れ替えた状態から 1~15 の順に並べ直すことができるか」

ロイドはこの問題に 1000 ドルの懸賞金を掛けましたが、誰も賞金を手にすることはできませんでした。実は並べ替えは不可能だったのです。それを知っていたロイドは確信犯ということになります。

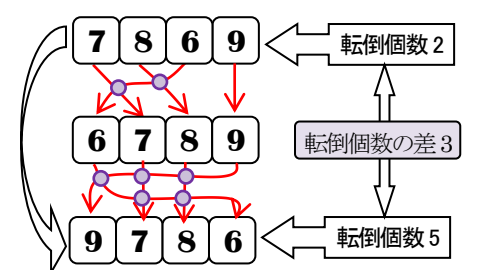
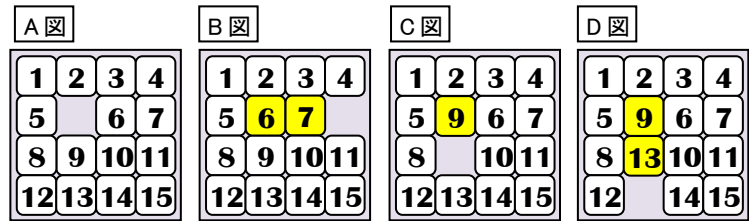
ではなぜ不可能なのでしょう。2x2 のスライドパズルでピース移動の動きをみてみましょう。1, 2, 3 の数字の並べ方は 3! = 6 通りですから、3 つの数のすべての配置は下図になります。このうちスライドして完成できるものは 3 通り、できないものも 3 通りです。この 2 つのグループで共通していることは、左上のピースから時計回りに数字の並びをみていくと、完成できるものは 1 → 2 → 3、できないものは 1 → 3 → 2 であり、できないものは数字 1 と 3 のように 1 組の数字の順番が入れ替わっていることが分かります。ここに完成できる、できないの秘密がありそうです。ちょっと、ピースの移動の見方を変えてみましょう。



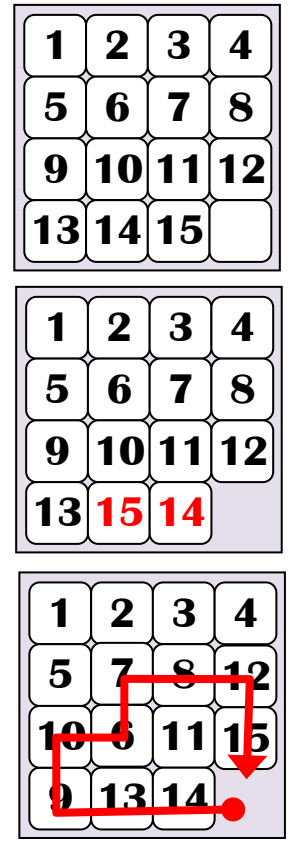
ピースはスペース位置に移動するわけですから、「ピースの移動はスペースの移動」と考えることができます。スペースは必ず右下隅にくるようにすると、スペースが上や左に移動した場合は必ずどこかで逆にそれぞれ下や右へ動きます。したがって移動の回数は偶数回になります。これは 4x4 の 15 パズルでもスペースの移動回数は上下、左右とも偶数回になるのです。例えば右図は、左右 3 回ずつ、上下 2 回ずつの計 10 回移動した場合です。さて、この偶数回の移動で数の並びはどのように変わのでしょうか。もともとピースは 1~15 の順に昇順(小⇒大ということ)に並んでいたわけですが、移動を繰り返すことで、数が大⇒小の順に入れ替わるものができます。先ほどの 10 回のスライド移動の結果をみると 1 から 5 は不変ですが、それ以降は入れ替わり右図のような並びになります。10 の左にはそれより大きい数 12 があり、大小の入れ替わりは 1 個発生しています。6 の左はすべてそれより大きい数であるため入れ替えは 4 個です。大小の入れ替えの総数を数えると 12 個になります。このように大⇒小に入れ替わる数を転倒数と呼ぶことにします。この転倒数の個数は、入れ替え前の 6~15 の数字を図のように対応させ、同じ数字どうしが交わる回数を最小になるように結びつき、その交点の個数から求めることもできます。



転倒数がスペースの上下、左右方向への移動でどれだけ発生するのか調べてみましょう。図 A を最初の配置とします。まず左右方向に動かすとスペースが移動してもスペースが詰まるだけですから転倒数は発生しません(図 B)。もともと転倒数があるような配置についても移動により転倒数の増減は起きないことも明らかです。これに対して図 C のように数字 9 のピースを上方に一段上げると 9 は 3 つのピース 6, 7, 8 を飛び越えることになり、3 つの転倒、すなわち奇数個の転倒が発生します。スペースの移動する前と移動した後の間にある 4 つのピースに、もともと転倒がある場合は(例えば 7, 8, 6, 9 では 2 個)、移動後の転倒数の個数と(9, 7, 8, 6 では 5 個)、もとの転倒数の個数の差は奇数個になります。1 段下げた場合もこのことは成立します。2 段縦方向に上げたり下げたりした場合はもとの転倒数の個数と移動後の転倒数の個数の差は偶数個になります(図 D)。ここでスペースを最終的にもとの位置に戻すのであれば、移動により上下する段数は一致するわけですから、もとの転倒数の個数と移動後の転倒数の個数の差は必ず偶数個になるはずですが、すなわち 15 パズルはスペースが右下隅にある状態から移動し、完成後もまたスペースが右下隅に状態であるならば、始まりと終わりの偶奇は一致していて、その場合には相互の形に移動可能ということになります。サム・ロイド問題のピースの配置では転倒があるのは 15, 14 ピースだけですから転倒数の個数は 1 個であり、それを 1~15 の昇順に並べることは転倒数の個数を 0 個にするということです。これから偶奇は一致せず不可能という結論が得られるのです。サム・ロイドの出題した懸賞問題は、翌年の 1879 年に、ジョンソン、ストロイが数学的に不可能であることを証明したといわれています。2 人が賞金を手にしたかどうかは分かりませんが、その瞬間にパズル愛好家の夢が潰えたことは間違いありません。15 パズルに夢中になった人たちは、動機として懸賞問題への挑戦はあったにしても、遊んでいるうちにパズルの面白さに夢中になったいたわけ、不可能が証明されたことで、そんな知的好奇心に水をさしてしまったともいえます。真実を知ってしまうことは良し悪しなのかもしれません。



転倒数がスペースの上下、左右方向への移動でどれだけ発生するのか調べてみましょう。図 A を最初の配置とします。まず左右方向に動かすとスペースが移動してもスペースが詰まるだけですから転倒数は発生しません(図 B)。もともと転倒数があるような配置についても移動により転倒数の増減は起きないことも明らかです。これに対して図 C のように数字 9 のピースを上方に一段上げると 9 は 3 つのピース 6, 7, 8 を飛び越えることになり、3 つの転倒、すなわち奇数個の転倒が発生します。スペースの移動する前と移動した後の間にある 4 つのピースに、もともと転倒がある場合は(例えば 7, 8, 6, 9 では 2 個)、移動後の転倒数の個数と(9, 7, 8, 6 では 5 個)、もとの転倒数の個数の差は奇数個になります。1 段下げた場合もこのことは成立します。2 段縦方向に上げたり下げたりした場合はもとの転倒数の個数と移動後の転倒数の個数の差は偶数個になります(図 D)。ここでスペースを最終的にもとの位置に戻すのであれば、移動により上下する段数は一致するわけですから、もとの転倒数の個数と移動後の転倒数の個数の差は必ず偶数個になるはずですが、すなわち 15 パズルはスペースが右下隅にある状態から移動し、完成後もまたスペースが右下隅に状態であるならば、始まりと終わりの偶奇は一致していて、その場合には相互の形に移動可能ということになります。サム・ロイド問題のピースの配置では転倒があるのは 15, 14 ピースだけですから転倒数の個数は 1 個であり、それを 1~15 の昇順に並べることは転倒数の個数を 0 個にするということです。これから偶奇は一致せず不可能という結論が得られるのです。サム・ロイドの出題した懸賞問題は、翌年の 1879 年に、ジョンソン、ストロイが数学的に不可能であることを証明したといわれています。2 人が賞金を手にしたかどうかは分かりませんが、その瞬間にパズル愛好家の夢が潰えたことは間違いありません。15 パズルに夢中になった人たちは、動機として懸賞問題への挑戦はあったにしても、遊んでいるうちにパズルの面白さに夢中になったいたわけ、不可能が証明されたことで、そんな知的好奇心に水をさしてしまったともいえます。真実を知ってしまうことは良し悪しなのかもしれません。





自然数の倍数判定法で、7 や 11 に関しては不思議数との出会いの覚書の数「7×11×13」で紹介しました。ここでは 19 の倍数判定法を見てみましょう。よく知られている方法としては次があります。

各位の数に上位から順に 2 のべき乗をかけて加えてできた数が 19 の倍数である。

例えば、 $4389 \Rightarrow 4 \times 2 + 3 \times 2^2 + 8 \times 2^3 + 9 \times 2^4 = 228$  ここで  $228 = 12 \times 19$  であることより 19 の倍数になります。

なお 228 についてはさらに倍数判定法を用いて  $228 \Rightarrow 2 \times 2 + 2 \times 2^2 + 8 \times 2^3 = 76 = 4 \times 19$  としてもよいでしょう。この判定法が成立する理由を示しましょう。自然数  $N$  を、 $N = \sum_{k=0}^n a_k 10^k$  ( $a_k$  は  $0 \leq a_k \leq 9$  の自然数) とします。

$$2^n N = 2^n \sum_{k=0}^n a_k 10^k = \sum_{k=0}^n 2^{n-k} a_k 20^k$$

ここで、 $20^k = (19+1)^k$  ですから、 $20^k$  を 19 で割った余りは 1 です。すなわち、

$$2^n N \equiv \sum_{k=0}^n 2^{n-k} a_k \pmod{19}$$

$2^n$  は 19 の倍数ではないことより、

$$\sum_{k=0}^n 2^{n-k} a_k \equiv 0 \pmod{19}$$

となります。

ただこの倍数判定法は桁数が増えると 2 のべき乗の計算が大変になってきますね。そこで別の判定法を紹介しましょう。

数を十の位以上の数  $a$  と一の位の数  $b$  に分けるとき、 $a + 2b$  が 19 の倍数である。

4389 であれば、438 と 9 に分け、 $438 + 9 \times 2$  を計算します。この計算も面倒なように思えますが、右のようにオートメーション化すると簡単です。計算結果から遡っていくと、 $19 \Rightarrow 57 \Rightarrow 456 \Rightarrow 4389$  と順番に 19 の倍数が決定していきます。ではこの倍数判定法が成立する操作の背景を説明しましょう。

$$\begin{array}{r} 4389 \\ \underline{18} \\ 456 \\ \underline{12} \\ 57 \\ \underline{14} \\ 19 \end{array}$$

数  $N$  は  $N = 10a + b$  とおけます。ここで  $M = a + 2b$  が 19 の倍数であるとき、 $N$  が 19 の倍数であることを示せばいいわけです。2 式より  $a$  を消去します。 $10M - N = 19b$ 。これから  $N = 10M - 19b$  より、 $M$  が 19 の倍数であれば  $N$  も 19 の倍数であることが分かります。また、 $10M = N + 19b$  より  $N$  が 19 の倍数であるとき  $M$  は 19 の倍数も示されます。このように、1 の位の数  $b$  の 2 倍と十位という桁が 19 の数字を背景で作りに出していたわけです。そう考えるとその作り出し方はもっと別の方法もあることに気がつくでしょうか。

数を百の位以上の数  $a$  と、一の位の数  $b$  に分けるとき、 $5a + b$  が 19 の倍数である。

$N = 100a + b$  に対して、 $M = 5a + b$  を考えます。 $20M - N = 20(5a + b) - (100a + b) = 19b$

この方法でもよさそうですが、十の位以上を 5 倍しなければならないため、計算のオートメーション化は難しいですね。ところでこのような倍数判定の背景は、他の数の倍数判定についても示してくれます。

数を十の位以上の数  $a$  と、一の位の数  $b$  に分けるとき、 $a - 2b$  が?? の倍数である。

さあ、これは何の倍数になるか分かりますか。

$N = 10a + b$  に対して、 $M = a - 2b$  です。 $N - 10M = 21b$  となります。

右辺は 21 の倍数ですから、すなわち 3 または 7 の倍数です。3 の倍数については各位の数の和が 3 の倍数であれば数も 3 の倍数である判定法がありますから、これは、7 の倍数判定法と言えるのです。

$$\begin{array}{r} 21994 \\ \underline{8} \\ 2191 \\ \underline{2} \\ 217 \\ \underline{14} \\ 7 \end{array}$$

右は 21994 が 7 の倍数であることを示したものです。ただし、桁数の少ない数に対しては有効ですが、大きな数の場合には、「数を下から 3 桁ずつ区切り、偶数番目の区画の和と奇数番目の区画の和の差が 7 の倍数」という判定法の方が良さそうです。

このように 1 の位の定数倍を 2 倍、-2 倍と変えることにより、19 や 7 の倍数判定ができるということは、適当な定数倍を考えることで、他の数の倍数判定もできそうですね。

$N = 10a + b$  に対して、 $M = a + kb$  を考えてみましょう。 $a$  を消去して、 $10M - N = (10k - 1)b$ 。

- $k = 3$  のときは、 $10M - N = 29b$  すなわち、素数 29 の倍数判定
- $k = 4$  のときは、 $10M - N = 39b$  すなわち、素数 13 の倍数判定
- $k = -1$  のときは、 $N - 10M = 11b$  すなわち、素数 11 の倍数判定
- $k = -3$  のときは、 $N - 10M = 31b$  すなわち、素数 31 の倍数判定

$$\begin{array}{r} 3567 \\ \underline{21} \\ 377 \\ \underline{21} \\ 58 \\ \underline{24} \\ 29 \end{array}$$

右に数 3567 が 29 の倍数であるオートメーション計算を示しました。数を十の位以上と一の位に分割することにより、他にも素数の倍数判定を導き出せそうですね。

100個の基石が入った袋からいくつかの基石を残して取り出し、山になるように積んでください。山から7個ずつ基石を取り除いていくと、最後に5個の基石が残りました。次にもう一度山になるように積み5個ずつ取り除くと3個残りました。同様に3個ずつ取り除くと2個残りました。このことから袋に残っている基石の個数を当ててください。

取り出した基石の個数を  $N$  個とすると、問題文は次のように立式できます。

$$N = 7a + 5 \cdots \textcircled{1} \quad N = 5b + 3 \cdots \textcircled{2} \quad N = 3c + 2 \cdots \textcircled{3}$$

これを解いてみましょう。

$$\textcircled{3} \times 5 - \textcircled{2} \times 3 \text{ より、}$$

$$5N - 3N = 5(3c + 2) - 3(5b + 3)$$

$$\therefore 2N = 15(c - b) + 1 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \times 15 - \textcircled{4} \times 7 \text{ より、}$$

$$15N - 14N = 15(7a + 5) - 7\{15(c - b) + 1\}$$

$$\therefore N = 105(a + b - c) + 68$$

$a + b - c$  は整数で、 $0 < N < 100$  ですから、 $a + b - c = 0$  のとき、 $N = 68$ 。

以上より、袋に残っている基石は、 $100 - 68 = 32$  個です。

この問題は、7,5,3 で割った余りをそれぞれ  $p, q, r$  とすると、解法のオートメーション化をすることができます。

$$N = 7a + p \cdots \textcircled{1} \quad N = 5b + q \cdots \textcircled{2} \quad N = 3c + r \cdots \textcircled{3} \quad \text{より、}$$

$\textcircled{1} \times 15 + \textcircled{2} \times 21 + \textcircled{3} \times 70$  を計算すると、

$$15N + 21N + 70N = 15(7a + p) + 21(5b + q) + 70(3c + r)$$

$$106N = 105(a + b + 2c) + 15p + 21q + 70r$$

$$\therefore N = 105(a + b + 2c - N) + 15p + 21q + 70r$$

$$m = a + b + 2c - N \text{ とおくと、}$$

$$N = 105m + 15p + 21q + 70r$$

したがって、 $N$  の値は、 $15p + 21q + 70r$  に、105 を幾つか加えるか減じた値になります。

問題文は、 $p = 5, q = 3, r = 2$  の場合より  $N = 105m + 15p + 21q + 70r = 105m + 278$ 。

$N < 100$  ですから、278 から 105 を 2 回減じて ( $m = -2$  とすることです)、 $N = 68$  となります。

このように、 $15p + 21q + 70r$  を覚えておけば、どのような余りにであっても、その値を代入後、条件に合うように 105 を減ずることで元の個数を求めることができます。その操作方法からこの演算を百五減算といいます。

百五減算は、鶴亀算、旅人算と同じように江戸時代に算術として用いられていたもので、和算書「塵劫記」に記されています。もともとは中国の数学古代書「孫子算経」を出典にしています。

さて、この計算法が成立するのは、3 つの数 7,5,3 (七五三) が素数であることに依ります(差が 2 である 2 つの素数の組を双子素数といいます。3,5,7 は双子素数が 2 組ある三つ子素数といってもいいでしょう)。3 と 5 と 7 の最小公倍数は 105 であり、 $N$  が 105 以下であれば、余り  $p, q, r$  により唯一  $N$  の値が決定します。さらに、

$$15N + 21N + 70N = 106N = 105N + N$$

となることで簡便計算法が成立するのです。他の計算として

$$15N + 21N - 35N = N$$

から、 $15p + 21q - 35r$  に余りを代入することで値を求められますが、やはり引き算があるのは煩わしいかもしれません。

さて、それでは 3,5,7 の組合せを 7,11,13 で考えるとどうなるでしょうか(11,13 は双子素数)。

その積は  $7 \times 11 \times 13 = 1001$ 。だからこの算術法は千一減算、あるいはシェヘラザード減算ということになりましょうか。

$N$  を 13,11,7 で割った余りをそれぞれ  $p, q, r$  とすると、

$$N = 13a + p \cdots \textcircled{1} \quad N = 11b + q \cdots \textcircled{2} \quad N = 7c + r \cdots \textcircled{3}$$

ここで、 $\textcircled{1} \times 924 + \textcircled{2} \times 364 + \textcircled{3} \times 715$  を計算すると、

$$924N + 364N + 715N = 924(13a + p) + 364(11b + q) + 715(7c + r)$$

$$2003N = 1001(12a + 4b + 5c) + 924p + 364q + 715r$$

$$\therefore N = 1001(12a + 4b + 5c - 2N) + 924p + 364q + 715r$$

よって、 $924p + 364q + 715r$  に余りを代入すればいいことになります。たださすがにこれだけ大きな数になると大変です。

そこで、この式から  $1001p + 1001r$  を減ずると、

$$364q - 77p - 286r$$

まあ、妥協できる計算かもしれません。そう考えてみると百五減算は 7,5,3 という実に扱いやすい手頃な数で構成された庶民的な匂いのする娯楽数当てゲームといえるのです。

123の数の並びを適当に入れ替えて、2つの数の差をとってください。

$$321 - 123 = 198 = 9 \times 11 \times 2$$

9の倍数になっています。実は、どのように各位の数字の並びを入れ替えて差をとっても必ず9の倍数になります。

$$312 - 123 = 189 = 9 \times 21, \quad 231 - 123 = 108 = 9 \times 12$$

原理は簡単です。3桁の数 $abc$ を

$$abc = 100a + 10b + c$$

と表し、 $a, b, c$ を別の位に移します。百と一の位を入れ替えるとその差は $100a - a = 99a$

百の位と十の位を入れ替えるとその差は $100a - 10a = 90a$

十の位と一の位を入れ替えるとその差は $10b - b = 9b$

どのように入れ替えてもその差は必ず9の倍数になります。

だから、123と321だけが特別な性質を持っている数という訳ではありません。

すべての数が持っている性質なのですが、数達がみんな、私も私もと主張すると大変なことになってしまいますので、何事も始まりは、イチ、ニー、サンからということで、123を代表の数とさせていただきます。

もちろん、この性質は、3桁の数だけに成立するものではありません。

$n$ 桁の数で、 $s$ 桁の数 $p$ を $t$ 桁( $n \geq s > t > 1$ )に移すと、その差は、

$$p \times 10^{s-1} - p10^{t-1} = p \times 10^{t-1} (10^{s-t} - 1)$$

$10^{s-t} - 1$ は明らかに9の倍数ですから、どんな桁の数にも共通して言える性質なのです。

例えば、

$$513624 - 123456 = 390168 = 9 \times 43352$$

となります。

では、2つの数の差をとるのではなく、和をとるとどうなるでしょう。

先程の $n$ 桁の数で、 $s$ 桁の数 $p$ を $t$ 桁( $n \geq s > t > 1$ )に移すと、その和は、

$$p \times 10^{s-1} + p10^{t-1} = p \times 10^{t-1} (10^{s-t} + 1)$$

カッコの中の数は、 $s$ と $t$ の桁数の開きを考えると、

$$11, 101, 1001, 10001, 100001, \dots$$

と変化していきます。

さてこれらの数で、1と1の間に0が偶数個あるものは、

$$10^{2k-1} + 1$$

と表されますが、この数は

$$10^{2k-1} + 1 = (10+1)(10^{2k-2} - 10^{2k-3} + 10^{2k-4} - \dots + 1)$$

と変形でき、11の倍数になります。すなわち、一の位と十の位、一の位と千の位、十の位と万の位といった、2つの数の間に偶数個の数字があるように、すべての数字を並び替えた数ともとの数との和は11の倍数になります。

この性質を用いると、4桁の数に、その数字の並びを右から読んだ数を加えると、

$$2634 + 4362 = 6996 = 11 \times 636$$

11の倍数になりますが、これは、千の位と一の位、そして百の位と十の位の入れ替えをするからです。6桁、8桁の数についても同様に11の倍数になるような操作が可能です。

さて、この差と和の性質を用いて簡単な数当てゲームをしてみましょう。

一の位と十の位が異なる2桁の数を考えてください。  
次に、一の位と十の位を入れ替えた数を求め、  
①最初の数から引いた値  
②最初の数に加えた値  
を教えてください。最初に考えた数を当ててみましょう。

例えば、

$$\textcircled{1} 36 \quad \textcircled{2} 88$$

であれば、もとの数は62です。

最初の数を $ab = 10a + b$  ( $a > b$ )とすると、入れ替えた数は $ba = 10b + a$ より、

その差は  $9(a - b)$ 、その和は  $11(a + b)$  ですから、

$$(a + b) + (a - b) = 2a, \quad (a + b) - (a - b) = 2b$$

となります。したがって①を9で割った数と、②を11で割った数を求め、

和の半分、差の半分が $a, b$ となります。①の値が負のときは、正になおし、 $a$ と $b$ を入れ替えればいいわけです。

あなたも、別の数字当てゲーム、つくってみませんか。

ただの合成数であり、それといって特徴のあるものではありません。ただ、物理学では原子核が安定する中性子の個数のひとつで魔法数と呼ばれているようです(これ以外の魔法数は、2,8,20,28,50,82,126)。

今回の 184 はそれとは関係ありません。この数は電話の非通知発信ナンバーであり、「通知するのはイヤヨ」。この数字はオヤジギャグレベルのダジャレの語呂合わせから決まったという嘘のような本当の話です。

でもひょっとしたらこのダジャレ、魔法数と同じぐらい価値はあるかもしれません。

さて、この非通知番号 184 を逆手にとった面白い計算があります。184 を 6 回続けるとどうなるでしょうか。

$$184 + 184 + 184 + 184 + 184 + 184 = 184 \times 6 = 1104$$

計算結果の 1184 は「イいわよ」と読みます。「嫌よ」と断り続けられても何回もアプローチすると「イいわよ」になるのです。でもこれはあくまでジョークで、実際にやったらストーカーまがいの行為。そういう人には、次の数で応えます。

18782、これは「嫌な奴」と読みますが、もう一回同じ数を足してみましよう。

$$18782 + 18782 = 37564$$

どんな結果になるか分かりますか。「皆殺し」になります。

このように数を語呂合わせで表現できる言語は日本語ぐらいではないでしょうか。日本語と数字は相性抜群なのです。昔から日本人は計算力に優れていると言われてきましたが、誰もが掛け算の「九九」を唱えることができたからでしょう(過去のこともかもしれませんが)。欧州では、電卓のない昔は九九の代わりにネイピアが考案した「計算棒」という 0~9 を表す棒を用い掛け算を求めています(インドでも「正方形の法」という表が用いられました)。それを日本人はソラで覚えた九九で計算していたわけで、計算力に差がでてくるのは当然かもしれません。

九九もまた語呂合わせであり、日本語に馴染むように意味をもたせることで、数字という無意単語が有意単語になってしまうのです。例えば円周率 $\pi$ は、

産医師(314)、異国に向かう(159265)、産後厄なく(358979)、産婦みやしろに(3238462)、虫散々聞になく(643383279)

歌にして語呂合わせで暗記するのに対し、英語では、

Yes, I know a number (3.1416)

単語の文字数に対応させます。英語は単語そのものが数を意味するわけではないので日本語の語呂合わせに比べると暗記はできても利用はし難いのです。もっとも、上の円周率の語呂合わせも昔考えられた有名な歌ですが、当世に合うわけではありません。「みやしろ」は「御社」でしょうが歌全体が「いにしえ」のものであり、やはり「今流」の語呂合わせを考案する必要はあるでしょう。現代は IT の発達により覚えることが不要になったからか、残念ながら新作は耳にしたことはありません。平方根、常用対数、ネイピア数、数々の有名数を日本人は歌にしてきましたが、みな過去のものなのです。

さて、数字の語呂合わせは速算マジックにも用いられています。

例えば「239×4649」を計算するとどうなるでしょうか。

$$239 \times 4649 = 1111111$$

となります。これを知っていれば周りに一目置かれると思いませんか。さてこの掛け算は「兄さん、急だ、よろしく」と覚えます。

これは 1 が 6 個連なる結果になる計算ですが、では 1 が 7 個の場合は、

$$7373 \times 1507 = 11111111$$

これは、「なみなみと、いこうな」と覚えます。

また、数学以外でも、歴史の年号の暗記など語呂合わせが活躍することは周知のことでしょう。なお、最初に紹介した、安定中性子の一つである魔法数 184 についても残りの魔法数も含めて、次の語呂合わせがあるようです。

ふたば風呂にはいずれの部屋にもいい風呂癒し

2 8 20 28 50 82 126 184

「ふたば」は双葉温泉のことでしょうか。それとも作った本人にとって有意単語の何かでしょうか。語呂合わせは自分にとって、もっとも価値があり印象のあるものを考えればよく、例えば「2,8」は「二人は」としてもいいわけです。こういう体験・経験を反映させることができるのも日本語だからこそといえます。

このように、語呂合わせは日本文化の「知識」領域を支えてきたものといえるのです。そしてその真骨頂は和歌にみることが出来ます。次は和歌を数字で示したものです。

7080 8783910100 80029 700 3700 1032 7910 9849

なんのことかわかりませんね。実は日本人は算用数字をそのまま語呂合わせしているわけではないのです。数字を多義の意味をもつ漢数字に変えて、日本語に変換しているのです。数を活かしたもとして捉えていることは凄いいと思いませんか。

七十八十 八七八三九百 八万二九七百 三七一十三二 七九十九八四九

こう読みます。

七重八重 花は咲くとも山吹の みのひとつだに なきぞくやしき

室町時代の武将であり歌人でもあった太田道灌の歌です。「七百」は「の」と読ませています。

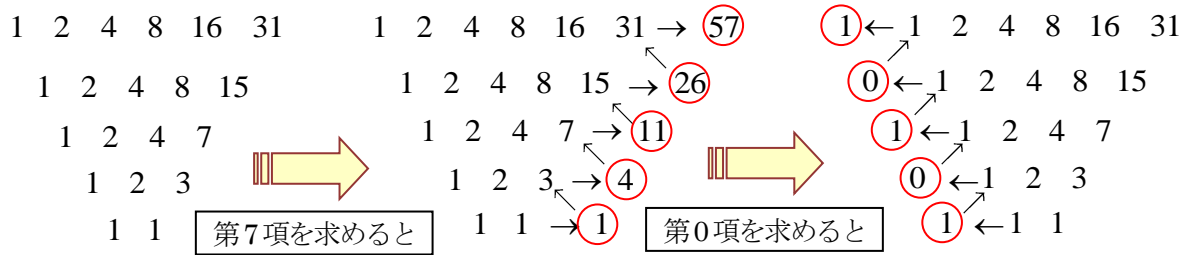
ワンパターンの語呂合わせオヤジギャグを連発し、場を白けさせるお父さん。でも、日本語の語呂合わせ文化を継承している貴重な存在と思えば、虚無的で背筋が寒くなる感情も少しは和らぐのではないのでしょうか。

【問い】 数列 3, 9, 27, 81, … の5番目はどんな数が適当でしょうか。

たぶんあなたは195と答えるでしょうが、ではその数はどうやって得られるのでしょうか。

似た問題は数31で話題にしています。数列{1, 2, 4, 8, 16, 31, …}では、6項目が予想と違いますが、2倍ずつ増えていくだろうという「安易な推測」に数31は警鐘を鳴らしていた訳です。数列は一定の規則性を保ち並んだ数の列であるわけですから、では、問いの数列の規則性は何なのでしょう。

規則性を調べる有用な手段として、下左図のように隣り合う2項の差をとって、新たに数列(階差数列)を作る方法があります。数列{1, 2, 4, 8, 16, 31, …}では、実際、第4階差まで進むと、同じ数字の列になり、さらに第5階差までとると、すべて数が0になってしまいます。もとの数列の第6項目が32であった場合、数列は公比が2の等比数列であり、その階差数列はまた同じ等比数列になり、何度階差をとっても変わりません。それが第6項が31の場合は、階差をとる度にひとつ手前の項に影響を与え、各項が等しい値になるように順次変化をしていきます(下図の中央)。同様に、第1項の一つ手前の第0項目も求めることができ、その値は1になります(下右図)。この数列は、円周上にn個の点をとるとき、弦により分割される円の内部の領域の個数を求めるものでしたから、n=0のときは、当然円の内部だけの1個になり、確かに満たしていることが分かります。



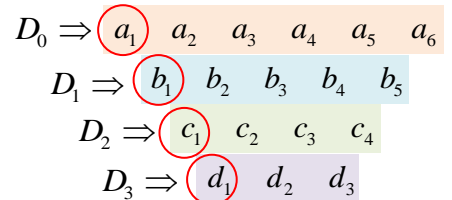
このように、階差数列を用いることで、数列の規則性を見つけることができます。では階差によって求められる数列の一般項はどうなるのでしょうか。

数列を{ $a_n$ }とし、第1階差の数列を{ $b_n$ }、第2階差の数列を{ $c_n$ }とし、第3階差で一定の値 $d_1$ になるとします。

$$\text{このとき、 } a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$$

さらに $b_n$ 、 $c_n$ についても同様にその階差を考えることで次のようになります。

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left( b_1 + \sum_{m=1}^{k-1} c_m \right) \\ &= a_1 + b_1(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{k-1} \{c_1 + (m-1)d_1\} \\ &= a_1 + b_1(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} c_1(k-1) + \frac{d_1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-1)(n-2) \\ &= a_1 + b_1(n-1) + \frac{c_1}{2}(n-1)(n-2) + \frac{d_1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) \end{aligned}$$



ここで数列{ $a_n$ }および階差(differences)の最初の項をそれぞれ  $D_0 = a_1, D_1 = b_1, D_2 = c_1, D_3 = d_1$  とおきます。

また、 ${}_{n-1}C_0 = 1, {}_{n-1}C_1 = n-1, {}_{n-1}C_2 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2), {}_{n-1}C_3 = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$  であることに注意すると、

$$a_n = D_0 \cdot {}_{n-1}C_0 + D_1 \cdot {}_{n-1}C_1 + D_2 \cdot {}_{n-1}C_2 + D_3 \cdot {}_{n-1}C_3$$

なお、上述の計算方法をみると、さらに階差を必要とする場合も同じように求められます。第m階差が定数となると、

$$a_n = \sum_{k=0}^m D_k \cdot {}_{n-1}C_k \quad \text{が成立するのです。}$$

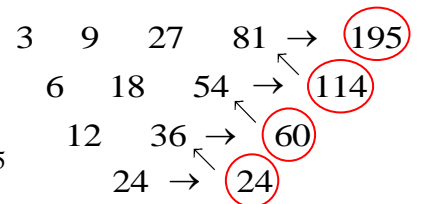
それでは、問いの数列の5番目およびその一般項を求めてみましょう。

第5項は右図のように階差から逐次的に計算できます。一般項 $a_n$ は、

$$a_n = 3 + 6(n-1) + \frac{12}{2}(n-1)(n-2) + \frac{24}{6}(n-1)(n-2)(n-3) = 4n^3 - 18n^2 + 32n - 15$$

さて、ではもう一度、聞きますが、5番目にくる数は何でしょうか。……正解は243です。

この数列の規則性を考えるのなら3倍ずつ増えていくとみるべきです。数31の場合は「平面の分割数」というルールがありますが、問いの数列は、数の並びだけで推測するものです。その一般項は $3^n$ とするのが妥当と思いませんか。今回の数のサブタイトルを見た人は間違えなかったかも知れません。数195はルール(規則)は曲げないけど、「別の解釈だってあるぞ」といつもブツブツと自己主張している一言居士であったわけです。



「たけやぶやけた」、「しんぶんし」のように、逆さに読んでも(意味がある)同じ文章を回文といい、小さい頃は誰もがその奇妙な面白さに夢中になったものです。和歌では「のきさらむ虫の音のしむ紫野」といった秀作が詠まれています。そしてネット上では3163字の長い回文も紹介されており(平成23年8月4日現在、今もたくさんの回文マニアがいるようです。

ところで、その長い回文の文字数3163に、1の位から逆に読んだ数字3613を加えてみましょう。

$$3163 + 3613 = 6776$$

6776は、右から読んでも左から読んでも同じ数になります。このような数字を回文数といいます(不思議数との出会いの覚書の第1集の数1001で紹介しました。シェヘラザード数ともいいます)。日本語と違い、数字の並びは意味の有無を問わないわけですから回文数は幾らでも作れます。数字の並びを左右入れ替えたときにどのような条件のときに回文数になるのかその操作に意味があるのです。さて、先ほどの3163は1回の操作で回文数になりましたが、これは珍しいケースではありません。

例えば2桁の数は、 $10a + b$  ( $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$ )と表されますから、並びを入れ替えると $10b + a$ 。

その和は、 $10(a + b) + (a + b)$ となり、 $a + b$ が1桁であれば必ず回文数になります。そして、この桁が繰り上がるかどうかで場合分けをし、 $a < b$ について調べていけば2桁の数はすべて回文数になることが示されます。ただ、もちろん一回の操作だけでなるとは限りません。最初から回文数になっているのは11,22,33のように9個あります。2回以上の個数は偶数ですが、これは、27に対して72というように必ずペアの数があるからです。6回は79と97の1組だけ。  $79 \Rightarrow 176 \Rightarrow 847 \Rightarrow 1595 \Rightarrow 7546 \Rightarrow 14003 \Rightarrow 44044$  このように変化し、回文数に落ち着きます(以後、収束といいます)。

回数	個数	数
0	9	11, 22, ...
1	49	12, 13, ...
2	20	19, 28, ...
3	4	59, 68, ...
4	4	69, 78, ...
6	2	79, 97
24	2	89, 98

なお、2桁では右表をみると収束までの回数が異常に長いものが1組あります。89と98は、なんと24回の操作の末に、8813200023188 に収束するのです。

では3桁の数はこの操作で回文数になるでしょうか。各位が同じ数字は回文数です。2桁の数の操作で和が3桁になるものは当然回文数になります。3桁の数を $100a + 10b + c$ とすると、桁数を入れ替えた和は $100(a + c) + 20b + (a + c)$ ですから、 $a + c, 2b$ が1桁の場合は回文数より、あとは、 $a < b$ である数について調べればいわけですがさすがに厳しいですね。大半は23回以下の回数で回文数に収束します。しかし次の15個の数字、

196,691, 295,592, 394,493, 259,592, 689,986, 788,887, 879,978, 790

これらについては100万回の操作でも回文数になりません(回文数に収束しないということは証明できてはいませんが)。

特に一番小さな数196は、その代表として取り上げられ、これを「196問題」といい、1900年代後半から研究されているようです。だから今回の話題の数は、回文数に収束する数ではなく、それが分かっていない、この個性的な数196を取り上げています(個人的には唯一ペアの存在しない790も面白いと思います)。

回数	個数	数
0	9	11, 22, ...
1	17	12, 23, ...
2	16	16, 27, ...
3	16	14, 19, ...
4	16	15, 18, ...
5	16	13, 25, ...

さて、それでは和ではなく、桁を入れ替えたものの差の絶対値は回文数になるでしょうか。

2桁の数は、すべて9に収束します。2桁の数を入れ替えたものの差は必ず9の倍数であり、2桁で9の倍数である回文数は99だけであることから明らかです。ではその収束の回数ですが、最大5回で面白いことにどの回数の個数もほぼ同じになります。例えば5回で収束する数13については、 $13 \Rightarrow 18 \Rightarrow 63 \Rightarrow 27 \Rightarrow 45 \Rightarrow 9$  となります。

3桁の数では、桁数を入れ替えた数の差は、9の倍数かつ11の倍数になります。したがって収束する回文数は99であることが予想され、実際すべての数が5回以内で収束します。その個数ですが、2桁の回数の個数を10倍した回数になっています。なお和では収束しなかった196は、 $196 \Rightarrow 495 \Rightarrow 99$  2回で簡単に収束してしまいます。

4桁の数はどうでしょう。収束する回文数は9の倍数で、99または999になります。回数毎の度数分布は右グラフであり、今度はバラつきがみられます。7回の収束がもっとも多くなり、収束の最大回数は12回です。また、4桁では収束しないものも存在します。同じ数の繰り返し(ループ)に陥るケースが637個あり、その一番小さい数1012についてみると、

$$1012 \Rightarrow 1089 \Rightarrow 8712 \Rightarrow 6534 \Rightarrow 2178 \Rightarrow 6534$$

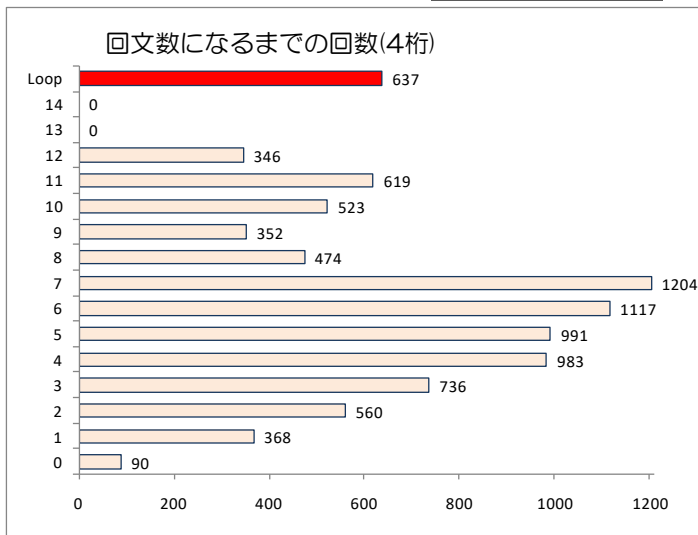
以降は2178と6534が繰り返され、637個のすべてが同じループになるのです。5桁になってもこの2数の繰り返しは発生し、さらに、21978と65934のループも発生します。

では、桁数を入れ替え掛けたときは回文数に収束するでしょうか。12,122,1112,1202といったものが該当します。例えば、

$$1202 \Rightarrow 2429242$$

となります。各桁の数は0,1,2に限定されるようです。

このように、回文数に収束する過程には、和の196だけでなく、差、積についてもいろいろな性質を持つ数が潜んでいそうです。彼らの今後の佇まいに注目したいところです。





ちょっと運試しを。  
 3桁の適当な自然数を何か考えて紙に書いてください。  
 次に、いま考えた数の後ろに続けて同じ数を書いて6桁の数にしてください。  
 例えば考えた数が841ならば、

841841

を作るということです。では、その6桁の数を7で割ってください。  
 このラッキーセブンで割った余りは、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6のいずれかになりますね。  
 その余りの数だけあなたに500円硬貨を進呈しましょう。考えた数がラッキーナンバーならば、  
 あなたは最大で6枚の500円硬貨を受け取ることができるのです。

さて、あなたはどれだけの500円硬貨を手に入れることができましたか。  
 えっ、割り切れてしまった？。それは、アンラッキーでしたね。まあ、人生、そんなこともありますね。

例として考えた数字841の場合はどうなるでしょうか。

$$841841 \div 7 = 120263$$

やはり、割り切れてしまいます。実は、どんな3桁の数を考えても割り切れてしまうのです。絶対500円硬貨は貰えないというサギみたいな運試しでした。この仕組みが分かりますか。  
 3桁の数を続けて書いて6桁にするということは、3桁分だけ位を移して書くことだから、  
 1001を掛けることと同じなのです。

$$\begin{array}{r} abc \\ \times 1001 \\ \hline abc \\ abc \\ \hline abcabc \end{array}$$

となるわけです。ここで、  
 $1001 = 7 \times 13 \times 11$

ですから、7で割り切れることは当然なのです。この問題は、7を13や11に変えてやっても損をしないことが分かりますね。  
 このように、数字1001は3桁の数を上位に3桁分だけずらしてコピーする不思議な働きをもっています。

1001は、1000より1だけ多い数字ですが、インドでは、11, 101, 1001のように10, 100, 1000にそれぞれ1を加えた数を吉祥数といいます。完成された1000などの数に1を加えることは、完成を超越した数、すなわち無限数と扱われ、寺院への寄付金や祝いの席での祝儀などの祭礼の際にはこういった吉祥数で支払う風習があるようです。

また、数字1001のように、逆から読んでもまったく同じ数字になる数を回文数といいます。回文数はシェヘラザード数とも呼ばれます。もちろん、「千一夜物語」のヒロイン、シェヘラザード姫の名前をとったわけですが、アラビアンナイトがなぜ1001夜なのか、ここにも数字1001のミステリーが潜んでいるんでしょうね。

さて、1001は、3桁の数字を3桁分ずらしてコピーするわけですが、それでは、4桁、5桁、……ずらすにはどうしたらいいかは分かりますね。10001, 1000001, ……を掛ければ同じように懐の痛まないサギの運試しができます。

$$\begin{aligned} 10001 &= 73 \times 137 \\ 100001 &= 11 \times 9091 \\ 1000001 &= 101 \times 9901 \\ 10000001 &= 11 \times 909091 \end{aligned}$$

ちょっと、割り算がしんどい値になってしまいますね。  
 ところで、このコピー数を用いると0と1だけで構成される美しい数のピラミッドを作ることができます。  
 (1を並べて作られる数をレピュニット数<repeated unit ⇒ repunit>といいます)

$11 \times 1$	=	11
$101 \times 11$	=	1111
$1001 \times 111$	=	111111
$10001 \times 1111$	=	11111111
$100001 \times 11111$	=	1111111111
$1000001 \times 111111$	=	111111111111

# 11×7×13

……………倍数判定のキーワード数

値を計算すると、

$$11 \times 7 \times 13 = 1001$$

そう、数 1001 で登場したコピー数ですが、素因数分解により、この数のさらにミステリアスな性質が浮かび上がってきます。

あなたは、7の倍数はどうやって見分けたいか知っていますか？

7以外の数字、2, 3, 4, 5, 6, 8, 9の倍数判定は誰でも知っていますね。

7の倍数については、3桁の数は、

百の位の数を2倍した数を、十一の位の2桁の数に加えた数が7の倍数かどうかで判定できます。

例えば、546は、

$$46 + 5 \times 2 = 56$$

ここで、56は7の倍数だから、546は7の倍数です。その理由は簡単です。3桁の数を

$$N = 100a + 10b + c \quad (1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9)$$

とすると、

$$N = 98a + (2a + 10b + c) = 7 \times 14a + (2a + 10b + c)$$

これより、 $N$  が7の倍数であるとき、 $2a + 10b + c$  も7の倍数であるわけです。

では、4桁以上の数についてはどう判定すればいいのでしょうか。調べてみましょう。

$$N = \sum_{k=1}^{2n} (a_{k-1} \times 10^{3(k-1)}) \quad (a_{k-1} \text{は3桁の整数})$$

とします。

$$\begin{aligned} N &= a_0 \times 1 + a_1 \times 10^3 + a_2 \times 10^6 + a_3 \times 10^9 + \dots + a_{2n-2} 10^{6k-6} + a_{2n-1} \times 10^{6k-3} \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{2k-2} \times 10^{6k-6} + a_{2k-1} \times 10^{6k-3}) \\ &= \sum_{k=1}^n \{(a_{2k-2}(10^{6k-6} - 1) + a_{2k-1}(10^{6k-3} + 1) + (a_{2k-2} - a_{2k-1}))\} \end{aligned}$$

ここで、 $(10^{6k-3} + 1)$  は7の倍数になっています。数学的帰納法で証明してみましょう。

$k=1$  のとき、 $10^3 + 1 = 1001 = 7 \times 11 \times 13$  より、7の倍数。

$10^{6k-3} + 1 = 7m$  ( $m$  は自然数) とすると、

$$10^{6(k+1)-3} + 1 = 10^{6k-3} \cdot 10^6 + 1 = (7m-1)10^6 + 1 = 7 \cdot 10^6 m - 999999 = 7 \cdot 10^6 m - 7 \times 142857$$

$\therefore 10^{6k-3} + 1$  は7の倍数になります。

同様に、帰納法により  $10^{6k-6} - 1$  が7の倍数であることも証明できますが、合同式を使うともっと簡単に説明できます。

1001の素因数分解から、

$$10^3 + 1 \equiv 0 \pmod{7} \quad \therefore 10^3 \equiv -1 \pmod{7} \quad \text{より} \quad (10^3)^{2k-1} \equiv -1, (10^3)^{2k} \equiv 1 \pmod{7}$$

となります。

このことより、 $\sum_{k=1}^n (a_{2k-2} - a_{2k-1})$  の値を計算することで、7の倍数判定ができるのです。

## 7の倍数判定法

- ① 3桁の数 …… 十一の位で作られる2桁の数に百の位の数を2倍して加えた数が7の倍数
- ② 4桁以上の数 …… 下の位から3桁ずつ順に、奇数番目は加え、偶数番目は引いた数が7の倍数

例えば、164197523については、

$$164197523 \Rightarrow \text{②で判定} \quad 523 - 197 + 164 = 490 \Rightarrow \text{①で判定} \quad 90 + 2 \times 4 = 98 = 7 \times 14$$

よって、7の倍数であることが分かります。

同じように、1001の素因数11や13についても倍数判定ができます。

$$10^3 + 1 \equiv 0 \pmod{13}, 10^3 + 1 \equiv 0 \pmod{11}$$

から、7の場合と同様の操作で倍数判定をしてもいいことになります。

$$14961845184 \Rightarrow 184 - 845 + 961 - 14 = 284 = 11 \times 13 \times 2$$

これより、14961845184は11かつ13の倍数です。

(ちなみに、11の倍数判定は下の位から奇数番目の位の数を加え、偶数番目の位の数を引くことでもっと簡単に判定できます)

$$1089 = 33^2$$

ただの平方数である1089はしばしばマジックの主役として登場します。

3桁の各位の数字がみな異なる数を思い浮かべてください。さて、その数の一の位と百の位を入れ替えた3桁の数を考えて、その数と、もとの数の差を計算してください。(大きい数から小さい数を引きましょう)。計算できましたか。では、その3桁の数の一の位と百の位を入れ替えて、今度は入れ替える前の数に足してください。できましたか?。その数をよくみてください。私があなたの計算した数を当てて見ましょう。それは……。

それは、1089です。

このパズル、一人に一回しか通用しません。実は、必ず1089になるのです。

例えば、327という数字で考えて見ましょう。まず、一の位と百の位を入れ替えて、元の数との差をとると、

$$723 - 327 = 396$$

次にまた一の位と百の位を入れ替えて和をとると、

$$693 + 396 = 1089$$

確かになります。このマジックの種明かしをしてみましょう。

3桁の数を

$$P = 100a + 10b + c \quad (a < c)$$

とします。次に、百の位と一の位を入れ替えた数は、

$$Q = 100c + 10b + a$$

ですから、その差 $R$ は、

$$R = Q - P = 100(c - a) + (a - c)$$

ここで、 $a - c < 0$  は負の数ですから、十の位から数を借り、その十の位は百の位から数を借りと、

$$R = 100(c - a - 1) + 90 + (10 + a - c)$$

百十一の位の数はそれぞれ、

$$c - a - 1, 9, 10 + a - c$$

となります。ここで、また百の位と一の位を入れ替えると、

$$S = 100(10 + a - c) + 90 + (c - a - 1)$$

$R$ と $S$ の和 $T$ を求めると、

$$T = R + S = 100 \times 9 + 90 \times 2 + 9 = 1089$$

となります。この式をみると結局は、

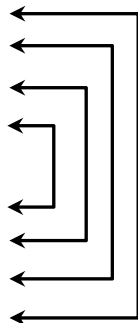
$$1089 = 999 + 90$$

の計算をしているだけだということが分かります。

さて、この魔法数にはまだ面白い性質が潜んでいます。

この数に1から9までの数を順に掛けてみましょう。

- ①  $1089 \times 1 = 1089$
- ②  $1089 \times 2 = 2178$
- ③  $1089 \times 3 = 3267$
- ④  $1089 \times 4 = 4356$
- ⑤  $1089 \times 5 = 5445$
- ⑥  $1089 \times 6 = 6534$
- ⑦  $1089 \times 7 = 7623$
- ⑧  $1089 \times 8 = 8712$
- ⑨  $1089 \times 9 = 9801$



千と百の位は①から順に増え、一十の位は9から順に減っていき、したがって、①と⑨、②と⑧、③と⑦、④と⑥の数字の並びが逆になっています。⑨は逆順に並べた数が元の数の倍数であることを表し、この性質は、4桁の数では、1089と2178しかありません( $2178 \times 4 = 8712$ )。この数について、G.H.ハーディはちっとも深刻でない数だけど、素人はびっくりするだろうと述べています。そして極め付きは、

$$1089 = 33^2 = 65^2 - 56^2$$

右辺の数の並びに注目してください。2桁の数でこんな芸当ができるのは、この数以外にないのです。

1900年台初頭、イギリスの著名な数学者G. H. ハーディの話。

病床の友人、数学者ラマヌジャンを見舞いに行く途中、乗ったタクシーのナンバーは1729の4桁番号であった。私にとって、その数はどうでもいい退屈な数字であったが、よくない前兆を表す数字ではないことを願った。そのことをラマヌジャンに告げると、彼は「それは大変面白い興味ある数ですよ。2組の3乗数の和で2通りに表せる最小の数じゃないですか」

ラマヌジャンの数に対する特異な記憶力を物語るエピソードです。確かに、

$$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$$

と表せるのです。このことを瞬時に計算したラマヌジャンを、当時の天才数学者リトルウッドは「自然数のひとつひとつが彼の友人である」と評しました。

ラマヌジャン(*Srinivasa Aiyangar Ramanujan*:1887~1920)は、南インドのバラモン階層として生まれますが、経済的には貧しく大学も奨学金でやっとならぬことで行くことができませんでした。出席率が悪く、その奨学金も打ち切られてしまいます。止む無くマドラス港の湾岸局で働きながら、独学で数学を勉強を続けます。その研究の成果をイギリスのハーディ教授に手紙で送ったところ、「本物の大天才だ、こんないたずらができるほどの詐欺師より、大数学者の方がまだ存在するものだから」と、ハーディは驚愕し、彼をケンブリッジに招聘します。しかしながら、30時間眠らずに数学に没頭し、20時間眠り続けるような不摂生な生活を送っていたラマヌジャンはやがて体を壊し、32歳の生涯を閉じます。ラマヌジャンが短い渡欧期間の中でハーディと共に研究し発表した論文は数知れなく、数に対する魔術的な洞察力には誰もが驚かされるのです。彼の死後、ハーディは数学者の天賦の才能について次のように採点したといわれています。

自分は20点、リトルウッドは30点、ヒルベルトは80点、そしてラマヌジャンは100点  
自身もまた、偉大な天才数学者であったハーディであっても、ラマヌジャンの才能を目の当たりにすると平凡に映ってしまったのでしよう。

ラマヌジャンがどれだけ数達に愛されたのかを物語るラマヌジャンファンタジーといわれる問題があります。

$$N = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \dots}}}}}$$

$N$ の値は何でしょう。

ラマヌジャンが「インド数学ジャーナル」に投稿した問題ですが、誰一人として解答者が現れず、結局ラマヌジャンは自ら解答をつけることになりました。

$$N = 3$$

不思議な信じがたい値に収束するのです。

さて、1729に話を戻しましょう。この数の各位の数の和は、

$$1 + 7 + 2 + 9 = 19$$

であり、19で1729は割ることができます。

$$1729 \div 19 = 91$$

このように各位の数の和で割れる数をハーシャッド数といいます。さらに、このことから、

$$19 \times 91 = 1729$$

であり、これは19を逆に読んだ数と91との積がもとの数に戻るという稀な数字の例として挙げられます。また、

$$1729 = 7 \times 13 \times 19$$

と素因数分解できますが、 $a^{1729} - a$ は、 $a$ の値に関係なく、いつも1729で割り切れます。このような数をカーマイケル数といい、確率的素数判定の反例として例示され、擬似素数とも云われます。

とまあ、重箱の隅を穿ればいろいろとでてくるのかも知れませんが、タクシーのナンバーに過ぎなかった1729に瞬時に市民権を与えたラマヌジャンの凄さは格別なものです。1729はラマヌジャン・ハーディ数とよぶのが一番相応しいでしょう。

ところで、ハーディの話には続きがあります。

「それでは、4乗数で同じ性質をもつものを君は知ってるかな。ラマヌジャンはしばらく考えた後、  
「その答えは分からないけど、それはきっとものすごく大きな数字になるだろうね」

ラマヌジャンが予想した数は、後にオイラーにより解明されます。

$$635,318,675 = 59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4$$

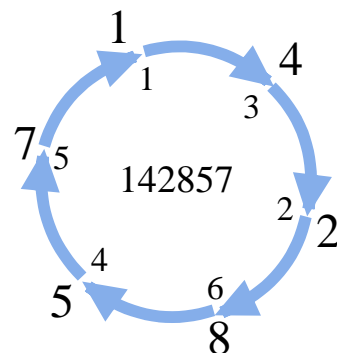
それは、それは大きい数字です。

# 142857

……繰り返し繰り返し巡るダイヤル数

1~9の数字から3の倍数を除いた6桁の数。何か怪しいと思うでしょ。  
1から6までの数を順番に掛けてみると、

142857 × 1 = 142857	⇒	142857 × 1 = 142857
142857 × 2 = 285714		142857 × 3 = 428571
142857 × 3 = 428571		142857 × 2 = 285714
142857 × 4 = 571428		142857 × 6 = 857142
142857 × 5 = 714285		142857 × 4 = 571428
142857 × 6 = 857142		142857 × 5 = 714285



142857の各位の数を、小さい数字から並べた1, 2, 4, 5, 7, 8の順にその数字を先頭に数が現れています。さらに、1の位と最高位の数を結び円形にすると、すべて142857の並びになっていて、そして最後に、

$$142857 \times 7 = 999999$$

踊りが止みます。まだまだ、あります。142857の142と857の間に+を入れてみましょう。

$$142 + 857 = 999$$

また9がでてきました。左から2つ置きの2数の和をとると

$$1 + 8 = 9, 4 + 5 = 9, 2 + 7 = 9$$

すべて9になります。このことは142857に1から6の数字を掛けて得られた数についてもみな成り立っています。つぎに、142857を9で割ってみましょう。

$$142857 \div 9 = 15873$$

割り切れましたね。この数に、7の倍数を掛けると、

$$\begin{aligned} 15873 \times 7 &= 111111 \\ 15873 \times 14 &= 222222 \\ 15873 \times 21 &= 333333 \\ 15873 \times 28 &= 444444 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$15873 \times 63 = 999999$$

これはよく考えれば当たり前ですが、でも綺麗ですね。ところで前に紹介した12345679にも同じ性質がありました。

$$12345679 \times 81 = 999999999$$

このことは実は、それぞれの式は、

$$\frac{1}{7} = \frac{142857}{999999}, \quad \frac{1}{81} = \frac{12345679}{999999999}$$

とみると、

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857\dots = 0.\dot{1}4285\dot{7}, \quad \frac{1}{81} = 0.012345679012345679\dots = 0.\dot{0}1234567\dot{9}$$

であることを表しています。

すなわち、142857と12345679は、それぞれ $\frac{1}{7}$ と $\frac{1}{81}$ を小数点展開したときの循環節になっているのです。これらの数の

性質はすべて循環節の性質であり、例えば142857に2を掛けることは、分数 $\frac{2}{7}$ を小数点展開することであり、20を7で割った商を最初の数として踊りが始まります。

最後に、 $\frac{1}{81}$ から面白い循環節をもつ分数をつくってみましょう。

$$\frac{1}{891} = 0.\dot{0}0112233445566778\dot{9}$$

0から7までは2つずつ現れ89と続く。循環節の長さは18

$$\frac{1}{8991} = 0.\dot{0}0011122233344455566677788\dot{9}$$

0から7までは3つずつ現れ889と続く。循環節の長さは27

$$\frac{1}{89991} = 0.\dot{0}0001111222233334444555566667777888\dot{9}$$

0から7までは4つずつ現れ8889と続く。循環節の長さは36

まだまだ踊りは続きそうですね。

# 123456789

……………数字たちとポルカを踊ろう

数字1から9を順に並べた9桁の数、123456789には面白い性質があります。円周率の小数第?億位に123456789という並びが現れるといったことは必然・偶然かは分かりませんが、この数に3の倍数以外の数を掛けてみると……。

$$\begin{aligned}123456789 \times 1 &= 123456789 \\123456789 \times 2 &= 246913578 \\123456789 \times 4 &= 493827156 \\123456789 \times 5 &= 617283945 \\123456789 \times 7 &= 864197523 \\123456789 \times 8 &= 987654312\end{aligned}$$

計算結果はすべて 1~9 までの数字が順番を変え、シャッフルされて現れてきます。まるで相手を変えてポルカを踊るよう。さらに逆順にして 987654321 に3の倍数以外(1を除く)を掛けると、今度は0が加わり、0~9までの数字が踊りだします。

$$\begin{aligned}987654321 \times 2 &= 1975308642 \\987654321 \times 4 &= 3950617284 \\987654321 \times 5 &= 4938271605 \\987654321 \times 7 &= 6913580247 \\987654321 \times 8 &= 7901234568\end{aligned}$$

次に、8を抜いて、8桁の数12345679について同じように3の倍数以外の数を掛けてみましょう。

$$\begin{aligned}12345679 \times 1 &= 12345679 && \cdots \cdots 1が入って8が抜ける \\12345679 \times 2 &= 24691358 && \cdots \cdots 8が入って7が抜ける \\12345679 \times 4 &= 49382716 && \cdots \cdots 7が入って5が抜ける \\12345679 \times 5 &= 61728395 && \cdots \cdots 5が入って4が抜ける \\12345679 \times 7 &= 86419753 && \cdots \cdots 4が入って2が抜ける \\12345679 \times 8 &= 98765432 && \cdots \cdots 2が入って1が抜ける\end{aligned}$$

数字が1つ抜けては別の数字が入って踊りだします。先ほどの123456789に掛けた3の倍数以外の積と比較してみましょう。数字が1つ抜けただけでその並びは一致しています。また、その抜けた数と掛けた数の和をとるとすべて9となっています。

さらに、12345679に9を掛けると、

$$12345679 \times 9 = 111111111$$

各位の数字がすべて1に変わってしまい、はい、ここで休憩。さらに続けて3の倍数以外の数を掛けてみましょう。

$$\begin{aligned}12345679 \times 10 &= 123456790 \\12345679 \times 11 &= 135802469 \\12345679 \times 13 &= 160493827 \\12345679 \times 14 &= 172839506 \\12345679 \times 16 &= 197530864 \\12345679 \times 17 &= 209876543 \\& \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\12345679 \times 43 &= 530864197 \\12345679 \times 44 &= 543209876 \\& \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\12345679 \times 77 &= 950617283 \\12345679 \times 79 &= 975308641 \\12345679 \times 80 &= 987654320\end{aligned}$$

新しく0が加わり9桁の数となりますが、その並びは各位の数をつないでグルッと輪にしてみると、0を基準にして1~9を掛けた数と同じ並びが現れてきます。そして、80を掛けると最大の数となり、81を掛けると、

$$12345679 \times 81 = 999999999$$

お疲れ様、お辞儀をして、数達のダンスはこれでお・し・ま・い。



# 1.324718

……次世代の美を表現する比

長〜い小数の近似値の最初の部分の値です。「遺産にしないや」とでも唱えましょうか。

黄金数(Golden-Number)、白銀数(Silver-Number)は、数の世界及び自然界に君臨する超有名数ですが、ここに紹介する数は最近脚光を浴びているプラスチック数(Plastic Number)と呼ばれるものです。

黄金数は、 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  であり、約1.6180339887……の値。

1と黄金数の比は黄金比といい、もともと自然界の中では美しい比とされ、パルテノン神殿のような建造物、絵画、彫刻などのその比の値をみることができます。

白銀数は、 $1+\sqrt{2}$  であり、約2.41421356……の値。

正方形の1辺のその対角線の比 $1:\sqrt{2}$ を白銀比といい、日本人が好んだ比であり大和比とも呼ばれ、五重塔、銀閣寺といった歴史的建造物の中にもみることができます。

では、プラスチック数はというと、右図はその長さを黄金数、白銀数の長さと比較したのですが、どのように得られた数か以下示しましょう。

正三角形を右下図のように60°ずつ回転、拡大させていったものを合わせたとき、三角形の1辺の長さをみると、

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, \dots$$

フィボナッチ数列とよく似た数列が生成されます。階差をとると、

$$0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, \dots$$

5項めからもとの数列がまた出現し、これもまたフィボナッチ数列の性質に似ています。そして、各三角形の頂点を中心とし辺の長さを半径とする円弧を描き、繋いでいくと、図のような螺旋が出現します。

フィボナッチ数列では正方形を90°回転・拡大していくと同様に描かれる対数螺旋に似ています。そして、隣り合う二項の比の極限を求めるとフィボナッチ数列から黄金比が求められると同様に、プラスチック数が得られます。ではこの数が何の役に立つかという実は分かりません。黄金比と同様に作られるから多分これから意味をもってくるのだらうという推測から得られた数なのです。

さて、黄金比や白銀比は連分数展開ができることが知られています。

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$1 + \sqrt{2} = 2 + (\sqrt{2}-1) = 2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}} = \dots = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

では、プラスチック数はというとできません。

円周率だって連分数展開ができるのに無理なのです。

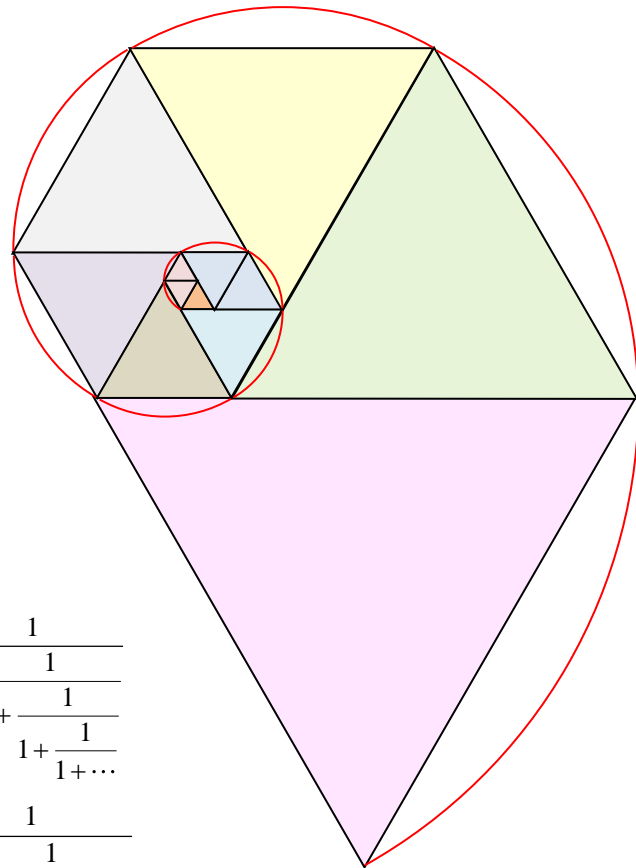
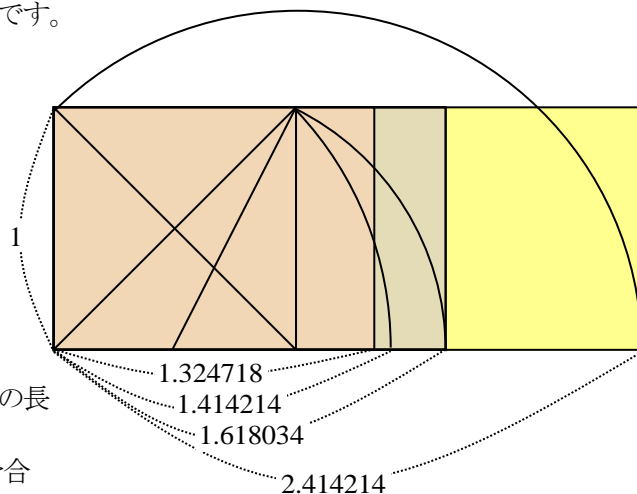
他に黄金比、白銀比と共通した性質はないかという、方程式の解として考えると、

黄金比は、 $x^2 - x - 1 = 0$  の解であり、 $x = \sqrt{x+1}$       これから、 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$

白銀比は、 $x^2 - 2x - 1 = 0$  の解であり、 $x = \sqrt{2x+1}$       これから、 $1 + \sqrt{2} = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + \dots}}}}}$

プラスチック数は、 $x^3 - x - 1 = 0$  の解であり、 $x = \sqrt[3]{x+1}$       これから、 $p = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}}}$

3乗根で表されるのを見ても幾何的な数字ではない、ハイテクな色合いを感じさせます。未来のテクノ世代はこの比の値を美しいと感じ、プラスチック数の比で作られた家屋で生活しプラスチック数の比で裁合わせた衣服を身にまとうのかも知れません。



実家に行ったS氏は、母親から「このお金を適当な割合に分けて、3人の孫にお小遣いをあげて」、と千円札12枚を貰った。S氏は、最近金欠ぎみだったので、ちょっと心に悪が芽生えた。家に戻ってから、3人の息子を呼んで、「おばあちゃんがお小遣いをくれたぞ。これを3人に分配するよにとのことだ」といって、12枚から1枚くすねて、残り11枚を長男に渡した。

S氏は続けて曰く。「年齢に合わせて分配するよにとのことだ。長男には全体の $\frac{1}{2}$ 、次男には $\frac{1}{4}$ 、そして三男には $\frac{1}{6}$ のお金をあげなさいとお祖母ちゃんはいっていた」。お金を受け取った長男は、「うーん」と考え込んでしまった。「お父さん、11枚をおばあちゃんがいったように分けることはできないよ」、「そうか、困ったな。よし、お父さんが1枚上乘せしよう」といって、ポケットから千円札を長男に渡した。「うん、今度は分けられるよ、お父さん」といって長男は次のように分配した。

$$\text{まず、僕は}\frac{1}{2}\text{だから、}\quad 12,000 \times \frac{1}{2} = 6,000 \text{ (円)}$$

$$\text{次に、弟は}\frac{1}{4}\text{だから、}\quad 12,000 \times \frac{1}{4} = 3,000 \text{ (円)}$$

$$\text{最後にチビは}\frac{1}{6}\text{だから、}\quad 12,000 \times \frac{1}{6} = 2,000 \text{ (円)}$$

$6,000 + 3,000 + 2,000 = 11,000$  (円)。「お父さん、千円札が1枚残ったよ」。お父さん、シメシメ「そうか、うまく分けられて良かったな、それじゃ、その千円、お父さんに返してもらおう」。「1枚加えただけで、分けられなかったお金がうまく分配できちゃうんだ。お父さん凄い」。子供たちの尊敬の眼差しにちょっと心が温まり、懐も温まったS氏だった。

みなさんはS氏のトリック、見抜けましたね。3つの比を足してみましよう。

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6+3+2}{12} = \frac{11}{12}$$

比は、全体が1に対する割合のことですから、この計算では $\frac{1}{12}$ 、すなわち千円分足りないのです。そのことが「不思議な錯覚」を引き起こします。また、分母の12の約数が、1,2,3,4,6と多いことにも計算をするとき、心理的に騙されてしまいます。

分数を2つ以上の分数に分解することを「部分分数分解」といいますが、この考え方は、古代エジプトでも用いられインドパピルスの中にも記されています。原理は簡単です。

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} \quad \text{より、}\quad \frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad \text{となります。}$$

これは、分母が2数の積 $ab$ であるとき、2数の差 $(b-a)$ で割れば分解ができることを表しています。例えば、

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{15} = \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

となります。では、分母が2数の積に分解できないときはどうすればいいでしょう。

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{であることから、}\quad \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

同様に、部分分数分解できます。例えば、

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

となるわけです。これを用いて、1を分解してみましよう。

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

このように分ければ問題なかったわけです。それを知っていたであろうS氏のお母さんは凄い、それに引き換え……。

さて、S氏は1ヶ月後、実家にいったときに、また母親から千円札で12枚、孫のお小遣いを貰いました。

前回で味を占めたS氏。今度は三男に千円札11枚と、マイポケットから1枚加えた12枚を渡し、分配するよにいいました。

$$\text{えーっと、お兄ちゃんは、}\frac{1}{2}\text{だから}6,000\text{円。次のお兄ちゃんは}\frac{1}{3}\text{だから}4,000\text{円。僕は}\frac{1}{4}\text{で}3,000\text{円。}$$

$6,000 + 4,000 + 3,000 = 13,000$  円。あれ、お父さん、あと千円足りないよ。

S氏は、財布からさらに1,000円を渡すべきでしょうか。それとも比を誤って理解してしまった子どもたちに原理を説明し、前回の不正を明らかにし、親の威厳を失うべきでしょうか。

分子は5×71の合成数です。分母は素数であり各位の数を入れ替えて作られる数131,311もまた素数になる性質をもちますが、だからといってそれほど特徴のある分数には見えません。連続する奇数を2つずつ並べた113355の並びを真ん中から分割して分母・分子にしたとみると面白いとはいえますが、ところが、この分数を小数にしてみると……

$$3.1415929203539823008849557522123893805309\cdots$$

$3.14159292035398\cdots$ $-3.14159265358979\cdots$ $=0.0000026676419\cdots$
---

もうお分かりですね。この数は3桁の自然数の比としてはもっとも精度の高い円周率の近似を表し、なんと小数第6位まで値が一致しているのです。もう一度、円周率πと比較し、2数の差をとった値を右に示しましょう。

小数第7位以下からはズレが生じますが、その差は微小であることが分かります。

円周率πは、「神が作った数」(数学者:藤原正彦)といわれ、円という完全無欠な図形の中にありながら円周から得られる円周率は無限でしか表現できないことに多くの数学者は魅了されました。

πの近似計算は、その神秘性に取りつかれた人たちによって先を争い競いあうように求められていきます。

紀元前3世紀ごろに活躍したアルキメデスは、初めて円周率を数学的に計算したといわれ、円に内接、外接する正九十六角形の辺の長さから近似しました。

$$3.140 < \frac{231}{71} < \pi < \frac{22}{7} < 3.14286$$

これからアルキメデスは、π=3.14と決めたようです。当時の正n角形から近似するのは2桁(小数第n位をn桁と表します)までが限界だったようです。紀元2世紀には、ギリシアの天文学者プトレマイオスは、

$$\pi = \frac{377}{120} = 3.141666\cdots$$

として計算に用いていたと言われますが、これも3桁までの一致です。そしてその後、16世紀に入りオランダのルドルフは正2<sup>62</sup>角形というとても長い辺の長さの和を求めることで35桁まで計算することに成功しました(ドイツでは円周率をルドルフ数といいます)。ただ、アルキメデスから2000年近くの年月を経てまだ35桁であり、神々の山稜までの道のりはそれほどに遠いものだったのです。

さて、 $\frac{355}{113}$ ですが、この分数の発見も16世紀になってからのものです。メティウスが、円周率を分数 $\frac{333}{106}$ と $\frac{377}{120}$ の間

にあると考え、分子同士、分母同士の和をとって、その比を求めたといわれます。

しかし、16世紀の後半、オットーとアンソニスゾーンは、アルキメデスとプトレマイオスの近似数の、分母、分子同士を引いて得られることを知ります。

$\frac{333+377}{106+120} = \frac{710}{226} = \frac{355}{113}$
---

紀元2世紀の時代からこの数はプトレマイオスが求めた分数の中に潜み、1400年の時の流れに漂い人間を嘲笑っていたのです。ところが、古代中国の南朝の宗の数学者、祖沖之はこの数を1000年以上前に既に発見していました。これもこの分数が仕掛けた悪戯でしょうか。(祖沖之は22/7を約率、355/113を密率と称しました)。

$\frac{377-22}{120-7} = \frac{355}{113}$
--

さて、円周率は、整数の比で表すことができない超越数ですが、正n角形での近似が限界になった後、18世紀に入ってから、連分数で表現することが考えられました。右がその展開です。この展開の中で一際目立つ大きな数292。何か違和感があります。そこでこの数で展開に一区切りをつけ、右の□で囲った部分はほぼ0と考えてみます。

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}}}}}}$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15+1}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113}$$

また、 $\frac{355}{113}$ が目覚ますのです。

神のお側に仕えたいと切望し円周率に近づこうとしたこの数は、受け入れられなかった苛立たしさを、円周率計算に躍起になっている人間たちにぶつけるかのように歴史の中に顔をのぞかせるのです。この数は残念ながら7桁で神に見放されますが、その循環節を調べると驚くべきことが分かります。すべての分数は循環節のある小数で表されますが、この数ではなかなかその繰り返しが現れません。繰り返しが現れるのはなんと112桁め。素数pの逆数の循環節の長さは最大でp-1桁であることが知られ、この数の分母113も素数です。すなわち、この数は7桁でπとのズレが起きて、超越数であるπに近づくことを諦めないで、循環節の最大の長さになるまで追い続け、焦がれ続けるのです。その有り様は太陽に近づきすぎて失墜したイカロスにも似ています。

# 6729

# 13458

……数字が織り為す小町の戯れ

何が面白いのか分かりますか。そうです。分子・分母に数の並びは1~9の数字が1回ずつ使われています。でもそれだけならこういう数はいくらでも作れますね。この分数が凄いの、さらに約分ができるのです。

$$\frac{6729}{13458} = \frac{1}{2}$$

計算の結果が単位分数(分子が1の分数)になります。でも、もっと不思議なのはこれから。1~9までの数字を1回ずつ用いて、単位分数  $\frac{1}{n}$  ( $n = 2, 3, \dots, 9$ ) のすべてを表すことができるのです。

$$\frac{5823}{17469} = \frac{1}{3}, \frac{3942}{15768} = \frac{1}{4}, \frac{2697}{13485} = \frac{1}{5}, \frac{2943}{17658} = \frac{1}{6}, \frac{2394}{16758} = \frac{1}{7}, \frac{3187}{25496} = \frac{1}{8}, \frac{6381}{57429} = \frac{1}{9}$$

見事としかいいようがありません。なおこの表し方は一意的ではなく、すべての  $\frac{1}{n}$  の表現方法は89通りもあり、 $\frac{1}{8}$  の場合はなんと46通りもの表し方が可能なのです。では  $n=1$  のときはどうなのかと気になりますが、不可能なことは分かりますね。でも、

$$\frac{148}{296} + \frac{35}{70} = 1$$

1~9に0を加えて2つの分数の和にすることにより表現することはできるのです。

ところで、これらの分数の逆数を考えると、1から9までの数字を用いて2から9までの整数を作るというパズルになります。こういった遊びは日本では小町算としてよく知られています。

小町算は、数の並びと計算結果が小野小町のように美しいとか、小町算で遊んでいたらそのうち時間を忘れて歳をとってしまうことを小町の詠んだ「花の色はうつりにけりないたずらに 我が身世にふるながめせしまに」になぞらえたとか、私のところに100日通い続けたら結婚してあげるわよといった小町の言葉を信じて九十九夜まで通い続け、最後の日に雪に埋まり凍死した深草少将の100日の口惜しい思いに掛けたとか、まあそのいわれはいろいろとあるみたいですが、とにかく小野小町の名前から名づけられた江戸時代の庶民のパズルです。

1から9までの数字を並べた適当な間に+-を入れて100になるようにしなさい。

1□2□3□4□5□6□7□8□9

例えば、

$$123+4-5+67-89=100$$

×÷も認めると、

$$1+23-4-5+6+7+8 \times 9=100$$

( )による優先順位を認めると、

$$(1+2) \div 3 \times 4 \times (56 \div 7+8+9)$$

さらには、逆に並べた987654321の数字の間に加減乗除を入れて100になるようにすると、

$$98-76+56+3+21=100$$

いろいろなパターンで楽しむことができます。

ヨーロッパでは、1から9までの数を1回ずつ使って帯分数がセンチュリー(1世紀、100年)になるようにするセンチュリー・パズルというのがあります。

$$96 \frac{2148}{537} = 100, 91 \frac{5823}{647} = 100 \dots\dots\dots$$

あちら版は、数字の大きさの順には拘らなくてもいいわけです。

次の並びもまたユニークです。

$$51249876 \times 3 = 153749628$$

$$32547891 \times 1 = 195287364$$

$$16583742 \times 9 = 149253678$$

$$8745231 \times 96 = 839542176$$

両辺が1から9までの一揃いの数字で作られています。これもまた、小町算とっていいでしょう。左辺を右辺で割ったら1になるとみることもできます。

数字を並べて遊ぶという発想は、古今東西、どの国にあっても庶民の知的好奇心をくすぐっていたみたいですね。

何の変哲もない数に思えるでしょう。ぱっと見た目は各位の数の和が18だから9の倍数です。

$$297 = 9 \times 33 = 3 \times 3 \times 3 \times 11$$

ちょっと面白いかな、でもどうってことのない数。ためしに平方してみましょう。

$$297^2 = 88209$$

何も起こっていないようですが……でも、よく見てください。

$$88209 \Rightarrow 88 + 209 = 297$$

平方した数を2つに分割して加えると元の数に一致してしまいました。

とんでもない性質が隠されていました。こんな数って他にあるのでしょうか。

$9 \Rightarrow 9^2 = 81 \Rightarrow 8 + 1 = 9$
$55 \Rightarrow 55^2 = 3025 \Rightarrow 30 + 25 = 55$
$999 \Rightarrow 999^2 = 998001 \Rightarrow 998 + 001 = 999$
$2728 \Rightarrow 2728^2 = 7441984 \Rightarrow 744 + 1984 = 2728$

たくさんありそうですね。小さい順に書いていくと、

1, 9, 45, 55, 99, 297, 703, 999, 2223, 2728, 4879, 4950, 5050, 5292, 7272, 7777, 9999,  
17344, 22222, 38962, 77778, 82656, 95121, 99999, 142857, 148149, ……………

このように、平方した数の先頭から、桁数が偶数桁( $2n$ )のときは、 $n$ と $n$ に分割、奇数桁( $2n+1$ )のときは、 $n$ と $n+1$ に分割して加えた数が元の数に一致するとき、この数をカプレカ数といいます。

4桁のカプレカ数は6174であると以前紹介しましたが、どちらもインドの数学者カプレカが発見したので同じ命名になってしまいました。こちらの方を第1定義、6174を第2定義というみたいです。

したがって、297は第1定義による6番目のカプレカ数となります。このカプレカ数の中から2つを選ぶと、

$$\begin{aligned} 1 + 9 &= 10 \\ 45 + 55 &= 100 \\ 297 + 703 &= 1000 \\ 2223 + 7777 &= 10000 \\ 17344 + 82656 &= 100000 \end{aligned}$$

他にもこういう組み合わせが見つかりますね。さらに、よくみるとゾロメ数が登場しています。とくに9のゾロ目はどの桁数でも出現しています。9のゾロ目はカプレカ数なのか確認してみましょう。

$$9999 \dots 99 = 10^n - 1 \Rightarrow (10^n - 1)^2 = 10^n(10^n - 2) + 1$$

すなわち、

$$999 \dots 99^2 = 999 \dots 98000 \dots 01 = 999 \dots 98 + 000 \dots 1 = 999 \dots 99$$

となり、カプレカ数です。他のゾロ目数の存在も考えると、レピュニット数がカプレカ数に関与しているみたいです。

ちなみに、10桁のカプレカ数で最小のものは、

$$\begin{aligned} 1, 111, 111, 111 &\Rightarrow 1, 111, 111, 111^2 = 12345678900987654321 \\ &\Rightarrow 1234567890 + 0987654321 = 1, 111, 111, 111 \end{aligned}$$

平方すると0~9の数字がひと揃いしています。

あれっ？、6桁のカプレカ数の最初の数をみてください。142857。この数って……、ちゃっかり顔を出しています。297についてももう少し。

1の位の7を先頭に移動(巡回的に並べ変えるといいます)して729を作り、カプレカの操作をしてみましょう。

$$729^2 = 531441 \Rightarrow 531 + 441 = 972$$

972を巡回的に並べ変えると297に戻ります。

今度は297の百の位の2を一の位に続けて巡回的に並べた数972にカプレカの操作をします。

$$972^2 = 944784 \Rightarrow 944 + 784 = 1728 \Rightarrow 1 + 728 = 729$$

巡回的に並べ替えるとこれも最初の297に戻ってしまいますね。これは他のカプレカ数でも成立する性質です。

297だけの性質という……297の3乗を計算してみましょう。

$$297^3 = 26198073 \Rightarrow 26 + 198 + 073 = 297$$

凄いですね。297は3乗してもカプレカ数になるのです。

電卓で、

$$39 \times 75$$

を叩いてください。次に、

$$3 \times 975$$

を叩いてみましょう。不思議なことに、どちらも計算結果は

$$2925$$

になります。

$$2925 = 3^2 \times 5^2 \times 13$$

素因数分解の組合せがこんな悪戯をしたのですが、電卓でキーを打ち間違えることはよくあること。そのとき、間違えた計算と同じ答えになったらちょっとびっくりしますね。四則演算のルールに反発する不穏分子は数の世界にもいるのです。

いくつか、例を挙げましょう。

$$83 \times 32 = 8 \times 332 = 2656 \quad 9 \times 8175 = 981 \times 75 = 73575$$

$$17 \times 515 = 1751 \times 5 = 8755$$

割り算にも登場して貰いましょう。

$$8 \div 4 + 1 = 8 - 4 - 1 \quad 20 \div 10 + 4 = 20 - 10 - 4$$

指数も加わると

$$2^5 \cdot 9^2 = 2592 \quad 31^2 \cdot 325 = 312325$$

$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3 \quad 9474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$$

階乗も登場して

$$145 = 1! + 4! + 5! \quad 40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$$

括弧( )も入れると、

$$81 = (8+1)^2 \quad 4913 = (4+9+1+3)^3$$

$$1679616 = (1+6+7+9+6+1+6)^4$$

さらには

$$2025 = (20+25)^2 \quad 6832014336 = (68320+14336)^2$$

ちょっと尋常ではなくなってきました。

分数でもあります。

$$\frac{9}{2} \times \frac{9}{7} = \frac{9}{2} + \frac{9}{7} \quad \frac{3}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{5} - \frac{3}{8}$$

ここまでくると数の社会も無法地帯。

演算子がみな反乱を起し始め、混沌が支配し始めます。

でも、さすがに

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{a+b}{x+y} \quad (a, b, x, y > 0)$$

はありません。なぜならこれを認めてしまうと、

$$\frac{ay+bx}{xy} = \frac{a+b}{x+y} \quad \text{より、} \quad (ay+bx)(x+y) = xy(a+b)$$

整理して、 $ay^2 + bx^2 = 0$

これを満たす  $a, b$  の組はないのです。数達もこの計算だけはやっちゃいけないと思っているようです。

でも、次の問題ではどうなるでしょう。

箱Aには白球5個と赤球2個、箱Bには白球3個と赤球1個が入っています。

箱A, Bの中から赤球1個を取り出す確率は、それぞれ  $\frac{2}{7}, \frac{1}{4}$  ですね。

つぎにAとBの球を別の箱にまとめて入れると、箱の中には白球8個と赤球3個になります。

この箱の中の赤球1個を取り出す確率は  $\frac{3}{11}$  です。どちらの試行も赤球1個を取り出す確率ですから、

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{7+4}$$

一見、正しそうに見えますね。

結局、数達の遊び心を屁理屈で歪めてしまうのは、いつも人間の側なのです。

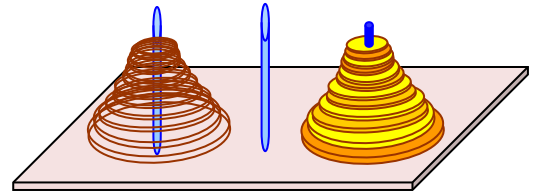


不思議な話を紹介しましょう。

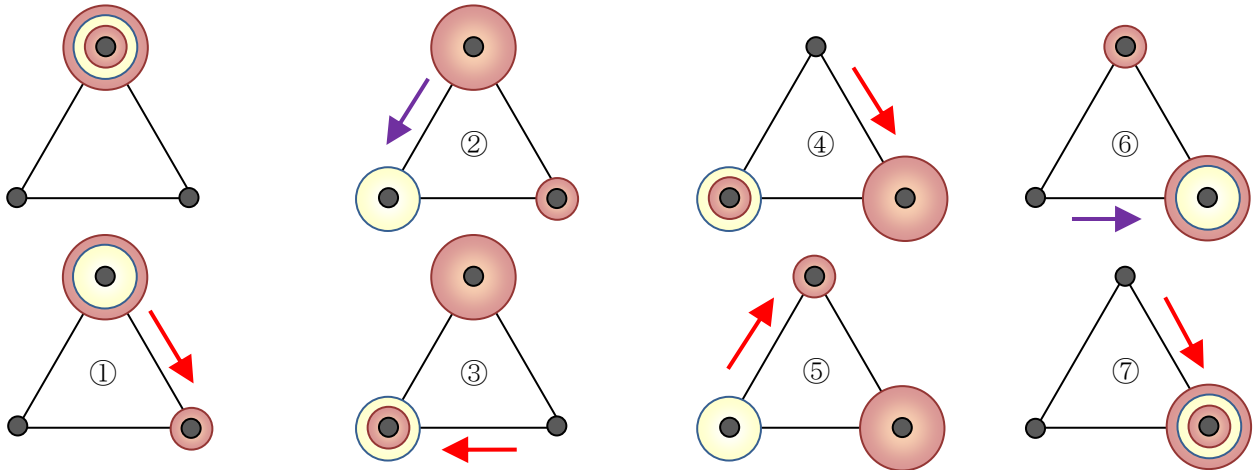
インドのガンジス川ほとりの町ベナレスのバラモン教の寺院には、世界の中心を表すという聖堂がある。この聖堂の中には3本の大理石の柱が立っており、その1本には、大小64枚の黄金の円盤が、大きい円盤から順に重ねられている。この円盤をバラモン教の僧侶(ブラフマン)が昔から昼夜を問わず次の規則で移し換えている。バラモン教の教えでは、最初にこの円盤を1番目の柱に重ね並べたのは神であり、僧侶がすべての円盤を3番目の柱に移し換えたとき、この世は崩壊し終焉を迎えるという。僧侶は今も浄罪を求め滅びに向かってひたすら円盤を移している。

円盤の移動規則は、次のようになっています。

- ① 1回に1枚の円盤しか移動できない
- ② 移動した円盤は3本の棒のいずれかに必ず差し込む
- ③ 移動した円盤はそれより大きな円盤の上に乗せる



これを体験できる「ハノイの塔」いう玩具があります。1883年に発売され、フランスの数学者リュカ教授が知り合いのクロー教授から教えてもらったものと言われていましたが、その後、クロー(Claus)はリュカ(Lucas)のアナグラム(文字の綴り換え)であり、バラモンの塔の伝説もリュカ教授の創作であったことが判明します。このゲーム「ハノイの塔」を紙上で体験してみましょう。下図は3つの円盤の場合で、柱は正三角形の頂点に配置しています。番号順に円盤の移動を追っていくと、ご覧のように最小7回の操作で、3つの円盤が1つ右回りの頂点に移動しています。

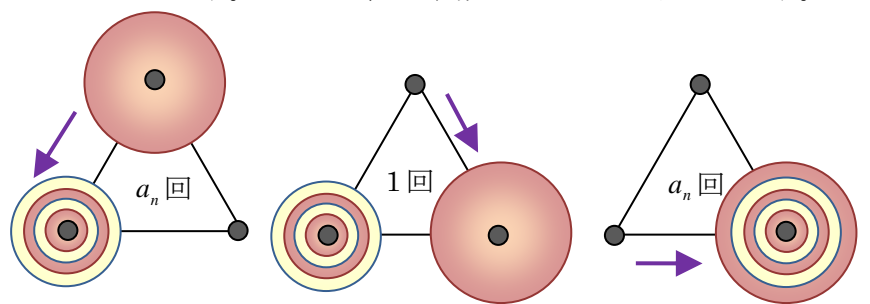


では円盤が4つになった場合の最小の手数はというと、それを計算することはそれほど難しくはありません。

まず4番めの一番大きな円盤はないものとして、上3つを別の柱に7回の操作で移します。次に4番目を空いている柱に通し、その上にまた3つの円盤を7回の操作で移動させればよいのです。したがって、その総数は7+1+7=15回になります。

同様に考えれば  $n$  枚の円盤の最小移動の手数を  $a_n$  とすると、 $n+1$  枚のときの最小手数  $a_{n+1}$  は  $a_{n+1} = a_n + 1 + a_n = 2a_n + 1$  となり、この漸化式から一般項  $a_n = 2^n - 1$  が得られます。

これで移動の最小回数は分かりましたが、では実際の移動はどのようにすればいいのでしょうか。円盤3枚の移動図の2段目をみるとその移動法が分かります。2段目はすべて一番上の円盤(円盤1)が1頂点ずつ時計回りに移動しているのが分かるでしょうか。これから円盤の移動のオートメーション化ができます。



**「奇数回目は円盤1を時計回りに1頂点ずつ進め、偶数回目は、円盤1以外の移動可能な円盤を移す」**

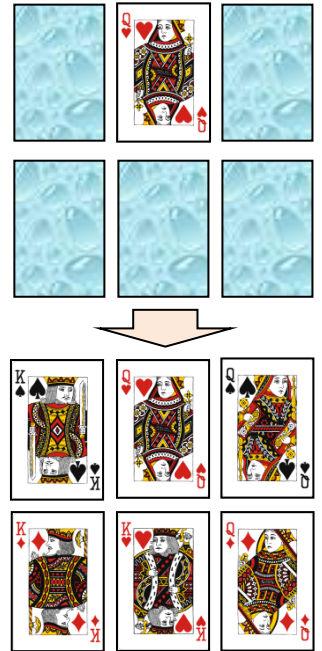
ちなみに、すべての奇数番目の円盤は時計回りに、偶数番目の円盤は反時計回りに移動しているのです。

さて、バラモンの僧が、この移動法で1秒に1回動かすと終焉までの移動回数は、 $2^{64} - 1 = 1844,6744,0737,0955,1615$ 。とんでもない回数で、日数にすると5800億年以上を費やすことになり、私たちにとって終焉などどうでもいいことになってしまいます。でも円盤の枚数が87枚や107枚の場合を考えると別の新たな興味が湧き出ます。 $2^{87} - 1$ 、 $2^{107} - 1$ は、 $2^n - 1$ で表される素数であり、メルセンヌ素数といえます。そしてリュカ教授は、1876年、 $n = 127$ が素数であることを満足な計算機もなかった当時に手計算で求めているのです。これはメルセンヌ素数の12番目にあたります。その後メルセンヌ素数は計算技術の発達により次々にみつけられ、現在では40個が確認されています。その最大のもは  $n = 20996011$  で、バラモンの伝説も霞んでしまいます。でも、リュカ教授が求めた  $2^{127} - 1$  は手計算で得たものとしては最大であり、教授はその研究の一過程に遊び心でハノイの塔とその伝説を考えたのかなとも思うのです。 $n = 127$ を実際手計算で求めたリュカ教授は自身をバラモン僧と同一視し、そして成し遂げたわけで、伝説を超えた数学者の深く壮大なロマンが数  $2^{64}$  には込められているのです。

# 1 2

………心理を揺さぶる数

クイーン(Q)とキング(K)のトランプが2枚ずつ3列に計6枚、図のようにテーブルの上に裏返しに並べられています。各列の2枚のトランプは、QQ、KK、QKのいずれかであることは分かっています。いま、ある列の2枚のトランプのうち1枚をめくったところQでした。このとき同じ列の残りの1枚がKである確率を求めてください。



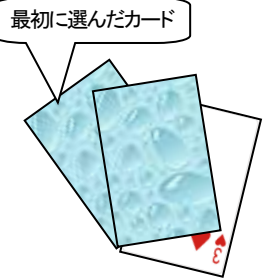
Qのカードがあるのは、QQ、QKの2組ですから、残りのトランプがKである確率は $\frac{1}{2}$ ……としてしまいたくなりますが、それは誤りです。例えば3枚のQ、Kをハート、ダイヤ、スペードとし、各組の組合せを(スペードKダイヤK)、(スペードQダイヤQ)、(ハートQハートK)とします。いま1枚のカードをめくったときQであるならば、そのカードはハート、ダイヤ、スペードのいずれかです。その中でもう1枚がKとなるのは、(ハートQハートK)の1組だけですから、その確率は $\frac{1}{3}$ となります。このようにある事象

Aが起こった条件で事象Bの起こる確率をBにおけるAの条件付き確率といい $P_A(B)$ で表し、その確率は $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ で得られます。Qのカードをめくる事象をA、その組

にKのカードがある事象をBとすると、 $P(A) = \frac{1}{2}$ は明らかです。またQのカードであり

もう1枚がKである確率は、 $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ 。これから、 $P_A(B) = \frac{1}{3}$ であることが示されます。

トランプゲームの相手が、ハートのエース、ハート2、ハート3の3枚のカードを持っています。その中から1枚を抜いて、エースであればこちらの勝ちです。選んだ1枚を抜こうとしたところ相手は制止をかけ、残り2枚からエースでない1枚をこちらにみせて、「選ぶカードを考えなおしてもいいよ」といいました。あなたはどうしますか。



ハートのエースは相手の持っている残り2枚のうちの1枚ですから、最初に選んだカード、選び直したカードどちらもその確率は $\frac{1}{2}$ です。だから選び直すかどうかは外れた場合の落胆の度合いが大きく影響し、さら

に第一の直感を信じるならば別に変えなくてもいいということになるかも知れませんが、それは誤りです。選び直すことで当たる確率は2倍になります。その原因は、相手がみせるカードは意図的に提示されることにあります。右図は最初に引いたカードに対して相手がどのカードを提示し勝敗がつくかを示したものです。勝敗の欄では○と×の数はどちらも4通りですから確率も半々になるように思えますが、みせるカードの段階で確率に違いが生じています。No.5~7は最初のカードはハズレですから見せるカードも残り1枚のハズレに限定されます。しかしNo.1~No.4は、最初に選んだカードは当たりであるため見せるカードはハズレ2枚のどちらかになり、その確率は $\frac{1}{2}$ になります。そのためNo.1~No.4の確率は、 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

No.	最初のカード	みせたカード	変更	勝敗	確率
1	ハートA	ハート2	有り	×	1/12
2			なし	○	1/12
3		ハート3	有り	×	1/12
4			なし	○	1/12
5	ハート1	ハート2	有り	○	1/6
6			なし	×	1/6
7	ハート2	ハート3	有り	○	1/6
8			なし	×	1/6

であり、No.5~No.8の確率は、 $\frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ になります。これより、変更ありの条件で勝負に勝つ確率は右下の計算で得られます。最初のカードを選ぶ確率は $\frac{1}{3}$ でありカードを変更することで $\frac{2}{3}$ になることは、確率が倍になるというより、相手

が当たりでないカードを見せることでそのカードの勝つ確率を0にしてくれるからです。この時点で残り1枚のカードの勝つ確率は $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ になるのです。

**【変更した場合に勝つ確率】**

$$\frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$$

2つの問題はいずれも確率 $\frac{1}{2}$ に惑わされてしまいます。人は勝つことより負けること

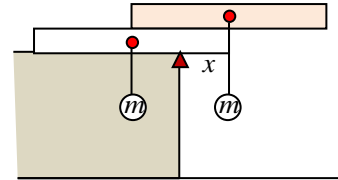
や後悔することを恐れる気持ちが強く、心理的に確率を見誤り、「evenであればいいだろう」と妥協してしまいます。

この心理を補正するのが論理であり、 $\frac{1}{2}$ は心理と論理の重みのバランスも量っているのです。

雑然とした机の上に積み重ねられた書籍が机の端からはみ出し、今にも落ちそうで落ちない。そんな光景みたことはありませんか。一番上に乗っている本の真下はもうほとんど机にかかっていないのに絶妙な均衡を保ち机の上の積み重なった書籍は芸術的なオブジェといってもいいでしょう。でもどこまで机の端から本を重ねてせり出すことは可能なか気になりますね。

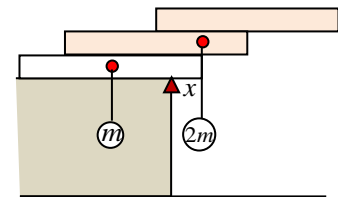
ただ、書籍ではサイズが違ったりしますから、ここでは、

「均質な直方体の積み木を机の端から積み木がテーブルの側面と平行になるようにできるだけせり出すように重ねていく」として調べてみましょう。1 個の場合は、積み木の真ん中が机の端にあればいいのは明らかです。2 個の場合は、まず机の真ん中に1 個おきその上に半分ずらした積み木を重ねます。その2 個を少しずつ机の端に移動させればいいのです。積み木1 個の長さを1、重さを  $m$  とします。一番下の積み木が机の端から



$$x \text{ だけせり出して釣り合うとき、力のモーメントの関係より、} m\left(\frac{1}{2}-x\right)=mx \quad \therefore x=\frac{1}{4}$$

もう1 個増やしてみましょう。床の真ん中に1 個置き、2 個目を  $\frac{1}{4}$  ずらし、3 個目を2 個目の上に  $\frac{1}{2}$  ずらして置きます。これをずらし一番下が机の端から  $x$  せり出して釣り合うように置きます。



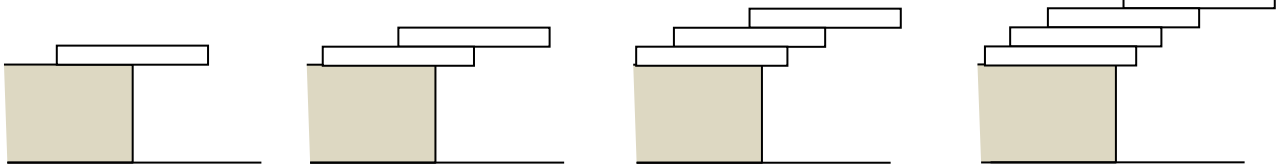
$$\text{一番下の重み } m \text{ とその上2 個の重み } 2m \text{ が釣り合うことより、} m\left(\frac{1}{2}-x\right)=2mx \quad \therefore x=\frac{1}{6}$$

以下同じように考えていき、 $n$  個積み重ねるとすると、一番下の重み  $m$  と、その上に  $(n-1)$  個

$$\text{の重み } m(n-1) \text{ が釣り合うことより、} m\left(\frac{1}{2}-x\right)=m(n-1)x \quad \therefore x=\frac{1}{2n}$$

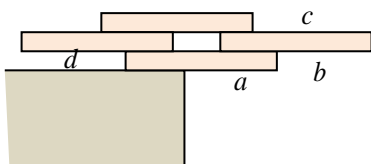
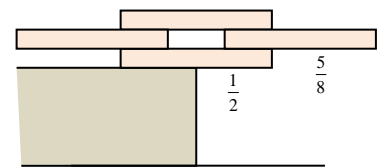
結局、上のある積み木をその下の積み木に対して  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots$  だけ調和数列になるようにせり出し積み重ねていけばいいのです。したがって、机の端から一番上の積み木の端までせり出している長さは、

2 個のとき  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$     3 個のとき  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$     そして4 個のとき  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{25}{24}$   
4 個で積み木1 個分以上せり出していて、一番上の積み木の真下にはもう机はないのです。



これは、積み上げ方を変えればもっと長くせり出すようにすることも可能です。

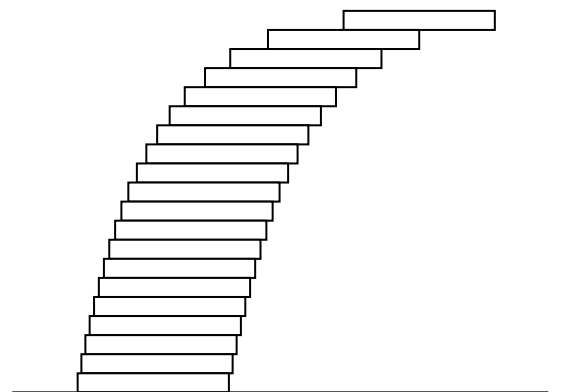
4 個を右図のように積み重ねると机の端からもっともせり出している積み木の端までの距離は  $\frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8}$  ですから、先ほどの場合よりさらに  $\frac{1}{12}$  だけ長くなっています。このように2 番目と3 番目を並列におき、隙間をつくることにより、せり出す長さを伸ばせるのです。積み木4 個の場合は各積み木の位置を調整することで、1956年にサットンという人は下図のように最大  $a+b = \frac{15-4\sqrt{2}}{8} = 1.168$  だけせり出せることを示しました。



$$a = \frac{7-2\sqrt{2}}{8} \quad b = \frac{4-\sqrt{2}}{4}$$

$$c = \frac{19-10\sqrt{2}}{7} \quad d = \frac{11-\sqrt{2}}{14}$$

積み木は、子どもにとっては「積み上げていけば何かができる」という創造への興味が尽きない玩具です。そして大人にとっても忘れかけていた純粋さやひたむきさを思い出させてくれるものなのでしょう。だから、大人は机の上に雑然と本を積み上げたくなるのでしょうか(そんなことはないですね)。そしてその積み上げ方はもっと芸術的です。ルールをきめて積み上げているわけではなく1 個置いたときに斜めにしたり、本を開いておいたり……。そのバランスに空中浮揚をさせる数たちも唾然としてしまえばかりです。



問 円周上の  $n$  ( $n \geq 2$ ) 個の点を結んでできる弦により、円の内部が分割されてできる領域の最大個数を求めなさい。

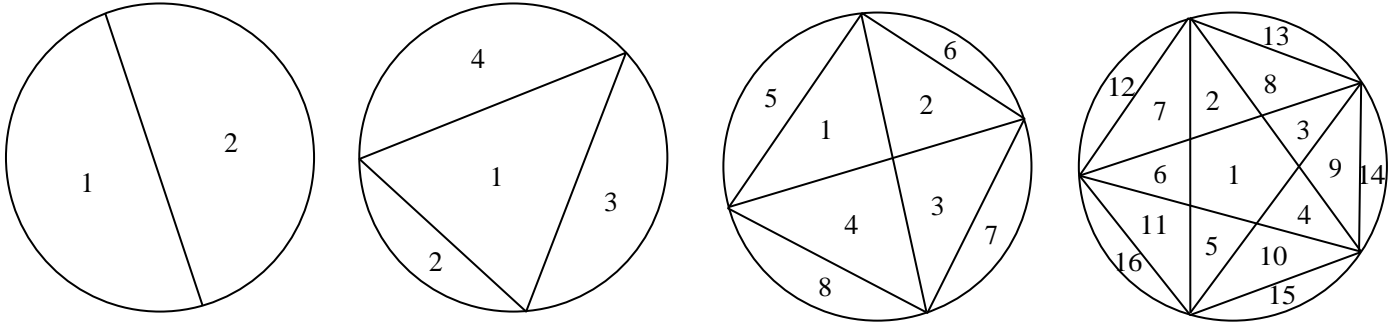
具体的に図を描き、分割数を予測してみるのが一番いいでしょう。下図は、 $n=2$  から  $n=5$  について示したものです。では  $n=6$  の場合は最大分割数は何だと思えますか。  $n$  個の場合の最大分割数を  $D(n)$  とすると、下の図より、

$$D(2)=2, D(3)=4, D(4)=8, D(5)=16$$

となっています。分割数は2倍されて増えていっているようですね。だから、 $D(6)=2 \times D(5)=32$

そう答えると、表題の今回の数31は無然として、あなたに一瞥を与えることでしょう。

正解はもちろん  $D(6)=31$  です。



確かに、 $n=5$  までは、 $D(n)=2^{n-1}$  と予想できるような変化の仕方です。実際、描いてみると  $n=5$  のときには図も結構複雑になり、苦勞して16分割という答えがでてくるため、この辺で結論を出していいのかなと思い、先程の誤答に走ってしまうのです。でも、もう少し注意深く見ると、仮に  $n=1$  のときは1個となるはずですから、予想の一般項に代入すると、 $D(1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$  となり「おかしいぞ」と思うはずなのです。だいたい、すべての  $n$  に対して成立することを高々4つぐらいの図の検証で判断することは無謀であり、例えば

$$D(n) = 2^{n-1} + (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

のようにいくらでも、ある  $n$  までは成立する式を作ることは可能なのです。「思慮が浅く、安易に妥協する」ことに対して数31はしかめっ面をするのです。

では、 $n=6$  についても図で調べてみましょう。 $n=5$  のときの頂点  $P_1 \sim P_5$  に、もう一点  $P$  を  $P_2P_1$  上にとります。弦  $PP_3$  は、4本の弦と交わり、5つの線分に分割されます。その線分により、線分を含む領域はそれぞれ2分割され、新たに5つの領域が作られます。同じように、弦  $PP_1$  と  $PP_5$  では1つずつ、弦  $PP_2$  と  $PP_4$  では4つずつ作られます。したがって、その最大分割数は、

$$D(6) = D(5) + 2 \times (1+4) + 5 = 31$$

になるのです。そしてこのような考え方から、 $D(n)$  についても求めることが、本来あるべき一般化といえるでしょう。やってみましょう。

$P_1 \sim P_n$  の  $n$  個の点に対して、 $P_nP_1$  の間に点  $P_{n+1}$  をとり、弦  $P_{n+1}P_k$  を考えます。このとき、 $P_1P_k$  の  $P_1 \sim P_{k-1}$  を含む側の  $k-1$  個の点と、 $P_{k+1} \sim P_n$  を含む側の  $n-k$  個の点を結んでできる  $(k-1)(n-k)$  個の弦により、弦  $P_{n+1}P_k$  は、

$$(k-1)(n-k)+1 \text{ 個の線分}$$

に分割され、その分割線分だけ新たに領域が作られます。これより、

$$D(n+1) = D(n) + \sum_{k=1}^n \{(k-1)(n-k)+1\} = D(n) + \frac{1}{6}n(n^2 - 3n + 8)$$

これから  $D(n)$  を求めると、

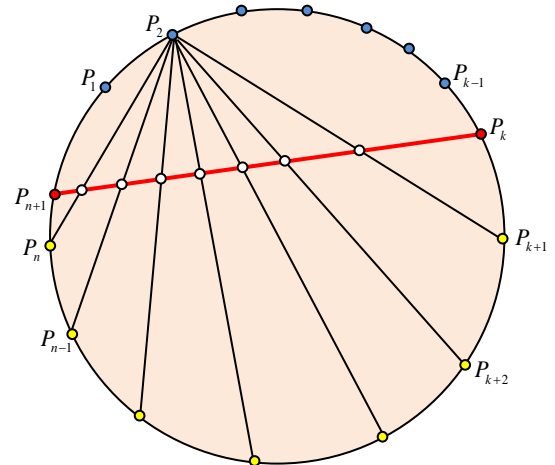
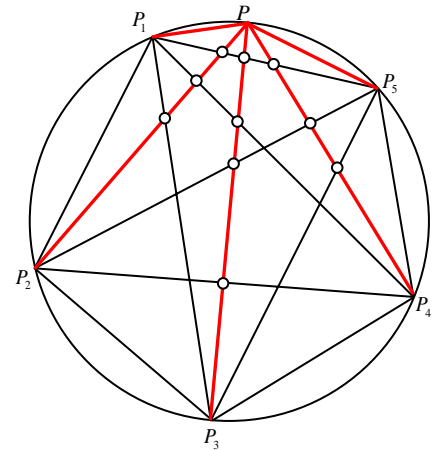
$$D(n) = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$$

数31の憤りが理解できるようなすごい式が現れるのです。

※ 一般項については、

$$D(n) = {}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_2 + {}_{n-1}C_3 + {}_{n-1}C_4$$

としても表されます。この式から  $n \geq 6$  では推測が崩れることが分かります。





# 34

………方陣に散りばめられた魔法数

魔方陣を知っているでしょうか。正方形を  $n$  行  $n$  列に仕切ったの升目に縦横斜めのそれぞれの和がみな等しくなるように数を書いたものです。右図は3行3列(以下  $3 \times 3$  と表します)の魔方陣で、縦横斜めの和は15になっています。今流に言えば、マンションに数が仲良く秩序を保ち居住しているようなものですが、昔は、和が一致するように並べられることが神秘的であると考えられ、占いなどの呪術にも利用され、「魔の数」として欧州、中国そして日本と古今東西、この魔法数の秩序は世界を駆け巡ったのです。その中でも特に異彩を放つのが4行4列の魔方陣です。この場合の行や列の総和は

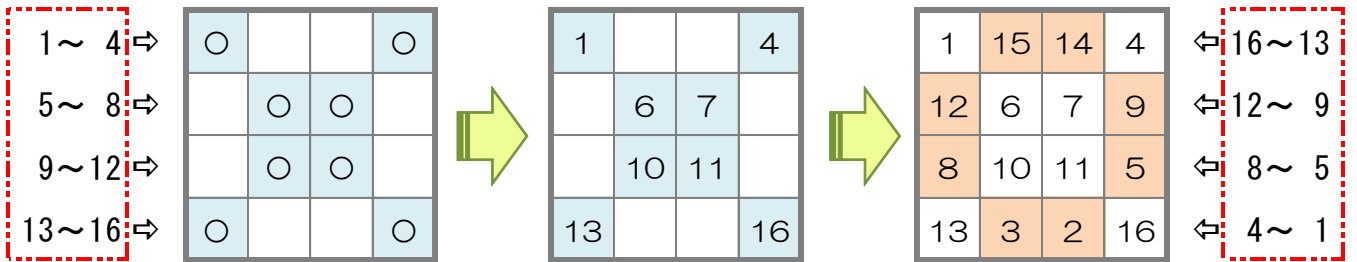
8	1	6
3	5	7
4	9	2

$$\frac{1+2+3+\dots+15+16}{4} = 34$$

となります。この魔方陣の簡単な作成方法としては14世紀にモスコブロスが発見した次のものが知られています。

- ①対角線上のマスをチェックする。
- ②上の行から順番に左から1~16の数字を当てていき、チェックのあるマス目にその数字を書き込む。
- ③下の行から順番に右から1~16の数字を当てていき、空欄のマスをその数字を書き込む。

以上の作業で、 $4 \times 4$  方陣が完成します。



ただ、この  $4 \times 4$  方陣は1つの作成方法に過ぎず、作成可能な方陣の総数はなんと880通りもあるのです。こうして作られた  $4 \times 4$  方陣には、ある行や列を入れ替えてもまた魔方陣になるという不思議な性質があります。例えば、上図の方陣で2行と3行を入れ替えても  $6+11=7+10$  であることから、別の魔方陣が作られます。2列と3列、1行と2行、いろいろ入れ替えてください。すべて魔方陣になっていることが分かるはずですよ。そしてこれらの魔方陣の中にはさらに完全方陣と呼ばれる特別なものが48通り存在しています(右下図)。

完全方陣は、縦横斜めだけでなく、次のマス目の総和も34になります。

- ①方陣を表す正方形の各辺に同じ方陣を並べたときの対角線上の4つのマス目の和 (右図のような斜め方向の和になります)

- ②隣接する4つのマス目( $2 \times 2$ )の和

さらに、②は  $2 \times 2$  と同様に、

- ③  $3 \times 3$  の正方形の四隅の和

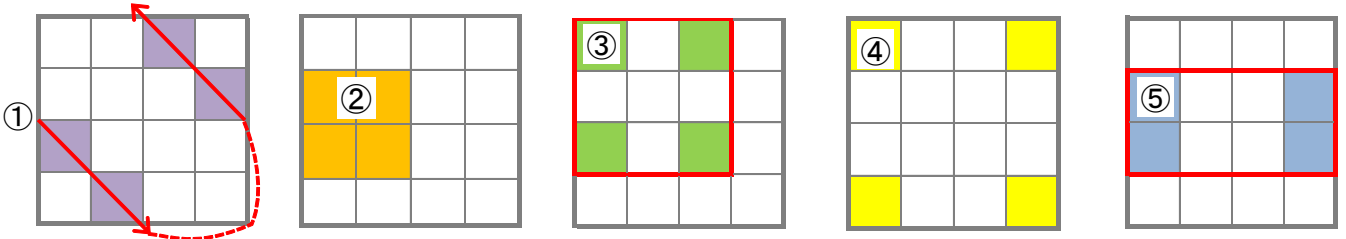
- ④  $4 \times 4$  の正方形の四隅の和

とみてまた、和は34になります。では長方形の場合はどうでしょうか。

- ⑤  $2 \times 4$  または  $4 \times 2$  の長方形の四隅の和

この和も34になっています。

1	8	11	14
15	10	5	4
6	3	16	9
12	13	2	7



完全方陣の中にはこれだけと34が潜んでいます。和が34になる場合の数を調べてみましょう。

縦と横はそれぞれ4通りで計8通り。

斜めは①含めて、右上方向、左下方向それぞれ4通りで計8通り。

正方形の四隅は(②③④)は、 $2 \times 2$  は9通り、 $3 \times 3$  は4通り、 $1 \times 1$  は1通りで計14通り。

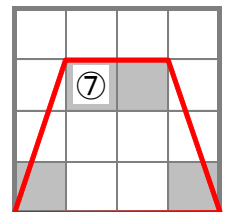
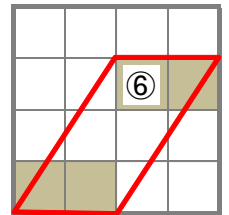
そして長方形の四隅(⑤)は6通り。

以上合わせると36通りです。また、右図の⑦⑧のように平行四辺形、台形の四隅も和が34になり

ます。それぞれ8通りありますから、これも含めるとその総数は52通りになります。ちなみに1~16から4つの数を選んだ場合、その和が34になる組み合わせは全部で86通りあります。

ということは、和34がきれいに配置されていないものの数は全部で  $86 - 52 = 34$  通り。

あれっ、この34って……。



365 = 10<sup>2</sup> + 11<sup>2</sup> + 12<sup>2</sup> = 13<sup>2</sup> + 14<sup>2</sup>という面白い性質はありますが、数365から連想するものは多くの人には365日の1年でしょう。でも366としたら、うるう年366日を思い浮かべる人はあまりいないかもしれません。4年に1度巡ってくる、うるう年から1年の長さは365に固定されたものでないことは分かりますね。現在、使用されている太陽暦はグレゴリオ暦といい、グレゴリウス3世により制定されたものです。それまで使用していたユリウス暦(ジュリアス・シーザーが制定)は、1年を365.25日と考え、その0.25のズレを修正するために4年に1度のうるう年を設けていました。ところがその後、天文学者の計算の結果、約365.2422日であることが分かり、その僅かなズレが長い年月で積み重なり、大きなズレとなったために、1582年10月4日(木)の翌日を1582年10月15日(金)としてグレゴリオ暦を採用したのです。日本では明治6年1月1日からの採用になります。グレゴリオ暦ではうるう年の設定をもっと厳密に次のようにしています。

西暦が4の倍数のとき、うるう年とする。  
ただし、西暦が100の倍数であり400の倍数でないときは平年とする。

だから西暦2000年はうるう年ですが、西暦2100年はうるう年ではないのです。ただ、調整はこの部分だけですから、それを式化することができたとしたら、指定した年月日の曜日を求めることが可能になるはず。そして実際、ツェラーという人はそのことを考え曜日計算の公式を導いたのです。

西暦Y年M月D日の曜日は次式により求められる。

$$W = Y + \left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26(M+1)}{10} \right\rfloor + D$$

のとき、Wを7で割った余りが右の曜日に対応する。

余り	1	2	3	4	5	6	0
曜日	日	月	火	水	木	金	土

ガウス記号[x]はxを超えない最大の整数(xの小数以下を切り捨てた整数)を表し、例えば[3.2]=3になります。公式を用いて2011年12月24日の曜日を求めてみましょう。Y=2011、M=12、D=24より、

$$W = 2011 + \left\lfloor \frac{2011}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2011}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2011}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13 \times 26}{10} \right\rfloor + 24 = 2011 + 502 - 20 + 5 + 33 + 24 = 2555$$

2555は7で割り切れるため、余り0に対応する曜日をみて今年のクリスマスイブの曜日は土曜日であることが分かります。ただし、この式は、西暦0年3月1日を起点の日とする関係で、1月と2月は、Mの値はそれぞれ13月、14月とします。

この公式が成立する原理は、曜日が日～土の7日の周期で繰り返されることにあります。ツェラーの公式は実は単純に起点からの総日数をカウントしてそれを7で割り、余りを曜日に対応させているだけなのです。1年は365日であることを標準とすると、西暦0年3月1日からの西暦Y年2月28日までの日数はうるう年の微調整を考慮しなければ、365Yになり、非常に大きな日数になります。そこで365Y = 7 × 52Y + Yとみて、予め7の倍数分だけ除いた値YでWは計算をしています。

Yに続く、 $\left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor$ ,  $\left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor$ ,  $\left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor$ は、それぞれ「うるう年を加算」、「100の倍数のうるう年を減算」、「400の倍数のうるう年を加算」して調整していることは明らかでしょう。Wの式の最後の項Dは、西暦Y年M月1日から西暦Y年M月D日までの日数をカウントしています。そして、項 $\left\lfloor \frac{26(M+1)}{10} \right\rfloor$ は西暦Y年3月1日から西暦Y年(M-1)月末日までの日数を計算する部分です。これもまず1ヶ月をすべて30日として総日数30(M-3)を求め、これに各月の日数を調整する式を加えます。右表が微調整する日数で、4月と9月を表す2点(4,1), (9,4)を通る直線 $N = \frac{3}{5}(M-4) + 1$ から微調整の式を作ります。そして最後に西暦0年3月1日の曜日を表す4(すなわち水曜日を表す余り)を最終調整に加えます。

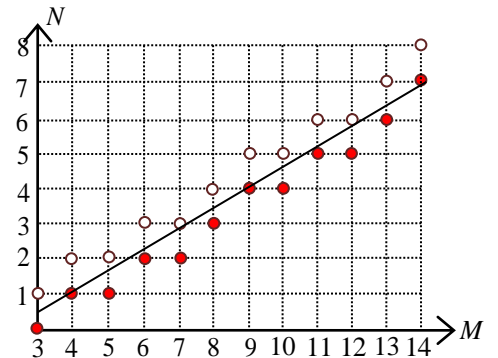
月	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
日数	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	31	28
調整	0	1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7

これを7で割ると、その余りの部分から目的の式がやっと得られました。これであなたは、現在、過去、未来のいかなる日にちでもたちどころにその曜日を知ることが可能になるのです。

$$(4-1) + 30(M-3) + \left\lfloor \frac{3}{5}(M-4) + 1 \right\rfloor = 7(4M-13) + \left[ (2M+4) + \frac{3}{5}M - \frac{7}{5} \right]$$

$$= 7(4M-13) + \left\lfloor \frac{26(M+1)}{10} \right\rfloor$$

これを7で割ると、その余りの部分から目的の式がやっと得られました。これであなたは、現在、過去、未来のいかなる日にちでもたちどころにその曜日を知ることが可能になるのです。



うるう年に対してうるう秒というのがあります。これは1年の秒数を1秒長くし1分を61秒にする調整です。近年では2006年と2009年の元旦に8時59分59秒の後、8時59分60秒、9時00分00秒とカウントされました。記憶にある人も多いでしょう。うるう秒は天体の動きによる天文時と原子時計の刻む時刻である原子秒とのズレを修正するものでうるう年の調整とは関係ありません。ただ、今までは天の動きで四季の移ろいを感じていた人の意識に新たに電子という機械が混在してきたことは確かです。アナログ的な天文時間から点滅するデジタルタイムにより人間の生活が支配される時代はもう遠くないのかもしれない。



各位に同じ数字が並ぶ3桁の数(ゼロ目の数)をひとつ考えてください。  
次に、その数から余りが3桁になるような適当な3桁の数を考えて引いてください。  
その余りからまた適当な3桁の数を引いて、余りが3桁になるようにしましょう。  
最初に引いた3桁の数、2番目に引いた3桁の数、最後の余りである3桁の数を並べて9桁の数を作ります。  
その9桁の数を37で割ってみてください。  
割り切れますね。どうしてでしょうか。  
ゼロ目の数を777、1番目、2番目に引く数をそれぞれ312、216としてやってみましょう。

$$\begin{array}{r} 777 \quad 465 \\ - 312 \Rightarrow - 216 \Rightarrow 312216249 \Rightarrow 312216249 \div 37 = 8438277 \\ \hline 465 \quad 249 \end{array}$$

確かに割り切れています。ゼロ目の数に潜む秘密を暴いてみましょう。

3桁のゼロ目の数を

$$N = a \times 10^2 + a \times 10 + a = 111a \quad (1 \leq a \leq 9)$$

とします。最初に引いた数、2番目引いた数、最終的な余りである3桁の数をそれぞれ  $b, c, d$  とすると、

$$N - b - c = d \text{ より、 } N = b + c + d$$

作られる9桁の数  $M$  は、

$$\begin{aligned} M &= 10^6 b + 10^3 c + d \\ &= (10^6 - 1)b + (10^3 - 1)c + d \\ &= 999999b + 999c + b + c + d \\ &= 999999b + 999c + N \\ &= 999999b + 999c + 111a \end{aligned}$$

ここで、

$$999999 = 37 \times 27027, \quad 999 = 37 \times 27, \quad 111 = 37 \times 3$$

ゼロ目の数が37の倍数になることより、 $M$  は37で割り切れるのです。

もちろん、すべてのゼロ目の数が37で割り切れるわけではありません。桁数が3の倍数になっている場合であり、各位の数が  $a$  のときは、 $a$  は37と互いに素であることより、

桁数が3の倍数である各位が1であるゼロ目(リピュイット数)は37の倍数ということになります。

$$\begin{aligned} 111 &= 37 \times 3 \\ 111111 &= 37 \times 3 \times 1001 \\ 111111111 &= 37 \times 3 \times 1001001 \\ 111111111111 &= 37 \times 3 \times 1001001001 \end{aligned}$$

気がつきましたか。37の背後にはコピー数みたいなものがうごめいているようですね。

面白い心理テストをひとつ。

1から50までの間の2桁の数をひとつ思い浮かべてください。  
ただし、どの桁も奇数でかつ同じ数字ではないようにしてください。  
例えば、11なんていうのはだめですよ。  
さて、私が持っている紙にはあなたの考えた数が書いてあります。

ここで、おもむろに、あらかじめ紙に書いてあった紙をあなたは見せません。

そう、37と書いた紙を。

この文を読んでいるあなたは、きっと37だろうと考えるから違う数字を思い浮かべるでしょう。

でも、何も知らない多くの人は37を思い浮かべるのです。

このテストはマジシャンの間では「心理応用トリック」と呼ばれています。

「どの桁も奇数で同じ数字ではない」とすることで、十の位の数は1または3に制限されます。一の位は十の位で考えた数以外の奇数の4通りより、その場合の数は  $2 \times 4 = 8$  通りしかありません。さらに、例として11を提示したことにより、気持ちは30台の数字へ動き、比較的誰もが好きな7を一の位にしまいます。

深層心理にも37はちょっとした悪戯をしかけているのです。

# 3087

.....リバーシブルな数

4桁の数で各位の数字の並びが連続している整数を考えてみましょう。  
例えば5678です。次に、この数字に3087を加えてみます。

$$5678 + 3087 = 8765$$

なんと、数字の並びが逆転してしまいました。他の4桁の数字ではどうでしょうか。

$$2345 + 3087 = 5432$$

$$3456 + 3087 = 6543$$

.....

$$6789 + 3087 = 9876$$

並びが連続する4桁の数は、どれも同じことが起こります。見方を変えれば、位の高い方から連続して数字が小さくなる4桁の数から、その数字の逆の並びの4桁の数を引くと常に3087になるということです。どうしてこんな現象が起きるのでしょうか。

数字の一の位から順に連続して増える4桁の数を  $P$ 、その逆の並びの数を  $Q$  とします。

$$P = 1000(a+3) + 100(a+2) + 10(a+1) + a = 1111a + 3210 \quad (1 \leq a \leq 6)$$

$$Q = 1000a + 100(a+1) + 10(a+2) + (a+3) = 1111a + 123$$

これから、

$$P - Q = 3210 - 123 = 3087$$

値は、 $a$  に関係のない定数になっています。このことがリバーシブル現象を引き起こしているようです。

この性質は数字が連続する9桁までの整数すべてに対していえます。

$$P = \sum_{k=1}^n (a+k-1)10^{k-1} \quad (1 \leq n \leq 9, 1 \leq a \leq 10-n)$$

$$Q = \sum_{k=1}^n (a+n-k)10^{k-1}$$

とすると、 $P > Q$  だから、

$$P - Q = \sum_{k=1}^n (2k - n - 1)10^{k-1}$$

この和を求めることはできますが、最大9桁の数だから、計算することは野暮というもの。 $a$  を含まない式、すなわち、 $a$  の値に無関係な数となることが分かるだけで十分です。具体的には、

$$\begin{aligned} P - Q &= \sum_{k=1}^n (2k - n - 1)10^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n k \cdot 10^{k-1} - \sum_{k=1}^n (n - k + 1)10^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n (k - 1)10^{k-1} - \sum_{k=1}^n (n - k)10^{k-1} \end{aligned}$$

であることより、 $n$  桁の連続数の差は、構成する最小数を  $a$  とすると、各位が  $a$  または  $a+1$  のゾロ目をそぎ落とした連続数の差として表されるのです。これから、

$$\begin{aligned} 2\text{桁の数は} & 21 - 12 = 10 - 1 = 9 \\ 3\text{桁の数は} & 321 - 123 = 210 - 12 = 198 \\ 4\text{桁の数は} & 4321 - 1234 = 3210 - 123 = 3087 \\ 5\text{桁の数は} & 54321 - 12345 = 43210 - 1234 = 41976 \end{aligned}$$

美しい数の並びが作られます。最大の9桁の数については、

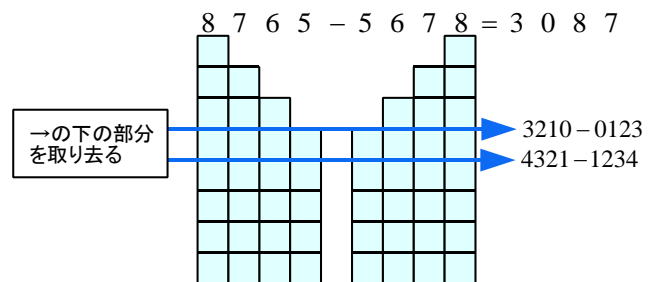
$$987654321 - 123456789 = 876543210 - 12345678 = 864197532$$

1~9 のすべての数字が1回ずつ現れる美しい値となります。

この数字は、数123456789のところを触れた、

$$123456789 \times 7 = 864197523$$

に似ていますね。これも数のお茶目な悪戯でしょうか。



# 31415

……ケタ数移動を司る数

数当てマジックをひとつ。

ある数字が書かれた紙がここにあります。この数字をあなたに当ててもらいましょう。

紙を裏返しにします。ここに適当な4桁の数を書きます。

例えば、……1418にしましょう。

この数の下に、どんな数でもいいから4桁の数を書いてください。

では、今度は私が適当な4桁の数をさらに続けて書きます。

同じように、この下に適当な4桁の数を書いてください。

次は、私の番です。

はい、あなたの番です。

では、私は……、さあ、そろそろ止めましょうか。

ちょっとたいへんですけど、これらの7つの4桁の数の和を求めてくれますか。

1418 ⇒ 1418 ⇒ 1418 ⇒ 1418 ⇒ 1418 ⇒ 1418 ⇒ 1418  
3241 3241 3241 3241 3241 3241  
6758 6758 6758 6758 6758  
5274 5274 5274 5274  
4725 4725 4725  
2183 2183  
7816



1418
3241
6758
5274
4725
2183
+ 7816
31415

計算結果は31415ですね。

では、私があらかじめ紙に書いておいた数字をみてみましょう。

紙を裏返しにします……、同じ31415ですね。

不思議ですね。私と相手が交互でたために書いた数字の和が紙に書いてあった数字と一致するなんて。

この数字もカプレカ数のように収束する性質をもっているのでしょうか。

いえ、違います。31415に秘密があるわけではないのです。

実は、31415は円周率の最初の並びを書いたに過ぎません。このトリックは私が交互に提示した数にあるのです。

相手が書いた数とその後私が書いた数それぞれの和を計算してみてください。

$$3241 + 6758 = 9999 \quad 5274 + 4725 = 9999 \quad 2183 + 7816 = 9999$$

お分かりでしょうか。私が書いた数は、相手が書いた数の各位の数を9から引いて作られる数字だったのです。

このことを利用して、7つの数の和をもう一度計算してみましょう。

$$\begin{aligned} 1418 + 9999 + 9999 + 9999 &= 1418 + 3 \times (10000 - 1) \\ &= 31418 - 3 \\ &= 31415 \end{aligned}$$

この操作で、1の位の8が8-3となり、この3が5桁目に移動しています。

この操作は、1の位から必要な数だけ最高位に移すものだったのです。

したがって、当てる数字が31415であるとする、最高位の3の数を除き、

$$31415 \Rightarrow 1415 + 3 = 1418$$

このように1の位に加えます。この数から、3の値を再び5桁目に移すためには、交互1回の操作で1だけ移動しますから、3回必要になるわけです。

この原理を理解すれば、もう少し複雑な設定もできますね。

例えば、5桁目の3と4桁目の1を1桁目に移して、

$$31415 \Rightarrow 415 + 3 + 1 = 419$$

としましょう。こうすると、もう31415と419の数の関連性は分からなくなります。

まず、1を4桁目に移しましょう。

そのためには3桁の数を相手に考えさせ、こちらは各位の和が9になるように、続けて数を書きます。

$$419 \Rightarrow 419 + (385 + 614) = 1418$$

あとは、3を5桁目に移せばいいわけです。

マジシャンが演出する数当てマジックは、数学的なロジックに裏打ちされているものなのです。

(とういうことで、ここで紹介した31415はダミー数であり、本当に紹介したかった数は $10^4 - 1$ ということになります)

教室の中に2人の生徒がいて何かしているようです。巡回中の2人の男の先生のうち1人が中に入り、数分後にできました。待っていた先生は中に入った先生から何も聞かず「男と女がいただろ」。さて、この推測は正しいでしょうか。

男の先生が部屋の中に入る前は性別の組合せは、「男男、男女、女男、女女」の4通りが考えられ、どの組合せも等しい確率ですから、その確率は $\frac{1}{4}$ です。そこに男の先生が入っても、「男男男、男男女、女男男、女女男」になります

が、やはりどの組合せも確率は $\frac{1}{4}$ で変わりません。この状態で部屋の中の男を1人選ぶ確率を求めてみましょう。まず、

男男男の組合せである場合は確率1です。男男女の場合は $\frac{2}{3}$ ですね。以下同様に考えると、男を1人選ぶ確率は、

$$\frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \times \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

一方、教室の中に3人がいて、2人が男で1人が女であるとき、男1人を選ぶ確率は $\frac{2}{3}$ ですから、これは先程求めた確

率と一致していて、これ以外の組合せで確率が $\frac{2}{3}$ になることはありません。だから教室の中には男2人、女1人がいる

ということになります。ということは、男の先生が教室からでた後、教室の中の2人は、男が1人減り、男1人と女1人になるはずですが、これが、もともと教室にいた性別の人数になります。すなわち、部屋の外で待っていた先生の推測は正しいことになってしまうのです。でも何か変ですよ。こんなことを実際、相手の教師にいったら「お前、なにいってんだ」と怪訝な顔をされるでしょう。

この問題は、数学者チャールズ・ラトウィッジ・ドジソン(Charles Lutwidge Dodgson)の著書「Pillow Problems」、日本語では「枕頭問題集」と訳された問題集に載っているものです。状況設定はもちろんアレンジしていますが、問題集には72の問題が掲載されていて、序文には「ほとんどすべての問題は、夜、ベッドのなかで目を覚ましたまま、頭の中で解いたものである」と記されています。そこでこのような書名になったわけです。この奇妙な問題は最後の72問めにあり、その解答として上述の証明がなされています。この証明をみてアメリカのある数学者は「著者は数学者としては三流で、確率論の初歩さえ理解していない」と批評したといひます。でもこの著者のことをよく知っているのなら、決してこんな誤解はしないはずなのです。ドジソンにはペンネームがあり、それは氏名をラテン語で読み、また英語に戻し綴りを入れ替えたもので、その名前はレイス・キャロル(Lewis Carroll)といひます。そう、あの「不思議の国のアリス」の作者です。不思議の国のアリスにはいたるところに「奇妙な論理」が展開されていることはご存知でしょう。だからこの問題集も同様であり、その解答さえもキャロル流のパロディとみるべきなのです。「どこに論証の誤りがあるのか分かりますか」とキャロルは読者に問いかけているのです。

論理がおかしいことは、教室中の人数を1人にしてみると分かります。性別の組合せは「男、女」の2通りでその確率はどちらも $\frac{1}{2}$ 。そこに男の先生が加わると「男男、男女」。だから男を1人選ぶ確率は、 $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ 。

男1人女1人の計2人から男1人を選ぶ確率は $\frac{1}{2}$ ですから、確率が異なってしまう、もう綻びがみえてきましたね。

では論証のどこにキャロルの仕掛けた罠はあるのかということになります。それぞれの論証場で確率を計算するところでは広義に解釈すれば間違っているとはいへません。部分は正しいのです。問題は、全体を通して見たときに、同じ「母集団」の確率であるかということです。前半は「男男」「男女」「女男」「女女」に1人男を加えたグループのそれぞれに対して男1人を選ぶ確率を求め、 $\frac{1}{4}$ をかけているわけですから、結局それぞれのグループで男1人を選んだ場

合の平均を求めていることとなります。すなわち $\frac{2}{3}$ は平均化した確率になっているわけです。これに対して後半で得ら

れる $\frac{2}{3}$ は、単純に男2人と女1人の計3人から男1人を選ぶ確率ですから確率の意味(母集団)が違っていることになる

のです。どちらも同じ $\frac{2}{3}$ の確率になっていることで比較ができるような錯覚をしてしまうことがトラップなのです。

「枕頭問題集」にはこれ以外にも奇妙な問題がたくさん載っており、解答にも誤りがあります。その誤りはキャロルの19世紀の時代では解決できなかったことなのか、それともやはりキャロル一流のパロディなのかは分かりません。不思議の国のアリスに登場するチェシャ猫がアリスの前からニヤニヤ顔を残したまま消えて行くように霧の中に包まれたままなのです。

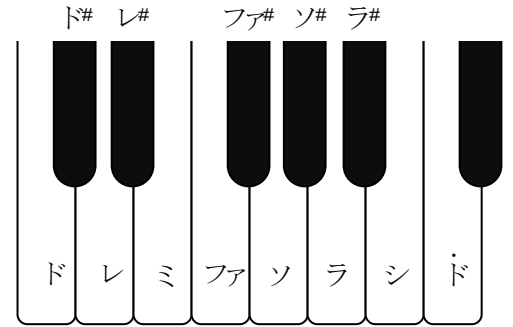
# 2 3

(比)

……人間の音感に翻弄された数

今回の数は、右の鍵盤をみれば分かりますね。音楽に係わる数 $\frac{2}{3}$ です。

毎日のように空間を振動音で埋め尽くし氾濫するミュージック。その元になる音階を考案したのはピタゴラスと言われています。彼は一弦琴(モノコード)を爪弾いたところ、弦の長さ(基音)の $\frac{1}{2}$ のところで押さえると同じような音(1オクターブ高い音)が出、弦の $\frac{2}{3}$ で押さえ、長い方の弦では基音と一緒に弾くと美しく響くことを発見しました。この基音をド、 $\frac{2}{3}$ で響く音をソとし、ソをドに対して完全五度といいます。



このとき、 $\frac{2}{3}$ で押さえた短い方の弦の音は、 $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ ですから、1オクターブ高い方のソになります。ピタゴラスはこの $\frac{2}{3}$ 倍の長さを繰り返すことで残りの音も創りだしたのです。例えば、ソの音を $\frac{2}{3}$ 倍すると1オクターブ上のレになるので、1オクターブ

下げて調整するために2倍します。これからレの音は $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 2 = \frac{8}{9}$ の位置で押さえればいわけです。同様に、 $\frac{2}{3}$ 倍を続けていくことで、次々に音を表す弦の長さが決まるのです(白い鍵盤を5つずつ数え、1オクターブを超えた場合は下げる)。

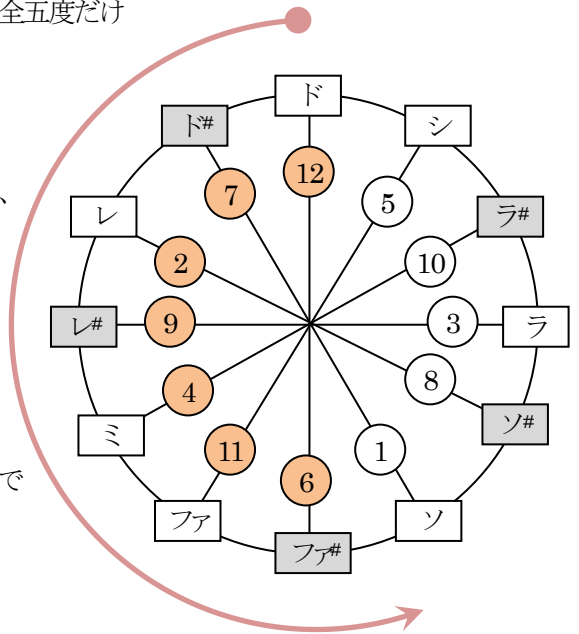
ド ⇒ ソ ⇒ レ(下げて) ⇒ ラ ⇒ ミ(下げて) ⇒ シ ⇒ ファ(下げて)

これらの隣り合う2音は純正五度だから美しく響くはずですね。ところがシとファを同時に弾くと耳障りな音になります。何故でしょう。その秘密は黒鍵にあります。完全五度を白鍵だけでなく黒鍵も数えてみると、白鍵5、黒鍵3になり、シとファは白鍵5に対して黒鍵2でひとつ足りないのです。そこでファは1オクターブ高いドを完全五度だけ

下げて作ることにします。すなわち $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ で弦を押さえればいわけです。

このとき、ファの音をドの音に対して完全四度といいます(白鍵4、黒鍵2)。ところで先ほどのシとファの関係は黒鍵を1つ加えてファ#にすると完全五度になりますね。であれば、1オクターブを白鍵7、黒鍵5の12音(半音)に分割し、8音ずつ増やしていけば完全五度の音の推移が分かります。

右図は円周上に半音階順に12音を並べたものです。ドから反時計回りに頂点を8つずつ移動させ、ドまたはドを超えた場合は1オクターブ下げます。その順番が図の数字で示されたもので、色が付いている番号は1オクターブ下げた音になり、円の左半分の7箇所が塗られます。これから各音の押さえる弦の位置は $\frac{2}{3}$ 倍し、1オクターブ高い場合は2倍して下げればいことになります。こうしてピタゴラス音律が完成します。ところがここでおかしいことが起きます。12回の移動でまたドに戻るわけですが、これは



次の等式が成立することを意味します。  $\left(\frac{2}{3}\right)^{12} \times 2^7 = 1$

変形すると、 $2^{19} = 3^{12}$ 、左辺は偶数、右辺は奇数より矛盾しています。  $\left(\frac{2}{3}\right)^{12} \times 2^7 = \frac{524288}{531441} < 1$ から、元のドよりちょっと高い音

になり、同じドに戻ることはないのです。この微妙な音のズレ(差)をピタゴラスコンマといいます。そのため、この微妙なズレの修正、さらには和音の美しい響きを追求して、新たな音律である純正律が考案されます。しかし、純正律は転調ができない弱点があったため、今度はそれを補うためにロマン派の時代、平均律が考案されるのです。その結果、人間は純正律の美しい響きを犠牲にすることになり、人間の音感とは、不協和音もハーモニーとして受け入れてしまうのです。

赤ちゃんが生まれたときの泣き声の音の高さはラの音(440Hz)であり、人類すべてに共通しています。音の一滴である $\frac{2}{3}$ を贈ったミューズ神の天の配剤の1つなのでしょう。ところが最近その泣き声の高さに微妙な変化が起きていることが指摘されています。音楽産業が音を配信し、売り物にするようになってから、 $\frac{2}{3}$ という割り切れない分数だからこそ表現できた美しい音の響きで編まれた音楽はいつの間にか砂上の楼閣になっていたのです。

4は陽の目をみない数です。1は根源を表す神性の象徴、2は偶数で唯一の素数である極性を示し、3はあらゆる現象の背後に常に伏在し9を従えています。では4はどういった性質を持つのでしょうか。一番小さな合成数であり、「物質界を秩序づける数」と言われ、座標により平面を4分割することで世界を統合しているといいながら、3点で決定する平面に、4つめを加えることでバランスを失い平面を壊してしまうこともあります。他の数の活躍に比べると何となく疎まれている印象はあります。

でも4にはとても不思議な性質が潜んでいます。

4を平方した数16の各位の数の平方の和を求めてみましょう。

$$1^2 + 6^2 = 37$$

次に37についても同様に各位の数の平方の和を求め、この操作を値が4以下になるまで続けていきます。

$$3^2 + 7^2 = 58 \Rightarrow 5^2 + 8^2 = 89 \Rightarrow 8^2 + 9^2 = 145 \Rightarrow 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$$

$$\Rightarrow 4^2 + 2^2 = 20 \Rightarrow 2^2 + 0^2 = 4$$

8回の操作で4に戻りました。では、他の数はこの操作でどんな数に収束するでしょうか。

5は平方して25。以降は次の通り。

$$2^2 + 5^2 = 29 \Rightarrow 2^2 + 9^2 = 85 \Rightarrow 8^2 + 5^2 = 89 \Rightarrow 8^2 + 9^2 = 145$$

$$\Rightarrow 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42 \Rightarrow 4^2 + 2^2 = 20 \Rightarrow 2^2 + 0^2 = 4$$

これも8回目に4に収束します。これを、100以下の自然数について調べてみた結果が右表になります。大半が4に収束し、次が1,2,3と続きます。ただし、2の平方は4ですから実際には2の欄にある2,11,78,87は4に収束します。また、3についてもさらに平方して9とみると、右表から9は4に収束することが分かります。

結局100以下の数で1に収束するものは20個。そして4に収束するものは80個であり、この2数以外の収束値はないのです。

では、1000以下の自然数はどうなっているか調べてみると、857個が4に収束します。100以下の80%から85.7%に増えました。10,000以下で4は8558個。ちょっと1が巻き返しました。100,000以下では4は85,623個。1,000,000以下では、856,929個。どうやら85%の値で落ち着いてきそうです。また、収束するまでの最高回数をみると、

100以下 14回 1,000以下 15回 10,000以下 15回 100,000以下 16回

そして、1,000,000以下でも僅か16回で収束してしまいます。

なお、3は平方することで収束値を4とみることができましたが、3のままでみると、1000以下で収束するのは、3と111しかありません。111は、

$$1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$$

で1回で収束してしまうのですが、これ意外にないのも驚きです。ところが10,000以下になると一気に69個に増えてしまいます(これでも少ない個数ではありますが)。

さて、それでは計算のルールを「平方の和」から「立法の和」に変えるとどうなるでしょう。

4の立法数64に対して、

$$6^3 + 4^3 = 280 \Rightarrow 2^3 + 8^3 + 0^3 = 520 \Rightarrow 5^3 + 2^3 + 0^3 = 133$$

$$\Rightarrow 1^3 + 3^3 + 3^3 = 55 \Rightarrow 5^3 + 5^3 = 250 \Rightarrow 2^3 + 5^3 + 0^3 = 133$$

分数を小数展開したときに循環節3で繰り返されるように、無限ループに入ります。

また、2,3,5はそれぞれ、371,153,371になるとそれ以降は無理数のように繰り返されます。

すなわち、これから、

$$3^3 + 7^3 + 1^3 = 371$$

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$$

という面白い結果が得られます。

ついでに1~10について4乗も調べてみましょう。

1と10はもちろん1に収束しますが、ところが、2から9までは、

……,13139,6725,4338,4514,1138,4179,9219,……

1以外のすべての一桁の数でこの循環節7のループになります。いったい何が起きているのでしょうか。

「平方の和」だけが、1と4に収束することは驚きです。1,3,9といった多くの数が、合成数の中に内蔵されているのに対して、4はもっと先にある到達の数ではないでしょうか。日本では4は「死」に繋がりが敬遠されますが、その「死」は終焉であるけど、来世を意味するものと考えれば、4は崇高な数といえるのです。

No.	1	2	3	4	
1	1	2	3	4	50
2	7	11	(111)	5	51
3	10	78		6	52
4	13	87		8	53
5	19			9	54
6	23			12	55
7	28			14	56
8	31			15	57
9	32			16	58
10	44			17	59
11	49			18	60
12	68			20	61
13	70			21	62
14	79			22	63
15	82			24	64
16	86			25	65
17	91			26	66
18	94			27	67
19	97			29	69
20	100			30	71
21				33	72
22				34	73
23				35	74
24				36	75
25				37	76
26				38	77
27				39	80
28				40	81
29				41	83
30				42	84
31				43	85
32				45	88
33				46	89
34				47	90
35				48	92
36					93
37					95
38					96
39					98
40					99



5人の気心が知れた仲間のクリスマスイブのパーティは、心のこもったプレゼント交換から始まる。「何をあげたら喜ぶだろう」と悩み選んだ一品。イブはみんながハッピーでありますように。持ち寄ったプレゼントをテーブルに集める。おや、包装紙はイブということもあり、サンタとトナカイがプリントされた同じような物ばかり。見分けがつかない。うーん、私、コレにする。ワクワクしながら丁寧に包装紙を剥がしプレゼントをみる。「えっ、コレって」……。周りでは、「わあ、私これ欲しかったんだ」、「誰が選んだの、センスいいね」、嬉しそうな声が飛び交う。笑顔のひとつが「ねえ、あなたは何をもらったの」と無遠慮に話しかけてくる。「うん、すごくいいものだよ」……。和やかに話が弾むイブの夜。私だけ窓の外の暗闇のように心が沈んでいく。

5人がプレゼント交換をするとき、そのもらい方は、 $5! = 120$ 通りあります。この中で、誰も自分の持ってきたプレゼントを選ばない場合の数は44通りになります。44は日本では4(死)を連想するから不吉な数なのかもしれませんが、実は、みんなが自分以外の誰かのプレゼントを受け取ることでできるハッピーな数なのです。

自分以外のプレゼントを貰うことは、1から $n$ までの数字を左から順に並べたとき、左から $k$ 番目に置かれている数字が $k$ でないように並べることに対応できます。この順列を完全順列といい、完全順列の総数をフランスの数学者モンモール(montmort)の名にちなんで、モンモール数とも呼びます。

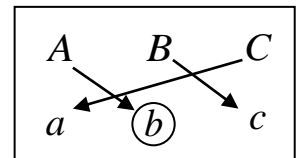
さて、 $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ のモンモール数が何なのかを調べてみましょう。

数でみると味気ないので、プレゼント交換で話を進めましょう。 $A, B, C, D, \dots$ が選んだプレゼントをそれぞれ、 $a, b, c, d, \dots$ として、 $n$ 人のモンモール数を $a_n$ とします。

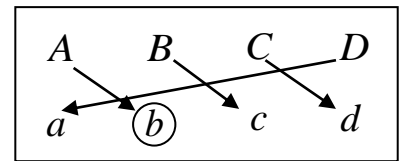
$n = 1$ のときは、自分一人だけの寂しいイブ。みんな用事ができて誰も集まらない。「こんなプレゼント」と放り投げて $a_1 = 0$ 。

$n = 2$ のときは、2人だけのプレゼント交換。最高にハッピーな夜で、 $a_2 = 1$ 。

$n = 3$ のときは、自分を $A$ とすると、 $A$ が受け取るプレゼントは $b$ または $c$ 。 $b$ を選んだとしたら、残りの2人は、 $B - c$ 、 $C - a$ とただひとつ通りに決まるから、 $a_3 = {}_2C_1 = 2$ 。



$n = 4$ になると、人間関係もだんだん複雑になってくるけどまだ頑張れる。自分 $A$ は、 $b$ のプレゼントを受け取るとする。そのとき $B$ は、 $B$ が選んだプレゼントは $A$ が貰ったから、残りの3人の誰のプレゼントを貰ってもいいことになる。仮に $C$ のプレゼントをもらったら、残りの2人は、 $C - d$ 、 $D - a$ とただひとつ通りに決まるから、 $a_4 = {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 9$ 。これも嫌な数字。



$n = 5$ になると、もうお手上げ。自分 $A$ が $b$ を貰って $B$ は $c$ で $C$ は……。こんな面倒なことを考えるくらいならみんな不幸になってしまえ。人の不幸は蜜の味がするっていうし。

そこで、誰か一人だけが不幸になる場合は、残り4人は他の人のプレゼントを受け取るから、 $a_4 = 9$ 。2人だけが不幸の場合は、残り3人に対して $a_3 = 2$ 。3人だけが、不幸になる場合、残り一人は他人のプレゼントを受け取らなければならないけどそんなことありえないから0通り。全員が不幸になる場合はみんな自分のプレゼントを持ち帰ってみんなアンハッピー、「ざまあみろ」で1通り。だから結局

$$5! - ({}_5C_1 a_4 + {}_5C_2 a_3 + {}_5C_3 a_2 + {}_5C_4 a_1 + 1) = 44$$

こうやってアンラッキーになる場合を考えていくとラッキーかもしれない。だから、

$n = 6$ の場合は、

$$6! - ({}_6C_1 a_5 + {}_6C_2 a_4 + {}_6C_3 a_3 + {}_6C_4 a_2 + {}_6C_5 a_1 + 1) = 265$$

表にしてみよう。

人数 $n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
順列の総数	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800
$a_n$ の値	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961

$n$ が大きくなるとハッピーの確率が低くなっていくような。

あれ、表をみると、 $a_2 + a_3 = 3$  3倍して $a_4 = 9$   $a_3 + a_4 = 11$  4倍して  $a_5 = 44$

ためしに、 $a_7 + a_8 = 16687$  8倍して  $a_9 = 8 \times 16687 = a_6 = 133496$  どうやら

$$a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1})$$

が成り立っているようだ。

さて、イブの夜に話しを戻すとしよう。5人みんながハッピーになる確率は、 $\frac{a_5}{5!} = \frac{11}{30} = 0.37$

そんなに高い割合ではないから、ちょっと安心。

では、私だけがアンラッキーである確率はというと、 $\frac{a_4}{5!} = \frac{3}{40} = 0.075$

8%にも満たない。やっぱり私って不幸なんだ……。

※ちなみに、 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ で作られる数列をフィボナッチ数列といいます。モンモール数の並びとなんか似てますね。



分子と分母の数の一の位、十の位を入れ替えた分数ともとの分数の値を比較してみましょう。

$$\frac{63}{42} = \frac{21 \times 3}{21 \times 2} = \frac{3}{2} \quad \frac{36}{24} = \frac{12 \times 3}{12 \times 2} = \frac{3}{2}$$

これから、 $\frac{63}{42} = \frac{36}{24}$

分子・分母の各位の桁数を交換しても同じ分数の値になってしまいます。  
 どのようにときにこんなことが起こるのか調べてみましょう。

分数  $\frac{c \circ d}{a \circ b}$  に対して、分母・分子をそれぞれ、 $a \circ b = 10a + b$ 、 $c \circ d = 10c + d$  ( $1 \leq a, b, c, d \leq 9$ ) と定義します

$$\frac{c \circ d}{a \circ b} = \frac{d \circ c}{b \circ a} \text{ より、} \frac{10c + d}{10a + b} = \frac{10d + c}{10b + a}$$

$$\therefore (10c + d)(10b + a) = (10a + b)(10d + c)$$

これを展開して整理をすると、 $ad = bc$

ずいぶんすっきりした関係式が得られました。これから、

$$a : b = c : d$$

すなわち、分子と分母の一の位の数と十の位の数の比が等しい分数は、一の位と十の位を入れ替えても分数の値は変わらないことが分かります。

$$\frac{69}{23} = \frac{96}{32} \quad \frac{43}{86} = \frac{34}{68} \quad \frac{31}{93} = \frac{13}{39}$$

他の仲間を見つけることができますね。では3桁の数ではどうでしょう。

$$(百位の数) \Rightarrow (十位の数) \Rightarrow (一位の数) \Rightarrow (百位の数)$$

このように入れ替えるとします。すなわち、

$$\frac{b_1 \circ b_2 \circ b_3}{a_1 \circ a_2 \circ a_3} = \frac{b_3 \circ b_1 \circ b_2}{a_3 \circ a_1 \circ a_2} \quad (1 \leq a_i, b_i \leq 9 \quad i = 1, 2, 3)$$

となればいいわけです。これから、

$$\frac{10^2 b_1 + 10 b_2 + b_3}{10^2 a_1 + 10 a_2 + a_3} = \frac{10^2 b_3 + 10 b_1 + b_2}{10^2 a_3 + 10 a_1 + a_2}$$

これを整理すると、

$$10 a_3 a_1 + a_3 b_2 = 10 a_1 b_3 + a_2 b_3 \quad \text{より、} \quad (10 b_1 + b_2) a_3 = (10 a_1 + a_2) b_3$$

$$\text{すなわち} \quad (10 a_1 + a_2) : a_3 = (10 b_1 + b_2) : b_3$$

これは、分子、分母において、百位と十位の数から作られる2桁の数と一位の数の比が等しいことを表します。

例えば、 $42 : 6 = 63 : 9$  ( $= 7 : 1$ ) ですから、 $\frac{426}{639} = \frac{642}{963}$

ところがここで、 $96 : 3 = 64 : 2$  ( $= 32 : 1$ ) から、さらに、 $\frac{426}{639} = \frac{642}{963} = \frac{264}{396}$

結局、(百位の数)  $\Leftrightarrow$  (一位の数) としても変わらないことになります。

式をよくみると、各位の桁数の比が等しく、比により各位の桁数が繰り上がらない場合は、どのように入れ替えても分数の値は等しくなるのです。

例えば、 $1 : 2 : 3 : 4 = 2 : 4 : 6 : 8$  であることより、

$$\frac{2468}{1234} = \frac{2486}{1243} = \frac{2648}{1324} = \frac{2684}{1342} = \frac{2846}{1423} = \frac{2864}{1432} = \dots = \frac{8642}{4321}$$

分かっ飛ばせばなんのことはないですね。

ということは、5桁以上になると各位の数がみな異なる場合は必ず位は繰り上がり、もう成立しないことになります。

$$1 : 2 : 3 : 4 : 5 = 2 : 4 : 6 : 8 : 10$$

このとき (分母)=12345 とすると、(分子)=2468+10=24690 になります。これから、

$$\frac{24690}{12345} = \frac{69024}{34512} \quad \text{となりますが、} \quad \frac{24690}{12345} = \frac{27048}{13524} = \frac{108642}{54321}$$

繰り上がった数字が桁数を入れ替えるときに茶々を入れ、潜り込んでくるのです。

# 1 49

………循環節をべき乗で彩る数

$\frac{1}{7}$ の平方数である $\frac{1}{49}$ にはどんな性質が潜んでいるのでしょうか。 $\frac{1}{7}$ は循環節のロンドを演出する数としてあまりに有名ですがちょっとだけ披露すると

$$\frac{1}{7} = 0.142857 \quad \frac{2}{7} = 0.285714 \quad \frac{3}{7} = 0.428571 \quad \frac{4}{7} = 0.571428 \quad \frac{5}{7} = 0.714285 \quad \frac{6}{7} = 0.857142$$

$\frac{1}{7}$ を2~6倍すると、循環する数の順番が次々に入れ替わります。これ以外にも $\frac{1}{7}$ は数々のパフォーマンスを披露してくれるのですが、ではこの数を平方するどうなるでしょう。 $(0.142857142857\dots)^2$ 、ちょっと計算したくない値ですね。その結果は、

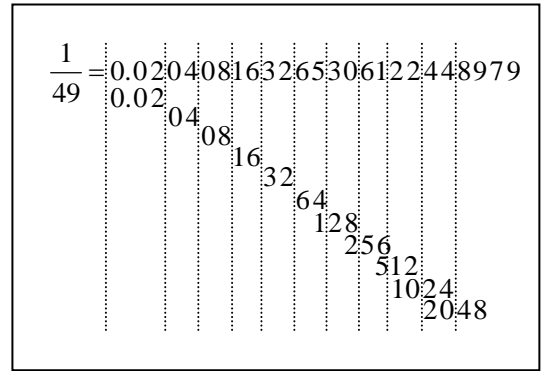
$$(0.142857142857\dots)^2 = 0.0204081632\dots$$

何か気がつくでしょうか。小数以下の数字の並びが、02,04,08,16,32,...と変化していきます。2桁毎に2のべき乗になっているようですが、本当にそうでしょうか。次の桁に現れる数は何だと思えますか。

2の6乗で64ですか。残念、違います。65になります。2のべき乗の予想が間違っていたのかというそうではありません。64が続くことには間違いはないのですが、その後の数を考えてみてください。次は2の7乗ですから128、すなわち3桁になってしまうため1の値が1桁前の数と重複してしまい、64+1=65となります。それ以降も重複が次々とおこり規則性が崩れているように見えますが、しっかり保存されているのです。このように表現される理由を考えてみましょう。

小数展開の値を $m$ とすると、

$$\begin{aligned} m &= \frac{2}{100} + \frac{4}{10000} + \frac{8}{1000000} + \frac{16}{100000000} + \dots \\ &= \frac{2}{100} + \left(\frac{2}{100}\right)^2 + \left(\frac{2}{100}\right)^3 + \left(\frac{2}{100}\right)^4 + \dots \\ &= \frac{2}{100} = \frac{1}{50} \times \frac{50}{49} = \frac{1}{49} \\ &= \frac{2}{1 - \frac{2}{100}} \end{aligned}$$



予想が正しいことが示されました。このことから、一般に $\frac{p}{100}$ のべき乗の和は小数にすると同様のことが起こります。

このときの分数は、

$$n = \frac{\frac{p}{100}}{1 - \frac{p}{100}} = \frac{p}{100 - p}$$

であり、例えば  $p=3$  の場合は、 $\frac{3}{97} = 0309278350515\dots$ 。

重なる部分が多すぎて規則性を見ることは難しいですね。

そこで  $\frac{p}{10000}$  とすると、 $n = \frac{p}{10000 - p}$  となることより、

$$n = 2 \text{ のときは、} \frac{1}{4999} = 0.0002\ 0004\ 0008\ 0016\ 0032\ 0064\ 0128\ 0256\ 0512\ 1024\ 2048\ 4096\ 81\dots\dots$$

$$n = 3 \text{ のときは、} \frac{3}{9997} = 0.0003\ 0009\ 0027\ 0081\ 0243\ 0729\ 2187\ 6562\dots$$

よさそうですね。規則性が分かるようになりました。

ところで、先ほど  $\frac{1}{49}$  の規則性が途中から分からなくなった理由はもう一つあります。それは、分数を小数に変換すると循環小数になりますが、2のべき乗で桁数が増えていくとそのことに矛盾してしまうのです。 $\frac{1}{49}$ の循環節の長さはなんと42桁です。

一般に素数 $n$ に対して $\frac{1}{n^2}$ の循環節の長さは最大で $n^2 - n$ ですからもっとも長い循環節になっています。

だから $\frac{1}{49}$ は2桁毎にべき乗の値を配置しながらも少しずつその値を補正し循環節の長さに収まるように頑張っているのです。

(問) 適当な自然数を5つ選んで書き並べ、何個かを選んで和を求めると、その中には5の倍数が必ず存在します。何故でしょうか。

例えば、

314 1592 653 58 979 (円周率の並び)

を選んでみましょう。この中の幾つかの和で、5の倍数になるものが存在するということです。5の倍数は1の位の和が0または5になればいいから、そうなるような数の組合せは簡単に探せます。

左から3番目以降の和 653 58 979 左から2番目と3番目の和 1592 653

これらは5の倍数です。不思議だけど、当たり前のよう気もします。ですが条件を

適当な自然数を7個選んで書き並べ、何個かを選んで和を求めると、その中には7の倍数が必ず存在する。

7の倍数の判定が先ほどより優しくないことより、もう当たり前ではなく、不思議度は格段にアップしましたね。実は、 $n$ 個に対して、 $n$ の倍数の存在が証明できるのですが、それは5の倍数の証明と何も変わりません。

その証明のコアとなるのが「鳩の巣原理」(部屋割り論法)と言われるものです。

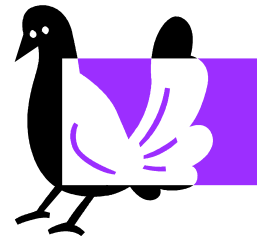
鳩の巣原理とは、鳩の数と鳩が入る巣箱の数の関係を表す性質です。

「 $n+1$ 羽の鳩が、 $n$ 個の巣箱に入るとき、どれかの巣箱には必ず2羽以上の鳩が入る」

当たり前ですね。でもこの当たり前のことから当たり前でないことが導かれるのです。

さて、(問)の証明の前に補題となる次の問題を鳩の巣原理で示してみましょう。

適当な自然数を6つ選ぶと、その中には2数の差が5の倍数になるものが存在する。



選んだ6つの自然数を5で割ると、その余りは、0,1,2,3,4の5つの数のいずれかになります。自然数は6つあるわけですから、鳩の巣原理より、余りが等しい自然数は2つ以上存在することが分かります。その余りを $r$ とすると、2つの自然数 $a, b$ は、

$$a = 5m + r, b = 5n + r \quad (0 \leq r \leq 4)$$

と表すことができます。これから、 $a - b = 5(m - n)$ 。よって2数の差は5の倍数になります。

この問題をみると当たり前の事実がちよっと揺らいできますね。では、これを用いて(問)の解答をしましょう。

選んだ5つの数をそれぞれ、 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ とし、この5つの数を用いて新たに次のような6つの数を作ります。

$$b_0 = 0, b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, b_3 = a_1 + a_2 + a_3, b_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, b_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

明らかに $b_i (0 \leq i \leq 5)$ は、右の数ほど大きくになっています。ここでこれら6つの数から2数 $b_i, b_j (i < j)$ を選び、 $b_j - b_i$ を計算すると鳩の巣原理よりその値は5の倍数であるものが存在します。ところが、 $b_j - b_i$ は $a_k (1 \leq k \leq 5)$ の幾つかの数の和の形になっています。すなわち、これから問いの証明ができたこととなります。(選んだ数は、元々の数列 $a_k$ の並びの一部であることも分かります)。そしてこの証明のプロセスをみると、

適当な自然数を $n$ 個選んで書き並べ、何個かを選んで和を求めると、その中には $n$ の倍数が必ず存在する。

同様に一般化された性質が導かれることが分かります。ただし、 $n=5$ の場合と異なり具体例での検証は難しくなっています。

例えば $n=7$ のときは、(また円周率の並びを抜き出すと)

$$31, 41, 59, 26, 53, 58, 97 \Rightarrow 26+31+41=98 \quad 31+41+58+59=189$$

存在することは分かっていますが実際にどのような組合せか調べることは大変になっています。

だから今回の話題の数5は、鳩の巣原理の具体例として分かり易い数であり、そこから具体例は分からなくとも一般化できるモデルとなる数なのです。さて、鳩の巣原理で得られる数の性質をもう一つ紹介しましょう。

2の倍数でも5の倍数でもない数は、何倍かすると必ず数111……11111(各桁の数がすべて1)になる。

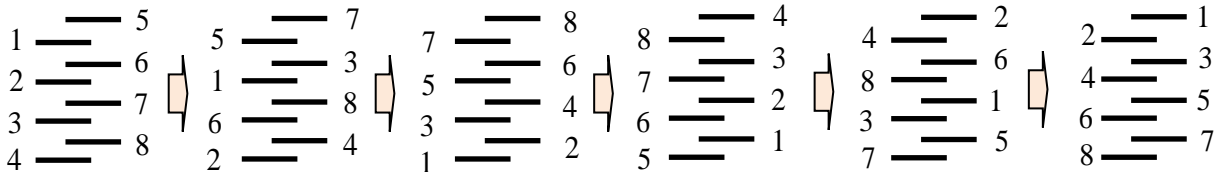
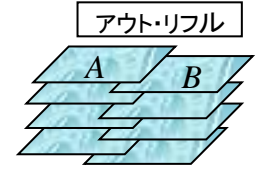
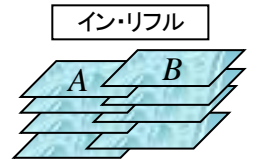
2でも5でもない数は簡単に見つけれられますがその数が111……1111で割り切れることを示すことは大変です。その保証は鳩の巣原理で示すことができます。

2の倍数でも5の倍数でもない数を $n$ とし、 $n+1$ 個の数を $a_m = \sum_{k=0}^m 10^k (0 \leq m \leq n)$ とします。すなわち、 $a_0 = 1, a_1 = 11,$

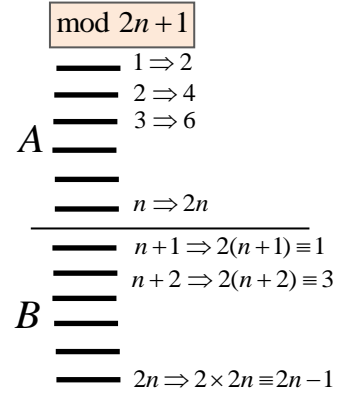
$a_2 = 111, \dots$ ということです。これらの $(n+1)$ 個の数を $n$ で割ると鳩の巣原理より余りが等しい数が2個以上あります。その2個の数の差の絶対値は、111……1100……0000の形になり、この数は $n$ で割り切れます。ところが $n$ は10の倍数ではないから、 $n$ は111……11の倍数になり、その存在が証明されました。

具体的なことは分からないけどその存在は確認することができる。このことは、人生において「今取り組んでいるいろいろな経験がどのような結果を生むかは分からないけど、その中には最終的には自分にとって最善のものが必ずある」、そんな教訓を数達はいっているようにも思えるのですが。

52 = 13 × 4。13 枚を 4 つのグループに分けるといったらトランプのカードが思い浮かびますね。トランプゲームはカードをよく混ぜあわせることから始まりますが、その方法としてよく知られているものは 3 つあります。シャッフル(Shuffle)はもっとも代表的なものでご存知でしょう(北海道ではてんを切るといいます)。カット(Cut)は、カードを二山に分けて上の山と下の山を入れ替えるものです。そして一番華やかな方法がリフル・シャッフル(Riffle Shuffle)です。2 つの山 A、B に分けたカードを交互に上のものから順番にパラパラと食い込ませていくもので巧みな手さばきでマジシャンがやる方法です。そのリフル・シャッフルにはさらに 2 種類の方法があります。山 A のカードを偶数番目、山 B のカードを奇数番目に挿し込む方法をイン・リフル、A を奇数番目、B を偶数番目に挿し込む方法をアウト・リフルといいます。アウト・リフルはシャッフルする前の一番上および一番下のカードは移動することはないので、完全に混ぜあわせるということでは不適當です。イン・リフルでは、1 番目、2 番目のカードは 2 番目、4 番目と移っていくのでバラバラになりそうですが、でも本当にそうでしょうか。イン・シャッフルでカードがどのように移動するのか調べてみましょう。1~8 の数字の 8 枚のカードを選び、これを 1~4 の A の山、5~8 の B の山に分けます。B、A の山から順番に交互に取り差し込んでいくと下図のように 6 回のシャッフルで元の並びに戻ってしまいます。その理由を考えてみましょう。



まず A の山の 1,2,3,4 はシャッフル後、それぞれ上から 2,4,6,8 番目に移動するので「 $k \Rightarrow 2k$ 」のルールが成立します。次に B の山の 5,6,7,8 はそれぞれ上から 1,3,5,7 番目に移動します。ここで B の移動を A の移動ルールで統一できるようにするため、 $5 \Rightarrow 2 \times 5 = 9 + 1 \equiv 1 \pmod{9}$  とし、9 で割った余りで分類します。そうすると、すべてのカードは「 $k \Rightarrow 2k \pmod{9}$ 」でその移動を表現することができます。このシャッフルを  $m$  回繰り返すと、移動後の位置は「 $k \Rightarrow 2^m k \pmod{9}$ 」になります。これが最初の配列に戻るためには、「 $2^m k \equiv k \pmod{9}$ 」となればよいことから、「 $2^m \equiv 1 \pmod{9}$ 」を得ます。すなわち 8 枚のカードでは、 $2^6 = 64 = 9 \times 7 + 1 \equiv 1 \pmod{9}$  より 6 回のシャッフルで元に戻るわけです。また、 $2^3 = 8$  であることから 3 回のシャッフルではカードは元の配列と逆順に並ぶことも分かるでしょう(上図を参照)。

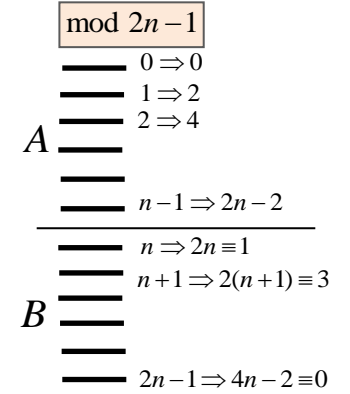


このことは、カードの枚数が  $2n$  枚でも同様に考えられます。A の山の  $1 \sim n$  は、 $k \Rightarrow 2k$  の規則で移動し、B の山は、 $n+1 \Rightarrow 2(n+1) \equiv 1$  とするために  $2n+1$  で割った余りを対応させます。これを  $m$  回シャッフルし、もとの状態に戻すためには、 $2^m \equiv 1 \pmod{2n+1}$  を満たせばよいわけです。例えば、枚数を 20 枚にすると、 $2^m \equiv 1 \pmod{21}$  ですが、 $2^6 = 64 = 21 \times 3 + 1$  より僅か 6 回のシャッフルだけでいいわけです。この移動ルールはカード当てマジックに応用できそうですね。上から 4 番目のカードを覚えさせ、4 回シャッフル後、 $4 \times 2^4 = 64 \equiv 1 \pmod{21}$  より、一番上のカードをめくると出現することを言い当てるのです。

それでは、今度は、52 枚のカードすべてをイン・リフルしてみましょう。 $2^m \equiv 1 \pmod{53}$  である  $m$  を求めることになります。

$$2^{53} = (1+1)^{53} = 2 + {}_{53}C_1 + {}_{53}C_2 + {}_{53}C_3 + \dots + {}_{53}C_{52} \quad {}_{53}C_r = \frac{53 \times 52 \times 51 \times \dots \times (54-r)}{r(r-1)(r-2) \dots 3 \times 2 \times 1} \quad (1 \leq r \leq 52)$$

素数 53 と  $r$  は公約数を持ちません。ここで  ${}_{53}C_r$  は自然数ですから、53 以外の  $52 \times 51 \times \dots \times (54-r)$  の部分は  $r!$  で割り切れることとなります。これから、 ${}_{53}C_r$  は 53 で割り切れ、 $2^{53} \equiv 2 \pmod{53}$  より  $2^{52} \equiv 1 \pmod{53}$ 。カードは 52 回のシャッフルで元に戻ります。でも一流のマジシャンでも正確に 52 回のシャッフルをこなすのは至難の業でしょう。そこでイン・リフルをアウト・リフルに替えてみましょう。この場合、カードには上から順に 0,1,2,...,51 の番号を振り、0~25 を山 A、26~51 を山 B とします。するとイン・シャッフルと同様に山 A の札は  $2k$  のルールで偶数番目に配置されます(0 番目は常に固定)。山 B は  $2k$  を 51 で割った余りを対応させ、奇数番目に配置します(51 番目は固定)。よって移動ルールは  $2^m \equiv 1 \pmod{51}$  になります。 $2^8 = 256 = 51 \times 5 + 1 \equiv 1 \pmod{51}$  ですから、8 回のシャッフルで元に戻ることになり、プロであるならば修練を積み重ねれば可能なことでしょう。もっともこの方法で実際にカード当てマジックをしているかどうかは疑問ですが、では、さらにジョーカーを含めた 53 枚でシャッフルするとどうなるでしょう。2 つの山は 27 枚と 26 枚になり、27 枚の山のカードから配置されることより、山 A が 27 枚の場合はアウト・リフルで一番上のカードは固定され、山 B が 27 枚の場合はイン・リフルで一番下のカードは固定されます。したがって  $k \Rightarrow 2k$  のルールは保たれることとなります。



このように、ゲームの前のシャッフルは、でたらめにカードは混ぜ込んでいるわけではなく、そのルールを知れば意図的に配置することも可能になるのです。その結果、ゲームの勝敗は、偶然ではなく必然になってしまいます。

# 555<sup>2</sup>

……速算を操る数

555×555の値を速算できますか？例えば、

$$555^2 = (5 \times 111)^2 = 25 \times 111^2 = 25 \times 12321$$

111<sup>2</sup>の性質が見えてきてこれはこれで面白いけど、速算とまではどうも。

そこで次の性質を利用してみましょう。

$$5^2=25, 15^2=225, 25^2=625, 35^2=1225, 45^2=2025, 55^2=3025, 65^2=4225, \dots$$

一の位が5である2桁の数の平方ですが、下2桁はどれも25になっています。では、百十の位の数の規則性は分かりますか。平方する数の十の位の数に、1を加えた数を掛けた数になっています。例えば35<sup>2</sup>の十の位は3ですから、

$$3 \times (3+1) = 12$$

これが平方数の百十の位の数ということです。この原理は簡単に示せます。平方する2桁の数を

$$10a+5 \quad (1 \leq a \leq 9)$$

とすると、

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25$$

この $a(a+1)$ が計算の秘密の部分になります。この性質はもう少し拡張することができます。

次の式の掛け算を考えてみましょう。

十の位の数が同じで一の位の数の和が10である2桁の2数の掛け算

式で表現すると、

$$(10a+b)(10a+c) \quad (\text{ただし、} b+c=10, 1 \leq b, c \leq 9)$$

となります。

$$(10a+b)(10a+c) = 100a^2 + 10(b+c)a + bc = 100a^2 + 100a + bc = 100a(a+1) + bc$$

ここにも $a(a+1)$ が登場しましたね。これから速算方法は、

**2数の一の位どうしを掛けて、十の位の数とその数に1を加えた数の積を百の位以降に配置**  
ということになります。このことを用いると、例えば、

$$34 \times 36 = 1224, 48 \times 42 = 2016, 73 \times 77 = 5621$$

といった速算が可能となるのです。

では、次のような場合はどうすればいいかわかりますか。

一の位の数が同じで十の位の数の和が10である2桁の2数の掛け算

同じように計算式を立ててみましょう。

$$(10a+c)(10b+c) \quad (\text{ただし、} a+b=10, 1 \leq a, b \leq 9)$$

$$(10a+c)(10b+c) = 100ab + 10c(a+b) + c^2 = 100ab + 100c + c^2 = 100(ab+c) + c^2$$

これから、

**一の位の数を平方し、十の位どうしの積に一の位の数を加えたものを百の位以降に配置**

ということになります。例えば、63×43は、6×4+3=27で、3<sup>2</sup>=9より2709となります。これも面白い性質ですね。

$$75 \times 35 = 2625, 26 \times 86 = 2236$$

簡単にできてしまいますね。

そろそろ問題の555<sup>2</sup>の計算をしてみましょうか。この数の一の位の数5を平方すると下2桁は25です。

あとは、55×56の計算。

$$55 \times 56 = 55 \times (55+1) = 55^2 + 55 = 3025 + 55 = 3080$$

以上より、

$$555^2 = 308025$$

となります。

# 50653

………立方根暗算の例示数

S氏の心は躍っている。先日電卓を叩いていたら面白い事実を発見したのだ。4の立方数64はもとの数と1の位が一致している。5も6も同じだ。不思議に思い、1桁の他の数も調べてみたら右表のようになった。一致したのは1、4、5、6、9。

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
立方数	1	8	27	64	125	216	343	512	729

うーん、残念。でもまあ、残りの2、3、7、8の立方数の1

の位はもとの数と足すと10になるぞ。ということはこの仕組みを覚えておけば、2桁の数の立方の値からもとの数の1の位は分かるってことじゃないか。ではもとの数の十の位の数は求められないだろうか。2桁の数を $10a+b$ とすると、立方数は、 $(10a+b)^3 = 1000a^3 + 100a^2b + 10ab^2 + b^3$

うーん、あっ、そうか。第2項以下の $100a^2b + 10ab^2 + b^3$ は大きくなったって、たかが知っている。だから $1000a^3$ から $a$ を決定できるぞ。千の位以上の数の部分が1桁の立方数に近いものを探せばいいんだ。例えば37の立方数は50653。その1の位をみると3だからもとの数の1の位は表から7。次の千以上の数の部分は50だから表から3の立方27と4の立方64の間にあるから3のはずだ。だからもとの数は37だ。うん、行けそうだ。

実はS氏、職場の懇親会で余興をやることになり、芸のないS氏はずーっと悩んでいた。この立方数の性質を使えば数当てマジックができることに気がついたのだ。いつもS氏を見下した視線で見ているO氏を指名して適当な数の3乗を計算させてその結果からもとの数を言い当てたらきっとO氏はびっくりするだろう。ん？、まあ、もしO氏が3乗の計算を間違えたらどうする。そうしたらこちらも正確な数当てができないばかりかO氏に恥をかかせることになってしまい、O氏の視線はもっと厳しいものになるじゃないか。そうだ、電卓。電卓をもって行って計算させれば問題ない。さらに数当てをした後にその数を実際に電卓で3乗して観客にみせればより効果的だ。………ということでS氏は上の表を必死で暗記し当日に備えた。

さて、私はみなさんに速算術をお見せします。思い浮かべた2桁の数を3乗してもらい、その結果を聞いて思い浮かべた数を当ててみましょう。それではお手伝いをOさん、お願いします。考えた数を電卓で3回かけてください。………ではその数を私に教えてください。435433ですか。ということは、1の位の数は7ですね。O氏の視線がちよっと和らいだ。会場は拍手喝采。では十の位ですが(435だから)………分かりました、7ですね。してやったりとO氏をみると、あれ、視線、いつもより冷たいぞ。「考えた数は67なんだけどな」。静まり返った会場にO氏の感情を押し殺した言葉が響き渡る。そんな馬鹿な。「済みません、ちょっと待ってください」。電卓に435433を入力し67で2回割ってみる。表示版に現れた数は97。「こいつ、67と97を押し間違えてやがる!!」

S氏のその後は予想できると思いますが、もし、435433からその立方根を求めることができていたら、O氏はともかく、職場の視線はもっと温かいものになっていたかもしれません。ちょっと調べてみましょう。

考えた数を $n = a + b$ とします。なお、 $b$ は非常に小さい値とします。 $n^3 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 。

ここで、 $3ab^2 + b^3$ も小さい値なので無視すると、 $n^3 = a^3 + 3a^2b$ 。これから、 $b = \frac{n^3 - a^3}{3a^2}$ 。

以上より、 $n = a + b = a + \frac{n^3 - a^3}{3a^2}$  が得られます。

例えば、 $n = 435433$ のときは、S氏が暗記した表から、十の位は7であることが分かります。電卓で70台の3乗で $n^3$ に近いものを探すと $75^3 = 421875$ 。 $76^3 = 438976$ 。この場合は、 $76^3$ の方を採用し、次の式を電卓で計算します。

$$n = a + b = 76 + \frac{435433 - 438976}{3 \times 76 \times 76} \approx 75.79553$$

$\sqrt[3]{435433} \approx 75.79498$  ですからほぼ一致していることが分かります。

でも電卓で計算するならもっと正確に求める方法があります。どんなに安価な電卓でも付いている√キーとメモリーキーの機能を用いるだけです。 $n$ を入力後、 $n$ をメモリーに記憶しましょう。次に√√と2回押し、メモリーの $n$ をかけた後、また√√を押します。その値にメモリーの $n$ をかけ√√を押します。この操作をひたすら繰り返すのです。計算値の動きをみてみましょう。

$$\sqrt{\sqrt{n}} \text{ を押し } \sqrt{\sqrt{n}} = n^{\frac{1}{4}} \Rightarrow n\sqrt{\sqrt{n}} \text{ を押し } \sqrt{\sqrt{n \cdot n^{\frac{1}{4}}}} = n^{\frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2} \Rightarrow n\sqrt{\sqrt{n}} \text{ を押し } \sqrt{\sqrt{n \cdot n^{\frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2}}} = n^{\frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3}$$

$$\text{以下同様の操作を続けると、指数部分の和は、} \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

これから $n$ の3乗根が電卓で求められるのです。

ところで、みなさんは肝心のその電卓って持っていますか？。携帯が電卓機能を搭載していたり、一家に一台パソコンがある時代ですからもう電卓は不要な道具なのかも知れません。ちなみにパソコンでOfficeのアプリケーションExcelを起動し、「 $=n^{(1/3)}$ 」と入力すると簡単に $n$ の3乗根は求められてしまいます。

S氏が3乗根の数当てをしても「だからどうしたの。何の役に立つの」。そんな声も聞こえてきそうですね。

# 2 — 5

$\frac{2}{5} = 0.4$  であり何の変哲もない数に思えますが、

$$\frac{2}{5} = \frac{26}{65} = \frac{266}{665} = \frac{2666}{6665} = \frac{26666}{66665} = \frac{266666 \cdots 6}{66666 \cdots 65}$$

と変形できるとなると、ただ事ではありません。  
分子・分母が、1333333333……333で約分できるわけですが、このような分数が他にもあったら凄いですね。  
調べてみましょうか。

分数を、

$$\frac{q}{p} = \frac{10^n q + (10^{n-1} x + 10^{n-2} x + \cdots + x)}{10^{n+1} x + 10^n x + \cdots + 10x + p} \quad p \neq q, 1 \leq p, q, x \leq 9$$

とします。

$$\text{(右辺の分子)} = 10^n q + \frac{x(10^n - 1)}{9}$$

$$\text{(右辺の分母)} = \frac{10x(10^n - 1)}{9} + p$$

ですから、式を変形すると、

$$q\{10x(10^n - 1) + 9p\} = p\{9 \times 10^n q + x(10^n - 1)\}$$

整理をして、

$$9(10^n - 1)pq = 10qx(10^n - 1) - px(10^n - 1)$$

$$\therefore 9pq = (10q - p)x$$

となります。ここで、 $p \neq q$  より、 $10q - p$  は9の倍数にならないから、 $x$  は3の倍数です。

$$x = 3k \quad (k = 1, 2, 3)$$

とおくと、

$$9pq + 3pk - 30qk = 0$$

$$(3p - 10k)(3q + k) = -10k^2$$

$3p < 10k$ 、 $3q + k \geq 3 + k$  であることに注意し、 $p, q$  の値を求めます。

$k = 1$  のとき、

これを満たす  $p, q$  は存在しません。

$k = 2$  のとき、

$$(3p - 20)(3q + 2) = -40$$

より、 $(p, q) = (4, 1), (5, 2)$

$k = 3$  のとき、

$$(p - 10)(q + 1) = -10$$

より、 $(p, q) = (5, 1), (8, 4)$

以上より、

$$\frac{1}{4} = \frac{16}{64} = \frac{166}{664} = \frac{1666 \cdots 6}{666 \cdots 64}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{19}{95} = \frac{199}{995} = \frac{1999 \cdots 9}{999 \cdots 95}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{49}{98} = \frac{499}{998} = \frac{4999 \cdots 9}{999 \cdots 98}$$

新しい仲間が見つかりました。



次の5番目の□の中にはどんな数字が入るでしょう

12, 6, 4, 3, □, 2, ……

4番目の3と6番目の2の間だから、分数でしょうか、それとも……。

逆数を通分すると、規則性が見えてきます。

$$\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \square, \frac{6}{12}$$

$\frac{5}{12}$  の逆数  $\frac{12}{5}$  が正解です。このように、一定数ずつ増えていく数列(等差数列)の逆数で作られる調和数列は2数の平均を求めるときにちよつとしたいたずらをします。

A市、B市間を往復で、往路は時速40km、復路は時速60kmで車を運転したとすると、往復の平均時速は?

相加平均を考えて、 $\frac{40+60}{2} = 50(\text{km/h})$  としてしまうと、罠にはまったことになります。A市とB市間の距離を  $h$ 、往路、復路で

要した時間をそれぞれ  $s, t$  時間として、計算すると、 $h = 40s = 60t$  ですから、 $s = \frac{h}{40}, t = \frac{h}{60}$  となります。これから、移動した距離  $2h$  に対して要した時間は  $s + t$  から、その平均時速は、 $\frac{2h}{s+t} = \frac{2h}{\frac{h}{40} + \frac{h}{60}} = 48(\text{km/h})$ 。相加平均よりちよつと小さめの値になっています。この値は、2数の「逆数の相加平均の逆数」であり、これを2数の調和平均といいます。

2数  $a, b$  の調和平均は、 $\frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b}$  で与えられます。これから、2と3の調和平均は  $\frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{3+2} = \frac{12}{5}$  になります。

右図で  $EF$  の長さは?

これも上の平均時速と同じように考えてみましょう。

$BF = x, FC = y, PF = c$  とします。

$\triangle ABC \sim \triangle PFC$  より、 $\frac{x+y}{a} = \frac{y}{c}$ 。  $\triangle DBC \sim \triangle PDF$  より、 $\frac{x+y}{b} = \frac{x}{c}$

2式を辺々加えて、 $(x+y)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{x+y}{c}$ 。これから、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

すなわち、 $c = \frac{ac}{a+b}$  ですから、 $EF = 2c = \frac{2ab}{a+b}$ 。  $EF$  の長さは調和平均になっています。

なお、この図で相加平均は、 $BC$  の中点を通り  $BC$  に垂直な線分になります。相乗平均は、台形  $ABCD$  を相似な2つの台形に分けるような、 $BC$  に垂直な線分になります。このそれぞれの平均により、線分  $BC$  は右図の比に分けられ、相加平均  $A$ 、相乗平均  $G$ 、調和平均  $H$  の長さは、それぞれ、

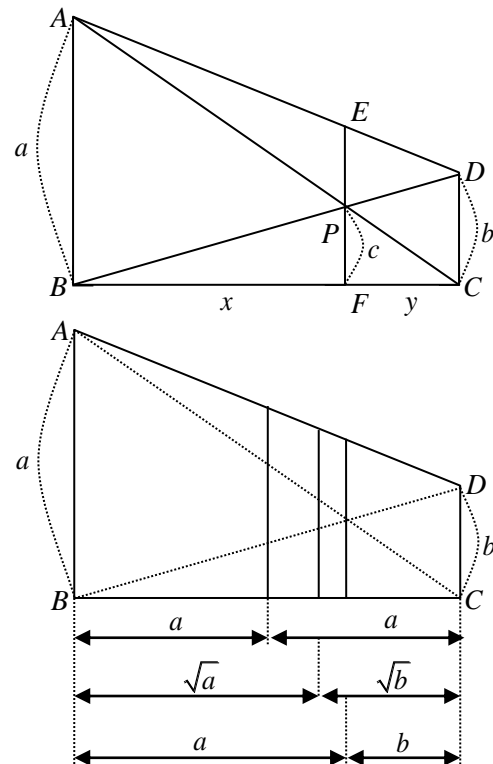
$$A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab}, H = \frac{2ab}{a+b}$$

で表されます。

そしてこれらの3つの平均には、関係式  $A \geq G \geq H$  (等号成立は  $a = b$  のとき) が成り立っています。さて、調和平均はその名が表すように、Harmony を奏でる平均でもあり、2音の平均から新たな音が響きます。

ピタゴラスは、ある長さの弦をドとして音を出すとき、 $\frac{2}{3}$  の長さの位置で押さ

えると、ソの音が、半分の長さの位置で押さえると、1オクターブ高いドの音ができることを知り、音階を作ったといわれます。面白いことに、その1オクターブ違いの2つのドの長さの相加平均がファ、調和平均がソの音になっているのです。



音階	ド	ファ	ソ	ド
弦の長さの比	1	3/4	2/3	1/2

# 6174

……………収束する果てにある数

全部の位が同じ数字ではないような4桁の数を考えてください。

この数を出発点にして、各位の数字を並べ替えてできる最大の数から、最小の数を引く計算を繰り返していきます。そうして得られる最後の数は何になるでしょう。驚くべき結果が待っています。

例えば、3141でやってみましょう。

$$\begin{array}{cccccc}
 3141 & \rightarrow & 3177 & \rightarrow & 6354 & \rightarrow & 3087 & \rightarrow & 8352 & \rightarrow & 6174 & \rightarrow & 6174 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 4311 & & 7731 & & 6543 & & 8730 & & 8532 & & 7641 & & \\
 -1134 & & -1377 & & -3456 & & -378 & & -2358 & & -1467 & & \\
 \hline
 3177 & & 6354 & & 3087 & & 8352 & & 6174 & & 6174 & & 
 \end{array}$$

6174になりました。あなたが考えた数ではどうなりましたか。やはり6174になっていませんか。

この操作で演算を繰り返すと4桁の数はみな6174に収束するのです。

この数を、その性質を発見したインドの数学者カプレカの名前をとって、カプレカ数(Kaprekar Number)といい、世の数学者を魅了しました。その性質とは、

全部が同じ数字ではない4桁の数は、数字を並べ替えてできる最大の数から最小の数を引く計算を繰り返すと最後には必ず6174になる。

この操作により6174に導く変換をカプレカ操作といいます。

では4桁の数でない場合はどうなるのでしょうか。

2桁の数で考えて見ましょう。

$$\begin{array}{cccccc}
 26 & \rightarrow & 36 & \rightarrow & 27 & \rightarrow & 45 & \rightarrow & 90 & \rightarrow & 81 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 62 & & 63 & & 72 & & 54 & & 90 & & 81 \\
 -26 & & -36 & & -27 & & -45 & & -9 & & -18 \\
 \hline
 36 & & 27 & & 45 & & 9 & & 81 & & 63
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cccccc}
 91 & \rightarrow & 72 & \rightarrow & 45 & \rightarrow & 90 & \rightarrow & 81 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 91 & & 72 & & 54 & & 90 & & 81 \\
 -19 & & -27 & & -45 & & -9 & & -18 \\
 \hline
 72 & & 45 & & 9 & & 81 & & 63
 \end{array}$$

同じカプレカ操作が繰り返され、ループ状態に陥ります。

では3桁ではどうでしょう。

$$\begin{array}{cccccc}
 375 & \rightarrow & 396 & \rightarrow & 594 & \rightarrow & 495 & \rightarrow & 495 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 753 & & 963 & & 954 & & 954 & & \\
 -357 & & -369 & & -459 & & -459 & & \\
 \hline
 396 & & 594 & & 495 & & 495 & & 
 \end{array}$$

あっという間に495という値に収束してしまいました。

他の桁はどうなるのでしょうか。

5桁は3パターンでループすることが知られています。

6桁は、1つのループに陥るか、549945と631764にどちらかに収束します。

7桁は、1つのループになります。

調べれば調べるほどカプレカ数の不思議さはループしていくのです。

なお、カプレカ数は、すべて9の倍数になります。

例えば、4桁の数で考えると、

$$N = 1000a + 100b + 10c + d, \quad M = 1000d + 100c + 10b + a \quad (a > b > c > d)$$

とすると、

$$N - M = 999a + 90b - 90c - 999d$$

から明らかですね。

さらに、6174については、

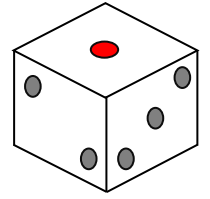
$$6174 \Rightarrow 6 + 1 + 7 + 4 = 18 \Rightarrow 6174 \div 18 = 343$$

6174は、各位の数の和で割り切れます。このような数をハーシャッド数(大きな喜びの数の意)といいます。この数も数学者カプレカがみつけたものです。だから、カプレカ数はもちろんですが、こういった数の性質を見つけた数学者カプレカの頭の中の構造の方がよっぽど不思議に思えるのです。

さいころを知らない人はいないと思いますが、ではさいころの目の入れ方(配置)は何通りか分かりますか。円順列の応用問題としてよく出題されますが、さいころの目は

### ① さいころの相対する面の目の和は7

という規則で配置されていることを知らないといけない問題ですね。例えば1の向かいが6であり鏡像関係にあるわけで、この配置をマーチン・ガードナーは「7点原理」とよんでいます。これが今回の話題の数です。さて、その配置はまず上面を1に固定し、サイコロが上下に回転しないようにします。このとき下面は7点原理より6ですね。次に側面に2,3,4,5の4つの数字をいれますが、今度は横回転をしないように常に正面に2があるようにします。その対面は5になります。このようにさいころを回転しないように固定することであとは正面2の目の左側面、右側面に3,4を配置することより、場合の数は2通りとなります。そうなりましたか？

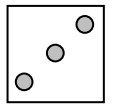
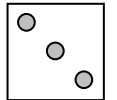


残念ながら間違いです。実はさいころには7点原理の他にもうひとつ重要な配置原理があるのです。

### ② さいころの目は左回り(反時計回り)に面付けされている

右上図のように3つの面が見えるようにみると、目の数字の配置は、カドを回転の中心として、反時計回りに1→2→3になっているのです。これから上面1、正面2のとき右側面は反時計回りの配置により3に確定してしまいます。したがってサイコロの目の入れ方は1通りとなります。今度はいいでしょうか。

残念でした。また間違いです。問いは「さいころの目の入れ方となっていますね。さいころの目は1を表す●を面上に数字の数だけ並べて表現しますが、他の面の目の関係で右図の3の目の様に2通りの見え方があります。



このような見え方の目は3の他に2,6も同じです。したがって見え方まで考慮すると $2^3 = 8$ 通りが答えになります。単純に数字を入れるなら1通りでいいのですが、数字を目という模様で表すことでこのようなことが起きるのです。えっ、でも数字だってその書き方は1を逆さまにしたり、横にしたりする見え方もでてくるのではないかって。そうですね。でもそれではゲームをするときに数字が分かりにくくなり、だからこそ数字を模様である目で表現しているのです。この2つの原理を用いると次のことを調べることができます。

Q1 右の展開図は正しいでしょうか。

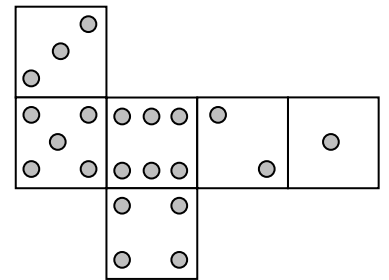
最初に7点原理を確認しましょう。5,6,2,1の横一列の並びをみると対面の和が7であることは明らかですね。ここで反時計回りの原理を、もう少し詳しく説明しましょう。まず、1→2→3の左回りを基本形とします。これを元に他の3つの目の位置関係をみるのが可能になります。

○3つの数のいずれか一つを対面の数字に替えたものは逆回りに配置

○3つの数のうち2つの数字を入れ替えたものは逆回りに配置

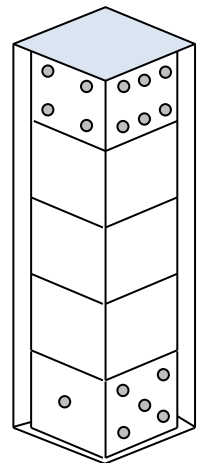
たとえば、1,2,3の2の目を対面の数5の目に替えた1,5,3は右回りになります。さらに1を対面の数6に替えると6,5,3は左回りに戻ります。1,2,3に対して、2つ目を入れ替えると2,1,3は右回り、2,3,1は左回りになります。1,2,3の偶数、奇数の目を対面の目に替えることで奇数列1,3,5と偶数列2,4,6は左回りになることを覚えておくといいでしょう。

それでは展開図をみてみましょう。7点原理は確認できているので、面付けの回転を調べます。1つのカドの回転をみるだけで十分です。3,5,6をみると左回りになっています。ここで5と6を対面の2と1にそれぞれ替えると、3,2,1も左回りです。さらに3と1を交換すると1,2,3は右回りになり間違いであることが分かります(5を対面の2に変えて2,4,6でみるともっと簡単)。



Q2 箱の中に右図のように5つのさいころが詰められています。2つのさいころが共有する面は8つありますが、それらの面の目の合計をなんでしょうか。

一番上のさいころの上面は2または5です。2,4,6は左回りより、上面は2になり、下面は5です。同様に一番下のさいころの上面は3または4です。1,3,5は左回りより、下面は3、上面は4です。また、残りの3つのさいころの上面と下面の和は7点原理より7ですから、和は、 $5 + 3 \times 7 + 4 = 30$   
最後にマジックへの応用をひとつ



あなたが振った3個のさいころの目を当ててみましょう。1つめのさいころの目を3倍し、対面の目を加えて5倍してください。次に2つめのさいころの目を加えて10倍し、最後に3つめの目を加えてください。それでは計算結果を教えてください。674ですか。さいころの目は3と2と4ですね。

さいころの目を $a, b, c$ とすると、演技者が要求した計算は次のようになります。

$$10\{5(3a + 7 - a) + b\} + c = 100a + 10b + c + 350$$

したがって、計算結果から350を引くと、各位の数が3つのさいころの目になります。

さいころは、古代ギリシャ、中国、日本など世界中で昔からゲームや賭け事の道具として用いられ、その目の配置はみな7点原理によるものでした。立方体の形状、同様の確からしさから、人は時代や場所を超えみな同じ道具と規則を生み出すのです。「A toss of the dice」は偶然、運といった意味ですが、人は「The die is cast」といい、運命をさいころに委ねます。運命のバランスということではさいころは公平ですからこれはどんな結果でも甘んじるということになってしまいます。でも人が本当にさいころに期待するのは、「Dice with death」(いのちがけでやる)、最善を尽くした後の幸せなのでしょう。

ある数  $n$  のそれ自身を除く約数で、その和が  $n$  よりも大きくなるものを考えてみましょう。例えば20はそれ自身を除く約数は1,2,4,5,10であり、和は $1+2+4+5+10=22$ になります。このとき、この約数から幾つかを選んで、その和がもとの数になるようにすることができますでしょうか。20については、

$$1+4+5+10=20$$

できましたね。では他の数でも同様にできるか挑戦してみてください。といってもそれ自身を除く和がもとの数より大きなものを探すのは大変ですね。そこで、100以下の自然数でこの条件を満たすものを右に示しました。実は22個しかありません。ではこの中から適当な数を選んでその数を約数の和で表してください。

もうひとつ例を挙げましょう。48は右表から約数は、たくさんあり、その和は76になります。和が48になる組み合わせは、

$$48=1+2+3+4+6+8+24=8+16+24$$

不思議なことにどの数でもできそうですね。

えっ、できなかった。ひょっとしたら70を選びました。今回の不思議数が70だからといって、やっちゃいましたか?。実はこの22個の中で唯一70だけが約数の和で表すことができない数なのです。

70が約数の和で表せないことは自分自身を除く約数の総和が74であることから調べられます。和を70に近づけるためには7以上の約数はすべて和の中に必ず含まれていなければなりません。それを足すと $7+10+14+35=66$ 。残っている約数は1と2と5だけですが、これをどのように組み合わせて足しても70にはなりません。このような数は100から1000の間では836だけ、それより大きな数は、

$$4030, 5830, 7192, 7912, 9272, 10430, 10570, 10792, 10990, \dots$$

このように続いていきます。10000以下では、僅か7個しかないわけで、貴重な数といえます。

それ自身を除く総和が元の数を超えるとき、ほとんどの数は、約数の和で表現できることが本当は不思議なのですが、そうでない数が7個しかないとそちらに目がいきま、なぜ?、と思ってしまうのです。さて、このような数を「不思議数」といいます。不思議という冠をいただく数は実際に存在していたんですね。

ところで、すべての自然数たちは大きくわけて3つのグループに分類できます。それ自身を除く約数の和が、その数より「小さい」「等しい」「大きい」グループであり、グループに属する数を、それぞれ、「不足数」、「完全数」、「過剰数」といいます。この中で世間でもっとも注目を集めている数は完全数で、6と28がいとも親善大使のように紹介されています。

$$6 \text{ のそれ自身を除く約数は } 1, 2, 3 \text{ で、 } 1+2+3=6$$

$$28 \text{ のそれ自身を除く約数は } 1, 2, 4, 7, 14 \text{ で、 } 1+2+4+7+14=28$$

いくらでもこのような数はありそうですが、このあとは、

$$496, 8128, 33550336, 8589869056, \dots$$

なかなか顔を表しませんが、無数に存在することは知られています。

不思議数も稀にしか出現しない数ですが、次の性質があります。

「ある不思議数  $n$  のそれ自身を含む約数の総和を超える素数  $p$  に対して、 $np$  も不思議数」

不思議数70の約数の総和は、144です。これより大きい素数、149、151、157に対して、

$$149 \times 70 = 10430, 151 \times 70 = 10570, 157 \times 70 = 10990, \dots$$

これらも不思議数になります。これから素数が無数にあることより不思議数も無数にあることが分かります。

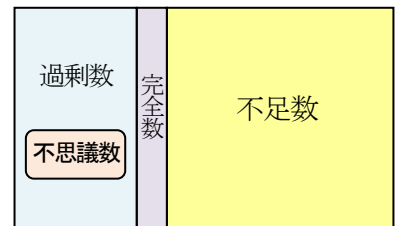
さて、完全数は、*Perfect number* といい、いつも脚光を浴び、「奇数の完全数はあるか」といった問題も多くの数学者が研究をしています。その脚光の陰にいる不思議数は *Weird number*、「異様、風変わりな数」と訳され、*Weird fellow* は「変な奴」を意味します。スポットを当てられないことにちょっとすねるように、素数にちょっかいを出し、つるんだりするのは。そして、不思議数もまた完全数に当てつけるように奇数の不思議数はみつかりません。

そんな不思議数に興味を持った数学者がいます。放浪数学者として知られるポール・エルデシュ教授は、次々に難問を考え、その問題を解いた人には懸賞金を出し、風変わりな数学者として知られていました。教授は1971年に

「奇数の不思議数の発見に10ドル、それが存在しない証明には25ドル」

の賞金をだしました。額はともかく、発見と証明の金額の比率はどう解釈すればいいのでしょうか。教授は証明の可否のどちらの立場にいたのでしょうか。そして現在もその結論はでていません。誰も発見、証明ができないのか、それとも誰も研究していないのか……不思議な数ですね。

数	約数の和	それ自身を除く約数
12	16	1 2 3 4 6
18	21	1 2 3 6 9
20	22	1 2 4 5 10
24	36	1 2 3 4 6 8 12
30	42	1 2 3 5 6 10 15
36	55	1 2 3 4 6 9 12 18
40	50	1 2 4 5 8 10 20
42	54	1 2 3 6 7 14 21
48	76	1 2 3 4 6 8 12 16 24
54	66	1 2 3 6 9 18 27
56	64	1 2 4 7 8 14 28
60	108	1 2 3 4 5 6 10 12 15 20 30
66	78	1 2 3 6 11 22 33
70	74	1 2 5 7 10 14 35
72	123	1 2 3 4 6 8 9 12 18 24 36
78	90	1 2 3 6 13 26 39
80	106	1 2 4 5 8 10 16 20 40
84	140	1 2 3 4 6 7 12 14 21 28 42
88	92	1 2 4 8 11 22 44
90	144	1 2 3 5 6 9 10 15 18 30 45
96	156	1 2 3 4 6 8 12 16 24 32 48
100	117	1 2 4 5 10 20 25 50



何が不思議なのでしょう。計算すれば明らかになります。

$$\underline{76}^2 = 5776$$

分かりますか？。下二桁の数字は平方しても変わっていません。百の位が異なり下二桁が76の2数の掛け算についても、

$$\underline{376} \times \underline{476} = 178976$$

同じ現象が起こります。掛けても位の数が変わらない原理を探ってみましょう。

まず、1桁の数の場合は、

$$\underline{1}^2 = \underline{1}, \underline{5}^2 = \underline{25}, \underline{6}^2 = \underline{36}$$

一の位が、1, 5, 6の場合はこの性質を満たしています。

一の位が6の場合について、以下、考えてみます。

下2桁が変わらない3桁の2数を、

$$P = 100a + 10k + 6, Q = 100b + 10k + 6 \quad (1 \leq a, b \leq 9, 0 \leq k \leq 9)$$

とします。

$$PQ = 10000ab + 1000(a+b)k + 600(a+b) + 100k^2 + 120k + 36$$

ここで、下2桁の数を決定するのは

$$120k + 36 = 100k + 20k + 36$$

これが、 $10k + 36$ の下2桁と一致するためには、

$$20k + 36 \equiv 10k + 6 \pmod{100}$$

$$10k + 30 \equiv 0 \pmod{100}$$

$\therefore k = 7$  で下2桁の数は76となります。

次に、下3桁が平方しても変わらない4桁の2数を、

$$P = 1000a + 100k + 76, Q = 1000b + 100k + 76$$

とすると、

$$PQ = 1000000ab + 100000(a+b)k + 76000(a+b) + 10000k^2 + 2 \times 7600k + 76^2$$

下3桁を決定するのは、

$$2 \times 7600k + 76^2 = 15000k + 200k + 5000 + 776$$

より、

$$200k + 776 \equiv 100k + 76 \pmod{1000}$$

$$100k + 700 \equiv 0 \pmod{1000}$$

$\therefore k = 3$  で下3桁の数は376です。

同様に、下4桁の場合は、

$$2 \times 376000k + 376^2 = 770000k + 2000k + 141376$$

より、

$$2000k + 1376 \equiv 1000k + 376 \pmod{10^4}$$

$$1000k + 1000 \equiv 0 \pmod{10^4}$$

$\therefore k = 9$  より下4桁の数は9376.

これを続けていくと、

$$\dots\dots 7109376$$

と、順次求めることができます。

同じように、一の位が5の場合については、

$$\dots\dots 2890625$$

となります。一の位が1の場合は、残念ながらこの性質は2桁以上では成立しません。

ところで、このことから不思議な結果が得られます。

方程式、

$$x^2 = x$$

の解は、 $x = 0, 1$  ですが、無限の数を含めて考えた場合には、

$$x = \dots\dots 7109376, \dots\dots 2890625$$

も解であり、なんと、2次方程式の解が4個になってしまうのです。

4桁の数を紙に書いてください。  
次に、その4桁の各位の数を適当に並べ替えて新しく4桁の数を作ってください。  
2つの4桁の数を大きい数から小さい数を引いてください。  
計算した各位の数から適当に一つの数を選んで○で囲ってください。  
それでは、○で囲った以外の数を私に教えてください。  
○印のついた数を私が当てて見ましょう。

例えば、4287を紙に書いたとすると、

$$4287 \Rightarrow (\text{数を入替え}) 7482 \Rightarrow (\text{最初の数との差をとり}) 7482 - 4287 \Rightarrow (\text{どれか一つに○で囲み}) 319 \textcircled{5}$$

この数字の中の3, 1, 9を教えてください、○のついた5を当てるといふものです。

次のようにして調べます。

まず5以外の各位の数を聞いた順に足していきます。和が2桁になったら、その数の各位の数の和を求め1桁の数にした後に、数を聞いて足していきます。この操作を繰り返します。

$$319 \Rightarrow 3+1+9=13 \Rightarrow 1+3=4$$

ここで、最後に残った1桁の数4を9から引いた数が○で囲った数になります。この理由を考えて見ましょう。

始めに紙に書いた数を  $N$  とし、その数字の並びを  $abcd$  とします。

$$N = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d = a(999+1) + b(99+1) + c(9+1) + d = 9(111a+11b+c) + (a+b+c+d)$$

この式から、9の倍数は、各位の数の和が9の倍数かどうかで判定できることが分かりますね。和が2桁以上になったらまた各位の数の和を求めてそれが9の倍数かどうかを判定すればよいのです。

次に、各位の数を適当に並べ替えて作った4桁の数を例えば  $M$  とし、その数字の並びを  $bdac$  とします。

$$M = b \times 10^3 + d \times 10^2 + a \times 10 + c = 9(111b+11d+a) + a+b+c+d$$

2数  $M, N$  の差を求めると、 $a+b+c+d$  がなくなりますから、その差は9の倍数となります。したがって、各位の数の和は9となるから、3つの数の和が分かれば、残りの一つの数は9から引いて求められるのです。

このことは、各位が  $a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_n$  なる  $n$  桁の数  $N$  であっても成立します。

$$N = \sum_{k=1}^n a_{k-1} \cdot 10^{k-1} = \sum_{k=1}^n a_{k-1} (10^{k-1} - 1) + \sum_{k=1}^n a_{k-1} = \sum_{k=1}^n 9(10^{k-2} + 10^{k-3} + \dots + 1) + \sum_{k=1}^n a_{k-1}$$

これから、 $N$  を9で割った余りは  $\sum_{k=1}^n a_{k-1}$  を9で割った余りに一致します。各位の数を適当に入れ替えて差をとるとその値は9の

倍数になります。この数当てマジックは桁数を増やすことで、神秘性は深まります。計算は大変になりますが……。

このように、ある数の各位の数の和を求めて、それが2桁になったらまた分解して求めるという操作を続けて得られる数を、もとの数の数字根(Digital Root)といいます。例えば、

$$13578 \Rightarrow 1, 3, 5, 7, 8 \Rightarrow 1+3+5+7=16, 8 \Rightarrow 7, 8 \Rightarrow 7+8=15 \Rightarrow 1+5=6$$

数13578の数字根は6です。

和が2桁の数16であるとき、さらに  $1+6=7$  として計算することは、16を9で割った余りを求めることでもあります。

9で割った余りは、9を取り去ることであるため、この操作を九去法といいます。九去法はインドで考案され、ヨーロッパに広がり、加法・減法(応用すると乗法・除法)の四則演算の驗算法として古くから用いられていました。

その方法は、数字根が加減法の計算の後も変わらないことを利用したものです(ガウスの導入した合同式によりその性質を調べることができます)。

$$a \equiv b, c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow ac \equiv bd, a+c \equiv b+d, a+k \equiv b+k \pmod{n}$$

各位の数字が0, 1だけで構成される72の倍数で最小のものを求めてみましょう。

$$72 = 9 \times 8$$

72は9の倍数です(72  $\Rightarrow$  7+2=9とみても分かります)から、各位の数字が1のみで構成されるレピュイット数で最小の9の倍数を考えると、111, 111, 111。また、72は8の倍数ですから、その中で0, 1のみで構成される最小の数は1, 000。このことから、求める数は、

$$111, 111, 111, 000$$

となります。

さて、特異な性質を有する数達の数字根を調べると、その多くは9になっています。

$$123456789, 1089, 2925, 3087, 142857, 6174, 297, \dots$$

サム・ロイドは「9のもつ神秘性はひとえに9が十進法の最終数字であるという単純な事実に基づいている」と指摘していますが、数達のエンターティナーたる資質は9なるDNAによって決定されているようです。



# 1 97

………循環節を偽る数

100以下の素数は25個ありますが、最後の素数97の逆数が今回の数です。素数 $p$ の逆数 $\frac{1}{p}$ は循環小数で表すとき、循環節の長さは最大で $p-1$ ですが、 $\frac{1}{97}$ も最大の長さ96の循環節をもっています。あなたはこれを5分で計算できますか？

ちなみにエジンバラ大学のアレキサンダー・エイキトン教授は、頭の中だけで計算できたといわれています。

$$\frac{1}{97} = \frac{1}{100-3} = \frac{1}{100\left(1-\frac{3}{100}\right)} = \frac{1}{100} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{100}\right)^{n-1}$$

このようにみると公比3の等比数列を2桁ずつずらしていけば循環節は分かりますが、そのすべてを計算することはとてもできそうにありません。でもあることを理解すれば5分もあれば十分なのです。さて計算との戦いの前に相手のこと、すなわちその循環節の性質を知っておくことが大事です。

まず小手調べとして数学者ガウスが愛した $\frac{1}{17}$ を展開してみましょう。

$$\begin{aligned} \frac{1}{17} &= \frac{1}{100} \times \frac{100}{17} = \frac{1}{10^2} \left(5 + \frac{15}{17}\right) = \frac{5}{10^2} + \frac{1}{10^3} \times \frac{150}{17} = \frac{5}{10^2} + \frac{1}{10^3} \left(8 + \frac{14}{17}\right) = \dots \\ &= \frac{5}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \frac{5}{10^7} + \frac{1}{10^7} \times \frac{5}{17} \end{aligned}$$

分数の分子の値が小数展開したときの数になります。すなわち0.0588235と続き、一番右側にある分数 $p = \frac{1}{10^7} \times \frac{5}{17}$ の分子は余りを表し、これ以降も同様の方法で展開することができます。ところが、

$p = \frac{1}{10^6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{17}$ と変形すると、また $\frac{1}{17}$ が現れてきます。だから0.0588235以降は588235の各桁の数を半分にした値が続いていき、以後もこれが繰り返されるだけなのです。長さ6の588235を左から順番に半分の値にしていくことは暗算でもできます。割り切れないときは次の桁に10を加えていけばいいのです。右図がその計算です。

0.0588235	
17	100
	85
	150
	136
	140
	136
	40
	34
	60
	51
	90
	85
	5

	0	5	8	8	2	3	5
1/2倍 ⇒		2	9	4	1	1	7
1/2倍 ⇒		6	4	7	0	5	8
1/2倍 ⇒		8	2	3	5	2	9

さて、 $\frac{1}{17}$ 循環節の長さは16ですが、この長さ6の並びが本当の循環節と考えてもよく、これを純循環節と呼ぶことにしましょう。ただこの

ような計算ができるのは、割って余りを求めていくときに「余り5」がでた場合だけです。100以下の素数で余り5がでる場合を調べてみると、右図の12通りあります。この中で素数19の逆数の場合は特別で、同じような計算はできません。素数59の逆数では純循環節の長さは33にもなってしまいます。71の逆数の純循環節の長さはとても短く6です。ガウスは71の逆数についてはこの方法で求めていたといわれています。

それではいよいよ97の逆数の小数展開を5分で計算してみましょう。まず純循環節を計算しますが、3の倍数を2桁ずらしていくか、直接割っても桁数10の計算は、1分もあればOKでしょう。あとは、それを残り4分で、下の表のように順番に半分ずつしていけばいいのです。

	0	1	0	3	0	9	2	7	8	3	5
1/2倍 ⇒		0	5	1	5	4	6	3	9	1	7
1/2倍 ⇒		5	2	5	7	7	3	1	9	5	8
1/2倍 ⇒		7	6	2	8	8	6	5	9	7	9
1/2倍 ⇒		3	8	1	4	4	3	2	9	8	9
1/2倍 ⇒		6	9	0	7	2	1	6	4	9	4
1/2倍 ⇒		8	4	5	3	6	0	8	2	4	7
1/2倍 ⇒		4	2	2	6	8	0	4	1	2	3
1/2倍 ⇒		7	1	1	3	4	0	2	0	6	1
1/2倍 ⇒		8	5	5	6	7	0	1	0	3	0

No.	素数	循環節の長さ	長さ	純循環節
1	7	6	5	1 4 2 8 5
2	17	16	6	5 8 8 2 3 5
3	19	18	2	5
4	23	22	14	4 3 4 7 8 2 6 0 8 6 9 5 6 5
5	29	28	16	3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5
6	31	15	9	3 2 2 5 8 0 6 4 5
7	47	46	16	2 1 2 7 6 5 9 5 7 4 4 6 8 0 8 5
8	59	58	33	1 6 9 4 9 1 5 2 5 4 2 3 7 2 8 8 1 3 5 5 9 3 2 2 0 3 3 8 9 8 3 0 5
9	61	60	13	1 6 3 9 3 4 4 2 6 2 2 9 5
10	71	35	6	1 4 0 8 4 5
11	89	44	8	1 1 2 3 5 9 5 5
12	97	96	10	1 0 3 0 9 2 7 8 3 5

ではもう一題。素数109の逆数の循環節の長さは108で、純循環節の長さは15です。この数を7分で小数展開してください。



# 999

スリーナイン。

1001はインドでは完全数1000を超える吉祥数として扱われるのに対して、999は1足りないわけですから、不完全な数ということになるのかもしれませんが、

$$999 = 9 \times 111$$

1と9、すなわち始まりと終わりで作られる数であり、すべてを見てきた数でもあるわけです。

さらに、素因数分解すると、

$$999 = 3^3 \times 37$$

ラッキーナンバーの3と7だけで作られる数であり、数37の面白い性質にも関与していました。

999は1089のマジックの演出に深い関わりがありました。

999は1000-1とみることで、1桁目の数を4桁目に移動させる働きがある数でもあります。

999は分母の値になることで、循環小数による踊りを演出しています。

999は、九去数として、種々のマジックで奇術師の有能なアシスタントを務めています。

こうしてみると、どうして、どうして、ただ者ではない数なのです。

999は8番目の第2定義によるカプレカ数であり、

999……999<sup>2</sup>についても、(10<sup>n</sup> - 1)<sup>2</sup>と考えると、各位に並ぶ数字が美しく再現され、カプレカ数になることが示されました。

では、3乗の場合の各位の並びはどうなるでしょう。

$$999^3 = 997002999$$

この数字の並びにも特徴があります。9の数を増やしていくと、

$$9999^3 = 999700029999$$

$$99999^3 = 999970000299999$$

$$999999^3 = 999997000002999999$$

n桁の9のゼロ目は、N = 10<sup>n</sup> - 1となることから、その3乗は、

$$N^3 = 10^{2n}(10^n - 3) + 3 \cdot 10^n - 1$$

N<sup>3</sup>は、3n桁の数であり、

$$\underbrace{(999 \dots 999)}_{3n}^3 = \underbrace{999 \dots 99}_{n-1} \underbrace{7000 \dots 00}_{n-1} \underbrace{2999 \dots 99}_n$$

となります。Nの4乗は、

$$N^4 = (10^n - 1)^4 = 10^{4n} - 4 \times 10^{3n} + 6 \times 10^{2n} - 4 \times 10^n + 1 = 10^{3n}(10^n - 1) + 10^n(6 \times 10^n - 4) + 1$$

これから、

$$\underbrace{(999 \dots 999)}_{4n}^4 = \underbrace{999 \dots 99}_{n-1} \underbrace{6000 \dots 00}_{n-1} \underbrace{5999 \dots 99}_{n-1} \underbrace{6000 \dots 001}_{n-1}$$

何乗しても綺麗な配置で数が並びそうですね。999にも面白い性質が潜んでいるようです。

ところで3つの9で作られる次の数で、一番大きな数はどれだと思いますか。

- ① 999    ② 99<sup>9</sup>    ③ 9<sup>99</sup>    ④ 9<sup>9<sup>9</sup></sup>

一番小さな数は①の999で、一番大きな数は④の9<sup>9<sup>9</sup></sup>であり、999!よりも遥かに大きくなります。

どれだけ大きいかというと、9<sup>9</sup> = 387420489 ですから、N = 9<sup>9</sup> とすると、

$$\log_{10} N = \log_{10} 9^{387420489} \doteq 387420489 \times 2 \times 0.477121 = 369692902.264338$$

log<sub>10</sub> 3の精度により桁数がずいぶん違ってきてしまいますが、3億6千万個以上の0が並ぶというんでもない数になるのです。

1947年、H.S.ウーラーは、log<sub>9</sub> 9<sup>9</sup>を小数第250桁まで計算しており、9<sup>9</sup>に愛着があったみたいです。現在では、

$$9^9 = 428124773 \dots \dots \dots 89$$

であることが知られています。もっとも、アイザック・アシモフは著書「雑学コレクション」で、誰もその値を見たものはいないともいっていますが……。

中国では大昔から基数の最大数である9は皇帝の数といわれていましたが、その9を3つ使って作られる最大数9<sup>9<sup>9</sup></sup>は、無限を孕む数であり、宇宙の果てまでいってしまうような大きさになります。3つの9の並びがちよっと足りないなんて認識は吹っ飛んでしまいましたね。

スリーナインの響きは、僕らの世代は「銀河鉄道」の汽笛の響きを連想してしまいます。

ジョバンニは、ケンタウルの星祭りの夜、天気輪の丘で銀河鉄道に乗り込みカムパネラと一緒に天の川への旅を続けます。ジョバンニの陽炎のように妖しい「銀河鉄道の夜」の儂い夢の果て。そして、鉄郎とメーテルは、大惑星雲アンドロメダの惑星メーテルへ「万感の想いを込めて、いま汽笛が鳴り」、999が導く無限へと旅だっています。1000に一つ足りないからこそ無限に希求し続けるノスタルジックな数、それが999なのです。

## 数たちとの出会いの場の記録

### 【書籍参考文献】

- 数学の学校 淡中忠郎 東京図書  
続数学の学校 淡中忠郎 東京図書  
ガードナーの数学サーカス マーチン・ガードナー (高山 宏 訳) 東京図書  
数学マジック マーチン・ガードナー著 金沢 養・訳 白揚社  
おもしろい数学パズルⅠⅡ マーチン・ガードナー著 金沢 養・訳 社会思想社  
代数のはなし ペレリマン (山崎 昇 訳) 東京図書  
数学歴史パズル 藤村幸三郎 田村三郎 講談社 (ブルーバックス)  
パズル数学入門 藤村幸三郎 田村三郎 講談社 (ブルーバックス)  
数学アイデアパズル 藤村幸三郎 松田道雄 講談社 (ブルーバックス)  
ゆっくり考えよう! 高校総合学習の数学 佐々木正敏 講談社 (ブルーバックス)  
円周率 $\pi$ の不思議 堀場芳数 講談社 (ブルーバックス)  
自然にひそむ数学 佐藤修一 講談社 (ブルーバックス)  
代数を図形で解く 中村義作 阿邊恵一 講談社 (ブルーバックス)  
数学の魔法の宝箱 イアン・スチュアート (水谷 淳 訳) ソフトバンク クリエイティブ株式会社  
数学の秘密の本棚 イアン・スチュアート (水谷 淳 訳) ソフトバンク クリエイティブ株式会社  
数学の楽しみ テオニ・パパス (安原和見 訳) 筑摩書房  
数学は生きている テオニ・パパス (秋山仁 監修) 東海大学出版会  
5分で楽しむ数学50話 エアハルト・ベーレンツ著(鈴木 直 訳) 岩波書店  
続5分で楽しむ数学50話 エアハルト・ベーレンツ著 岩波書店  
数学が面白くなる本 中村義作 三笠書房  
数学がらくにわかる本 樺 且純 三笠書房  
数の魔法使い ロブ・イースタウェイ・ジェレミー・ウィンダム 三笠書房  
数学小景 高木貞治 岩波書店  
見つけよう! 数学 D. ウェルズ (大橋義房 訳) 岩波書店  
数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ……∞ 小針明宏 日本評論社  
楽しい数学 シャックル (市場泰男 訳) 社会思想社  
遊びの数学 ペレリマン (藤川健治 訳) 社会思想社  
逆説論理学 野崎昭弘 中央公論社  
数理パズル 池野信一 高木茂男 土橋創作 中村義作 中央公論社  
マンホールのふたはなぜ丸い 中村義作 日本経済新聞社  
枕頭問題集 L. キャロル (柳瀬尚紀 訳) 朝日出版社  
エインリの数学パズル S. エインリ (高木茂男 訳) 培風館  
ふしぎな数学 ノースロップ (松井正太郎 訳) みすず書房  
計算が楽になる実用数学 波多 朝 理工学社  
数学パズルランド 田村三郎著 講談社(ブルーバックス)  
数学がおもしろくなる12話 片山孝次 著 岩波ジュニア新書  
数学パズル 大熊 正 著 全国出版  
数学おもしろ辞典 樺且純著 三笠書房  
数学はインドのロープ魔術を解く デイビット・アチソン著 伊藤文英 訳 早川書房  
「理系への数学」～6174の不思議 西山豊寄稿 現代数学社  
数学の雑学辞典 仙田章雄著 日本実業出版社  
数の事典 D. ウェルズ 著 芦ヶ原伸之・滝沢清・訳 東京図書  
異説 数学者列伝 森 毅著 筑摩書房  
数術師伝説 木村俊一著 平凡社  
数学トリック=だまされまいぞ! 仲田紀夫著 (ブルーバックス)講談社  
ふしぎな数のおはなし 芳沢光雄著 数研出版  
雪月花の数学 桜井 進著 祥伝社  
数の悪魔 エンツェンスベルガー著 晶文社  
数の神秘 フランツ・カール・エンドレス著 畔上 司・訳 現代出版  
数の本 J.H. コンウェイ R.K. ガイ 著 根上生也 訳 シュプリンガー・フェアラーク東京

### 【インターネット参考文献】

- 結び目の数学 今井 淳 <http://mathsoc.jp/publication/tushin/1303/1303imai.pdf>  
暦の数理 近藤芳朗 <http://www.kawasaki-m.ac.jp/mw/hinfo/index.php>  
積み木と調和級数 西山豊 <http://www.osaka-ue.ac.jp/zemi/nishiyama/>  
数学つれづれ草 菊池隆夫 講演