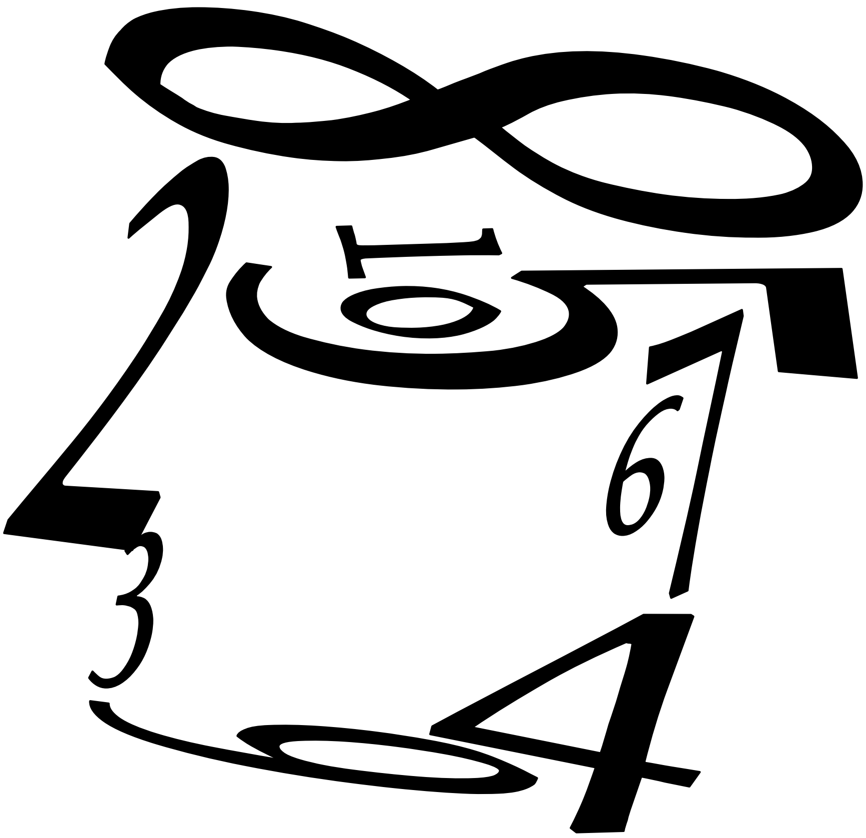
不思議数との出会いの覚書(51～100)

～百鬼夜行へのエピローグ



メガネを掛けている
インテリな数学の神様

$\sqrt{2}$

………無限の入口の門番数

$\sqrt{2}$ は直角を挟む 2 辺の長さが 1 である直角三角形の斜辺の長さですが、分数に表すことができない数です。

$\sqrt{2}$ の存在は、三平方の定理を証明したピュタゴラス学派は知っていたと言われています。しかし学派は万物の根元は数とみなし、自然界の創造物は数を表す粒子で構成されていると考えたため、分数に表すことのできない $\sqrt{2}$ は神の失敗数とし、忌み嫌いました。その存在は、「アロゴン:alogon～秘密にしておけ」と口外することを固く禁じ、漏らしたものは暗殺されたということです。でも $\sqrt{2}$ は連分数展開すると、

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

無限では分数に表現できることになりますがその場所での佇まいを人は目にすることはできません。だから不可侵の無限に触れようとすると、ときどき大きなしっぺ返しを受けることがあります。

例えば、方程式

$$x=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}} \quad (x>0)$$

の解は何でしょう。両辺を平方すると、

$$x^2=x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}=x+x=2x$$

$x>0$ ですから、$x=2$ となります。すなわち、

$$2=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$$

であるわけです。同じように、

$$x^{x^{x^{x^{\cdots}}}}=2 \qquad \cdots①$$

の正の解は、(左辺)$=x^2=2$ より、$x=\sqrt{2}$ が得られます。それでは、

$$x^{x^{x^{x^{\cdots}}}}=4 \qquad \cdots②$$

はどうなるでしょう。(左辺)$=x^4=4$ より、$x^2=2$ ですから、$x=\sqrt{2}$ 。ということは、

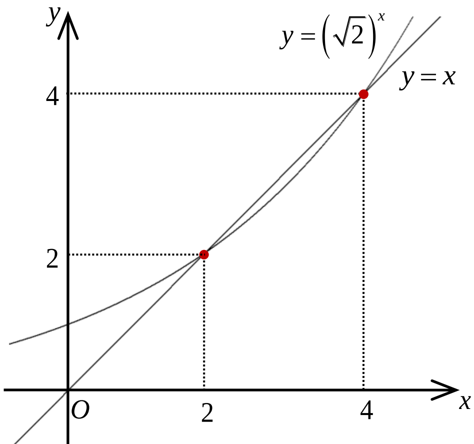
$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots\cdots}}}} \qquad \cdots\cdots(*)$$

の値は、2 なのか、それとも 4 なのか。不思議なことが起こっています。

調べてみましょう。いま(*)の値を x とすると、

$$x=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}=\left(\sqrt{2}\right)^x$$

となります。直線 $y=x$ と指数関数 $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$ の交点は、$(2,2)$, $(4,4)$ のみで、この 2 数以外に解はなさそうですが(*)の値は相変わらず不明のままです。



そこでこの直線と曲線を違う視点からみてみましょう。

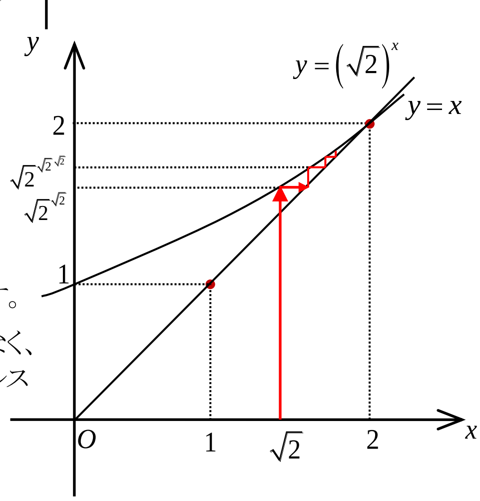
$f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^x$ とします。$x=\sqrt{2}$ の $f(x)$ の値は $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 。

次に、この値に対する $f(x)$ の値は

$$f\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$$

この操作を続けていくと(*)が得られます。

右のグラフをみてください。$x=\sqrt{2}$ と $y=f(x)$ の交点を通り、x 軸に平行な直線と直線 $y=x$ との交点を求めます。この交点を通り y 軸に平行な直線と $y=f(x)$ との交点……と続けていくと、点は無限の領域に少しずつ近づき、点 $(2,2)$ に吸い込まれていくのが分かります。すなわち、(*)の値は 2 になるのです。



神の失敗数の烙印を押された $\sqrt{2}$ はけっして人が安易に評価できるような数ではなく、むしろ、神の領域に踏み込み無限の迷路へと誘われた人間を待ち受けるミノタウルスの如き数なのです。

153

……… 自画自賛する数

1 から 1000 までの数で、各位の数の 3 乗の和を求めます。その値が元の数に一致しているものは何個あるでしょうか。

もちろん、最初に現れる数は 1 です。では次の数は何だと思いますか(タイトルから予想できますね)。

この計算には 1 桁の数の 3 乗の値が関わってくるので右表にまとめました。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^3	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729
n^3の一位	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

この表から 1 桁の数では該当するものは 1 しかないことが分かります。2 桁の数では、数 5〜9 の 3 乗は 3 桁の値になってしまいますので、0〜4 で作られる 2 桁の数、$4 \times 5 = 20$ (個)が候補になります。これを逐一調べてみると該当する数は見つかりません。

次に 100〜199 までの 3 桁の数をみてみましょう。3 桁の数 N は、$N = 100 + 10a + b$ $(0 \leqq a, b \leqq 9)$ で与えられ、各位の数の 3 乗の和は、$1 + a^3 + b^3$ になります。これが N に一致すればいいわけです。まず、一位が一致する場合について表を用いて調べてみましょう。$100 + 10a + b \equiv 1 + a^3 + b^3 \pmod{10}$ より、$b \equiv 1 + a^3 + b^3$ となります。

ここで、6〜9 は、3 乗が 200 以上のため各位の数として用いることはできません。すなわち、$0 \leqq a, b \leqq 5$ に限定されます。

$b = 0,1,4,5$ のとき、3 乗の値の一位の数は元の数と等くなります。すなわち $b^3 \equiv b \pmod{10}$ より、

$$b \equiv 1 + a^3 + b \qquad a^3 + 1 \equiv 0 \pmod{10} \quad \text{すなわち} \quad a^3 = 9 \pmod{10}$$

$0 \leqq a \leqq 5$ より、これを満たす a はありません。

$b = 2,3$ のとき、3 乗の値の一位の数は $10 - b$ になります。すなわち、$b^3 \equiv 10 - b \pmod{10}$ より、

$$b \equiv 1 + a^3 + 10 - b \qquad a^3 \equiv 2b - 11 \equiv 2b - 1 \pmod{10}$$

$b = 2$ のとき $a^3 \equiv 3$ よりこれを満たす a はありません。

$b = 3$ のとき $a^3 \equiv 5$、すなわち $a = 5$ となります。

以上のことより、3 乗の和で一位の数が元の数と一致するのは 153 しかないということになります。この数の各位の数の 3 乗の和が 153 に一致しなければ 199 までの数の中には条件を満たすものはないのです。恐る恐る……

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$$

一致しました!!!!!。

一見単純そうな「3 乗の和が一致」という条件は、実は結構厳しい条件なのです。

実際、1〜1000 までの中で、この条件を満たすものは、

1, 153, 370, 371, 407

この 5 つの数しかなく、3 桁で最初に登場するのが 153 なのです。

なお、条件を

「n 桁の自然数で、その各位の n 乗の和が元の数に等しい数」

と変えてみるとどうなるでしょう。

$n = 1$ のときは、1 から 9 の自然数は全て満たしています。

$n = 2$ のときは、このような数は存在しません。

$n = 3$ のときは、先ほどの 153,370,371,407 の 4 つの数が該当することになります。

$n = 4$ のときは、1634,8208,9474

10 から 9999 までに 7 個しかない極めて稀な数であり、これらの数はナルシスト数と命名されています。このナルシスト数は有限個しかありません(他の有名数は稀に出現してもその個数は無限個であることが多い)。それは、1 桁の数の n 乗が非常に大きな数になることから予想できます。n 桁の最大数である $10^n - 1$ に対して各位の n 乗の和は $n \times 9^n$ ですが、十分大きな n については、この値は n 桁の最小数 10^{n-1} より小さくなってしまうのです。例えば $n = 100$ のときは、

$$10^{100-1} - 100 \times 9^{100} = 100 \times (10^{97} - 9^{100}) > 0 \qquad (\log_{10} 9^{100} = 200 \log_{10} 3 \fallingdotseq 200 \times 0.4771 = 95.42)$$

となります。ナルシスト数の全個数は 87 個であることが証明されています。このように数全体からみれば本当に極めて稀に出現する数であり、n 乗の和が自分に戻るわけですから、自分を自分で愛でたくなる気持ちは分かりますね。

そしてその中でも 153 にはさらに凄い性質があるのです。

「3 で割り切れる数に対して、各位の数の 3 乗の和を求め、さらにこの操作を続けると必ず 153 になる」

というものです。例えば

$$18 \to 1^3 + 8^3 = 513 \to 5^3 + 1^3 + 3^3 = 153 \ (2\text{回の操作})$$

$$132 \to 1^3 + 3^3 + 2^3 = 36 \to 3^3 + 6^3 = 243 \to 2^3 + 4^3 + 3^3 = 99$$

$$\to 9^3 + 9^3 = 1458 \to 1^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 = 702 \to 7^3 + 0^3 + 2^3 = 351 \to 3^3 + 5^3 + 1^3 = 153 \ (7\text{回の操作})$$

100000 以下の数を調べてみると、最大 14 回の操作で 153 に収束することが分かります。すなわち、すべての 3 の倍数は、ほんの僅かな操作回数で 153 にひれ伏してしまうです。

153 は鼻高々のとびっきりのナルシストというわけです。

25

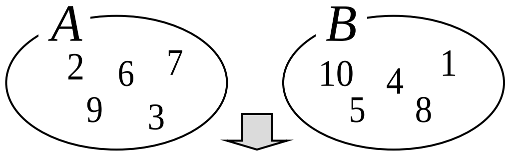
……‥オーダーを均質化した数

1から10までの自然数を、5個ずつの2つのグループに分けます。

次に、1段目にAグループの数字を小さい順に左から右へ並べ、

2段目に、Bグループの数字を大きい順に左から右へ並べます。

そして、3段目には、左から順に各列の1段目と2段目にある2数を大きい数から小さい数を引いた値を入れていきます。



右がその一例です。

A	2	3	6	7	9
B	10	8	5	4	1
差	8	5	1	3	8

さてここで、3段目にある数の和を求めてください。右表では、

$$8+5+1+3+8=25$$

あなたの計算結果はどうでしょう。25になっていませんか。

不思議ですね。そしてこの25の正体はいったい何なのでしょう。

A	2	3	6	7	9
B	10	8	5	4	1
差	8	5	1	3	8

もう少し表を注意してみてみましょう。各列の大きい数から小さい数を引くわけですが、その「大きい方の数」の枠に色を塗ってください。その結果は、A 段またはB段がすべて塗られているか、そうでない場合は、B段では左から順に塗られ、ある列からは残りすべてはA段の枠が塗られていませんか。そして塗られている枠の数は、

6,7,8,9,10

ですね。この辺に秘密がありそうです。

まず、色の塗られ方ですが、A段は左から小さい数の順に並んでいて、B段は左から大きい数の順に並んでいるから左に進むうちにどこかでA段のとB段の数の大きさが逆転することは分かりますね。

ここで、Bの左端かAの右端のどちらかは10になりますが、Bの左端を10としましょう(Aの右端が10のときは、A段とB段を交換すればいいのです)。B段は右へ進むと数は小さくなり、B段の右端の数は1以上6以下の数に制限されます(B段で、値の減り方の最小であるものは10→9→8→7→6となる場合だからです)。同様にA段の右端の数は5以上9以下となります。

A段の右端が5のときは、

(A段)　1→2→3→4→5　　(B段)　10→9→8→7→6

となり、B段すべての枠に色が塗られます。A段の右端が5以外の数6,7,8,9のときは、B段の右端の数はA段の右端の数より小さくなりA段の右端の枠に色が塗られます。では、それはどんな数になるでしょう。

簡単です。B段の数が左から10→8と変化すると、A段の端はB段で飛ばされた9が配置されてその枠が塗られます。

B段の数の変化をみると、例えば10→8→5→…の順に小さくなれば、A段の右端からはB段で飛ばされた数9,7,6,…の順に配置されるのです(…　←6←7←9)。これから、A 段は右端から色が塗られ、B 段は左端から色が塗られ、どこかの列で色が塗られる段の境目ができることになります。ところが列の数は 5 列ですから、A 段または B 段から選ばれる大きい方の数は、6,7,8,9,10になってしまうのです。

A	6	7	8	9	10
B	1	2	3	4	5
差	5	5	5	5	5

したがって、例えばA段には6以上の数、B段には5以下の数を配置しても条件は保たれ、各段の大きさの順も適当でいいことになります。そこで右表のように並べてみると、各列の2数の差はすべて5になります。よって、その和は、

$$5\times5=25$$

となるのです。

この性質は数を1から2*n*にしても成立します。1〜*n*と*(n+1)*〜2*n*の2つのグループに分けたとき、求める和は、

(2つのグループの最小値の差)×(グループの個数)　で求められ、

$$(n+1-1)\times n=n^2$$

になります。

このことを用いるといろいろな問題や面白いパズルが作れそうですね。

Ex1) 次の数を同じ個数の2つのグループに分け、1段目は左から小さい順、2段目は左から大きい順に並べて3段目に各列の大きい数から小さい数を引いた値を入れます。3段目の数の和を求めなさい。

(1) 1から50までの数

1〜25と26〜50の2つのグループに分けると、(26−1)×25=625

(2) 12個の奇数 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23

1,3,5,7,9,11 と 13,15,17,19,21,23 のグループに分けると、(13−1)×6=72

Ex2) 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20の10個の偶数を5個ずつの2つのグループに分け、1段目は左から大きい順、2段目は左から小さい順に並べます。3段目は、各列の大きい数を小さい数で割った数を記入します。3段目の数の積を求めなさい。

$$\frac{6\times7\times8\times9\times10}{1\times2\times3\times4\times5}=252$$　(数が偶数のため必ず約分ができて規則性が見えなくなるのがポイントです)

バラバラなグループに分けられていても大小の比較をすることで、自然にオーダーができ、でもそのオーダーも最終的には均質化されてしまうわけで、なんとなくこの性質は自然界の有り様によく似ていますね。

72

………資産を運用する数

お金を 8%の複利で預けるとき、元金が 2 倍になるのは何年後になるか、すぐに分かりますか。
これを速算で求める資産運用(倍増)の法則といわれる関係式があります。

> r% の複利で n 後に資産が 2 倍になるとき、次の関係が成立する。
> $rn = 72$

これから、$8n = 72$ より、$n = 9$ 。9 年後に元金は 2 倍なります。72 という数が登場するこの関係式は「72 の法則」ともいわれ、金融界では有名な法則だそうです。その 72 を導出するには、元金を M とすると、

$$M\left(1+\frac{r}{100}\right)^n = 2M \quad \cdots\cdots(*)$$

これより、rn を求めればいいことになります。

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\left(\frac{r}{100}\right)^{n-k}$$

ここで、$\frac{r}{100}$ が小さな値とみなせば、

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\left(\frac{r}{100}\right)^k \fallingdotseq 1+{}_nC_1\frac{r}{100}+{}_nC_2\left(\frac{r}{100}\right)^2 \fallingdotseq 1+\frac{rn}{100}+\frac{1}{2}\left(\frac{rn}{100}\right)^2$$

すなわち、$\frac{1}{2}x^2+x-1=2 \quad \left(x=\frac{rn}{100}\right)$ と近似できます。$x^2+2x-2=0$ を解くと、

$x=-1\pm\sqrt{3} \quad x>0$ より、$x=-1+\sqrt{3} \fallingdotseq -1+1.732=0.732$

以上より、 $rn = 100\times 0.732 = 73.2$

72 ではなくちょっと微妙な値になっています。実は計算の過程には 3 回の近似が用いられており、その度に等式の精度は落ちているのです。そうであるなら 73.2 よりは 72 の方が約数も多いため暗算に適しているから、さらに近似してもいいじゃないか……、ということになったようです。大事な資金の運用計算なのに、随分いい加減な感じもします。

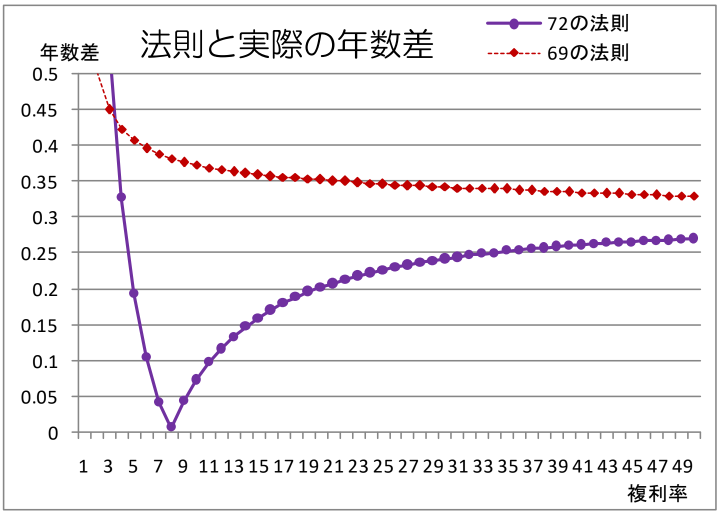
では、大仰に構えた「72 の法則」の精度はどの程度のものなのでしょう。
(*)の式からもう一度調べてみましょう。

$\log\left(1+\frac{r}{100}\right)^n = \log 2$ より、$n\log\left(1+\frac{r}{100}\right) = \log 2$

これから、$n = \dfrac{\log 2}{\log\left(1+\frac{r}{100}\right)} \quad \cdots(**)$

金利 r を変化させて、実際の年数との差の絶対値を求めてみたのが下表および右のグラフです。

グラフより $r = 7,8,9,10,11$ ではその誤差はあまりないことが分かります(特に 8% の利率はほぼ一致します)。しかし、それ以外の値では随分差が開いてしまうものもあります。$r = 100$ のときは、当然 1 年で 2 倍になりますが、72 の法則では 0.72。$r = 1$ のときは、実際は 69. 7 年なのに 72 の法則では 72 年。この 2 年の差は大きいのではないでしょうか。



複　利　率	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	15	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	100
実際の年数	69.661	35.003	23.45	17.673	14.207	11.896	10.245	9.006	8.043	7.273	6.642	4.959	3.802	3.106	2.642	2.31	2.06	1.865	1.71	1.475	1.306	1.179	1.08	1
法則の年数	72	36	24	18	14.4	12	10.286	9	8	7.2	6.545	4.8	3.6	2.88	2.4	2.057	1.8	1.6	1.44	1.2	1.029	0.9	0.8	0.72
差の絶対値	2.339	0.997	0.55	0.327	0.193	0.104	0.041	0.006	0.043	0.073	0.097	0.159	0.202	0.226	0.242	0.253	0.26	0.265	0.27	0.275	0.277	0.279	0.28	0.28

しかし、低金利の今の時代では、年利 $7 \leqq r \leqq 11$ など望めそうにもなく、「72 の法則」は時代遅れの感は否めません。
そこで、$x \fallingdotseq 0$ のときの近似式である $\log(1+x) \fallingdotseq x$ を用いて(**)をもう一度計算してみましょう。

$$\log\left(1+\frac{r}{100}\right) \fallingdotseq \frac{r}{100} \text{ より、} n = \frac{100\log 2}{r} \quad \text{これより、} nr = 100\log 2 = 69.3$$

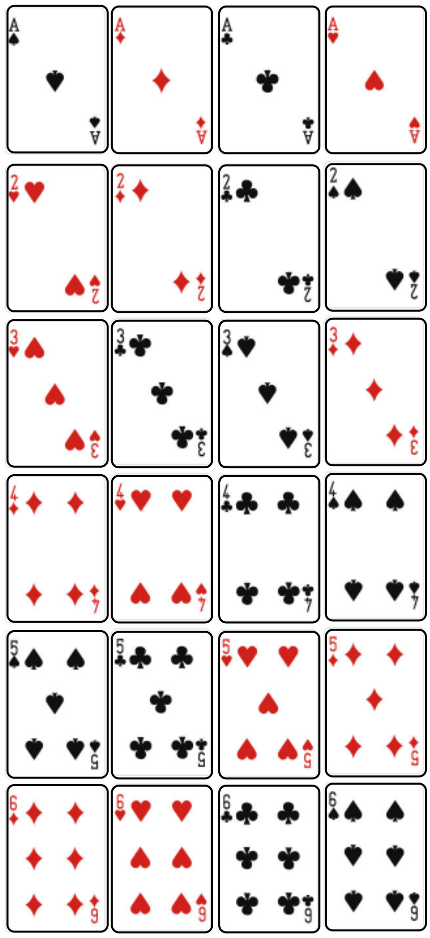
グラフをみると、「72 の法則」よりは全体としての精度は高くはないのですが、69.3 から得られる「69 の法則」は金利 5%以下ではたしかに有用です。これからの時代は「69 の法則」が金融界を席巻するかも…でも、ちょっとまってください。もともと 72 の法則は速算の必要性から生まれたものです。あなたの服のポケットやバッグの中には携帯やスマートフォンが入っていませんか。今は人差し指一本で簡単に正確な値を叩き出せる時代。72 や 69 の法則はすでにアナログ時代の産物なのかも知れません。

31

………勝敗を操作する数

久しぶりに娘とトランプに興じているＳ氏。1 ゲームが終わった時、とびっきりの笑顔で娘が話かけてきた。

「ねえ、お父さん、お願いがあるんだけど」。



なんだ、こいつ突然トランプやらないっていってきたのは魂胆があってのことだったのか。

「今月ちょっとお金使いすぎてしまったの。お小遣いの前借りできないかなあ」

最近親子の会話が少なくなり寂しさを感じていたＳ氏だったので娘からのゲームの誘いはちょっと嬉しかった。なのに下心あってのことと分かり可愛さ余って憎さ 2 倍程度。父親の表情から気持ちを察してか、

「じゃあ、ゲームで私が勝ったらお願いできない。ねえ、いいでしょう」

物事を勝敗だけで白黒つけようとする娘の安易な姿勢にまたカチンときたＳ氏。娘は多分お父さんが手心を加えてくれるだろうと思っているのだろう。

ここは世の中の厳しさをビシッと教えこまなければ。

Ｓ氏は不承不承ながら娘の挑戦を受けることにした。

「ゲームの内容は私に任せてね」

娘はテーブルの上に、ハート、ダイヤ、スペード、クラブの 1 から 6 までのカード 24 枚を並べた。

「お父さんと私が交互にカードを 1 枚ずつ取り、2 人が取ったカードの数を足していくの。合計が 31 になるカードを取ったほうが勝ち。先手はお父さんからでいいわ」

何仕切っているのだ。誰に似たやら。だいたいこれはゲームと呼ぶにはお粗末なもので先手が有利になるのは確かだ。こいつ本当にお父さんが手を抜いて負けてくれると思っているな。その甘ったれの性根を叩き直してやる。

Ｓ氏の頭の中が目まぐるしく回転しだした。最初の 1 枚が肝心だ。合計が 25 以上になっていると残り 1 回で 1 から 6 のカードのどれかを選べば合計 31 にできる。だから選んだカードで合計が 24 になっていれば、次にカードを選ぶ娘の勝利はなくなる。同様に考え、選ぶカードを遡って調べていけば、合計が 17,10 になるように 7 を減じたカードを選べばいい。ということは最初に選ぶカードは 3 ということだ。なんだほんとうに先手必勝じゃないか。

そこでＳ氏はまず 3 のカードを取った。娘は 3 のカードを選び和 6, 次にＳ氏が 4 を選んで和は目的の 10 なった。

この調子で続けていけばいい。娘 3 で和 13、Ｓ氏 4 で和 17、娘 4 で和 21、Ｓ氏 3 で和 24。ここでＳ氏は勝利を確信した。それにしてもまったく知恵を絞ろうとしない娘、誰に似たんだろう。ちょっと娘が不憫に思えてきた。

娘は、本人は知らないだろうけど敗北が確定する 1 枚を選ぶ。カードの数は 4。これで和が 28 か。さあ最後に 3 のカードを選んで終了だ。ハートの 3 は…ない。スペード・クラブ・ダイヤ…えっ、ええ!。どれもない。4 枚ともない。

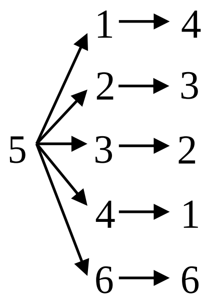
顔を上げると、娘のとびっきりの笑顔があった。こいつ、最初から和を 31 にしようなんて考えていなかったな。

和が 3,10,17,24 になるように私がカードを選ぶことを知っていて、3 のカードをすべて使い切ることが目的だったのか。主導権を握っていると信じこませるように主導権を握られ、カードの選び方まで支配されていたんだ。

	父	娘	父	娘	父	娘	父
カード	3	3	4	3	4	4	3
合　計	3	6	10	13	17	21	24

世の中の厳しさをビシッと娘に叩きこまれたＳ氏であった。

では先手必勝であるにはＳ氏はどのカードを選べばよかったのでしょう。



たとえば 5 のカードを選ぶとします。そのとき娘が 2 を選べば和は 7 になるのでＳ氏は 3 を選び和を 10 にします。以降は和が 17,24,31 になるよう相手のカードに合わせて選べばいいのです。同様に娘が選ぶカードが 1,3,4 のときは、Ｓ氏は和が 10 になるように選び、娘が 6 のカードを選んだら、和が 17 になるように選び、主導権を握ります。

では、娘が 5 を選んだ場合はどうすればいいでしょう。これで和は 10 になり娘に主導権が握られた形になります。そこでＳ氏はカード 5 を選び続けます。カード 5 が 4 枚選ばれれば娘はもう 5 を選ぶことができないので、娘はギブアップをするか、主導権はＳ氏に移ることになります。

(これがＳ氏に対して娘がとった戦法です)。

5→5→2→5→2→5→2

ではＳ氏が他の数字のカードを選んだ場合の勝敗はどうなるでしょうか。考えてみてください。

結局、今回の話題の数は 31 ではなかったわけです。1 から 6 のカードの数字に対して、その枚数より 1 つだけ多い数字 7 がゲームの背後で活躍しており、31 から 7 の倍数を引いた数のカードを先に手に入れた方が勝利の方程式を得ることができます。その駆け引きで 7 はラッキーナンバーにもアンラッキーナンバーにも変わってしまうのです。

144

……….鏡の世界の平方数

144 は 12 の平方数ですが、各位の数を並び替えた 441 もまた 21 の平方数です。このように平方数にはその各位の数を並び替えてもまたある数の平方数になっているものがあります。

$16^2 = 256 \Rightarrow 625 = 25^2$ $37^2 = 1369 \Rightarrow 1936 = 44^2$ $314^2 = 98596 \Rightarrow 99856 = 316^2$

しかし、これらの平方数の中でも 144 は面白い数の配置になっています。

$12^2 = 144 \Leftrightarrow 441 = 21^2$

お分かりでしょうか。12 と、12 の十の位と一の位を入れ替えた 21 は、その平方数の位の並びもまた同様に入れ替わっているのです。このような性質をもつ 2 桁の数はもう一つあります。

$13^2 = 169 \Leftrightarrow 961 = 31^2$

では、3 桁の数で、百、十、一の位の数をそれぞれ一、十、百の位と入れ替えた時、平方数も同様に入れ替わるような数はあるでしょうか。

3 桁の数を

$$M = 100x + 10y + z \quad (1 \leqq x, z \leqq 9,\ 0 \leqq y \leqq 9)$$

とします。このとき各位のを入れ替えた数は、

$$N = 100z + 10y + x \quad (1 \leqq x, z \leqq 9,\ 0 \leqq y \leqq 9)$$

平方数を求めると、

$$\begin{aligned} M^2 &= 10000x^2 + 2000xy + 100(y^2 + 2xz) + 20yz + z^2 \\ &= 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \qquad (1 \leqq a, e \leqq 9, 0 \leqq b, c, d \leqq 9) \end{aligned}$$

このとき対になる平方数は、

$$\begin{aligned} N^2 &= 10000z^2 + 2000yz + 100(y^2 + 2zx) + 20xy + x^2 \\ &= 10000e + 1000d + 100c + 10b + a \end{aligned}$$

と表すことができます。ここで a と e は、1 の位または最高位の数を表してしますが、4 から 9 までの平方数で 1 の位と 10 の位が等しいものはないことより、1 桁の数となります。さらに、$a = x^2, e = z^2$ より、a 、e は平方数ですから、1,4,9 のいずれかの数です。すなわち x, z は 1,2,3 のいずれかです。また、M^2 および N^2 の各位の数をみると、$2xy = b$ 、$y^2 + 2zx = c$ 、$2xz = d$ でなければならないことも分かります。

$0 \leqq 2xy \leqq 9$ より、$0 \leqq y \leqq \dfrac{9}{2x}$

$0 \leqq y^2 + 2zx \leqq 9$ より、$0 \leqq y^2 \leqq 9 - 2zx$

これから $y = 0,1,2$ となります。

また、$x = z$ の場合は M 、N は同じ数になるため、$x < z$ とすると、x, y, z の組は

$$(x, y, z) = (1,0,2), (1,1,2), (1,2,2), (1,0,3), (1,1,3), (1,2,3), (2,0,3), (2,1,3), (2,2,3)$$

この中に求める数があります。そこで実際に、平方を計算すると、

M	102	103	112	113	122
M²	10404	10609	12544	12769	14884

5 つの数が見つかりました。

同様に、もっと大きな数について調べてみると、4 桁は 18 個、5 桁は 41 個、6 桁は 102 個あります。

そして、これらの各位の数は 0,1,2,3 のいずれかであり、その 4 つの数字がすべて用いられることはありません(たぶん)。

6 桁の数を例として挙げましょう。

$$111211 = 12367886521 \Leftrightarrow 12568876321 = 112111$$

さて、この面白い性質の最初に登場する数が、$12^2 = 144$ と $21^2 = 441$ であったわけです。

その 144 と 441 は他にも面白いパフォーマンスを披露してくれます。

$$144 = (1 + 4 + 4) \times (1 \times 4 \times 4) = 12^2$$

$$441 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 21^2$$

さらに 12 と同じ性質をもつ $13^2 = 169$ 、$31^2 = 961$ も巻き込んで、

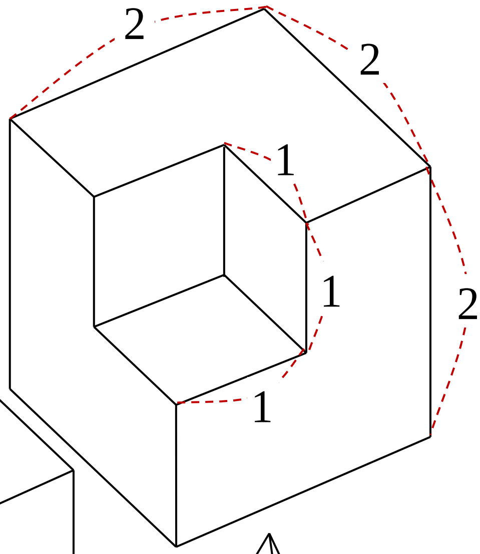
$$\frac{13 \times 10^2 - 31}{9} = 141 \qquad \frac{13 \times 10^3 - 31}{9} = 1441 \qquad \frac{13 \times 10^4 - 31}{9} = 14441 \qquad \frac{13 \times 10^{13} - 31}{9} = 14444444444441$$

左辺の分子の値が $1299999 \cdots 9999969$ と表されることがこのパフォーマンスを演出しており、数 1 と 4 の対称に配置される規則性は無限に続いていくのです。

このように数 12 は、数とその平方数がまるで鏡を立てたときにお互いに鏡像としてみえる性質をもち、144 の振る舞いは、まるでその予告編を演じているようにも思えるのです。

$\dfrac{26}{3}$

………安定視点を好む数



右図の立体の体積を求めてください。

図の立体は、「1 辺の長さが 2 の立方体から、1 辺の長さが 1 の立方体をくり抜いた図形」ですから、その体積V は、

$$V = 2^3 - 1^3 = 7$$

となりそうです。でも本当にそうでしょうか。もう一度、よ～く、図をみてください。

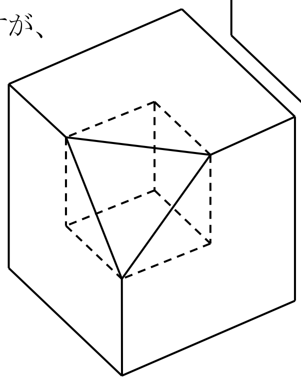
気が付きましたか。実はこの図は次のようにも見えるのです。

1 辺の長さ 2 の立方体の 1 つのカドに 1 辺の長さ 1 の立方体をめり込ませた図形

小さな立方体が目の前に飛び出してきましたか。

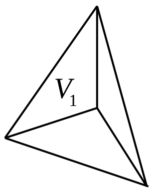
では、この場合の体積を求めてみましょう。

大きい立方体と小さい立方体が共有する面は正三角形になりますが、この正三角形の面に沿って 2 つの立方体を切り離してみます。



そうすると大きい立方体は、右図のようにカドを切り落とした立体になりますが、切り落としたカドは三角錐で体積V_1 は、

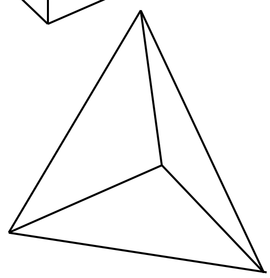
$$V_1 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1 = \frac{1}{6}$$



で与えられます。これより、

$$V = 2^3 - V_1 + 1^3 - V_1 = \frac{26}{3}$$

となります。



この問題は、人間の視覚認知は如何にあやふやであるかを教えてくれます。

さきほど切り抜いたカドの図形である右図のV_1 についても、もう一度よく見て下さい。

この図形はあなたの目にはどのように映っていますか。

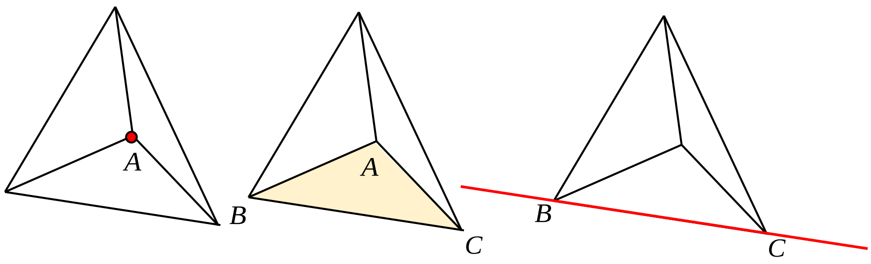
点線で表現されている辺はないので、この図形の 3 つの面はすべて見えていることになりますが、あなたの視線はそれを 2 つの視点で捉えているはずです。

「視線が頂点 A にあるならば、あなたは三角錐を上から見下ろす鳥瞰的な視点で図形を捉えています。」

「視線が三角形 ABC にあるならば、あなたは三角錐の面を下から見上げる俯瞰的な視点で図形を捉えています。」

ほとんどの人の視点はこの 2 つかと思いますが、さらに、次のように見ることもできます。

「視線が辺 BC にあるならば、あなたは辺 BC が床にある不安定な状態の三角錐を横から見る虫瞰的な視点で図形を捉えています。」



たぶん、この3つめの視点を意識して見ようとする人はいないと思います。それは人の視点は「安定を好む」からなのです。人は意識の中で、図形が理想の配置になるように再構築しているのでしょう(実はさらにもうひとつの視点がありますが分かりますか)。

さて、この不安定な視点ということでいえば、先ほどの立方体についても、もう一つの見え方があります。分かるでしょうか。

目を凝らすというより、視線をおぼろげにしてみると

「天井の隅に張り付いている立方体」

が浮かんでくるはずです。まだ見えませんか。よほどあなたの目は不安定である状態を拒否しているんですね。そういう人はこのページを逆さまにしてみてください。どうです、安定した図形が見えてきましたね。

そして、この場合の立体の体積は 1 になります。

ところで、このような立体の見え方は、大きい立方体と小さい立方体がそれぞれどう捉えているかに依ります。

大きい立方体は出っ張り、小さい立方体は引っ込む

大きい立方体は出っ張り、小さい立方体は出っ張る

大きい立方体は引っ込み、小さい立方体は出っ張る

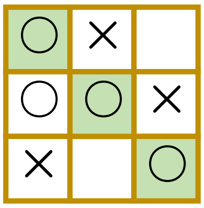
そう捉えることで、視点の切り替えスイッチが入り、3 つの図形が見えてくるのです。

では、スイッチを

大きい立体は引っ込み、小さい立体は引っ込む

とするとどうなるでしょう……、これはまだ人が認知することのできない進化の視点なのでしょうか。

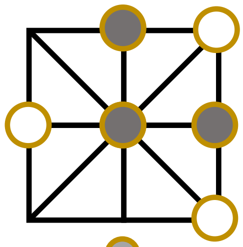
3



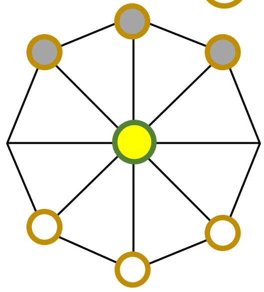
小さい頃、3 目並べ(Tic Tac Toe)にハマった人は多いことでしょう。
ルールは、図のような 3×3 の 9 つのマス目がある盤にプレイヤーである 2 人が〇と×を交互に書き込みます。最初に、縦横斜めのいずれかに自分が書く記号(〇,×)を書き並べた方が勝者になります。
このゲームは盤など用意しなくても紙と鉛筆(あるいは地面と棒)があればいつでもできます。さらに先攻と後攻が書く〇×の数は最大でそれぞれ 5 手、4 手ですから勝敗までに要する時間は 1 分足らずであり、手軽にできるゲームとして昔から世界中で遊ばれています。

イギリスのモリス、フィリピンのタパタン、ケニアのシシマ、中国の三子棋などがそうですが、面白いことに「一直線上にコマを並べると勝ち」とすることは、それぞれの国が独自に考案したルールなのです。このゲームの最古のものは、古代エジプト時代のボードゲーム「ナインメンズモリス」といわれ、「真夏の夜の夢」(シェークスピア)の第二幕第二場にも登場します。

【タパタンの遊び方】
2 人がそれぞれ 3 つのコマを持ち、順に好きな格子点に置く。
置き終えたら、順に自分のコマを線で結ばれた隣の格子点に動かす。ただし、すでにコマのある格子点には動かせない。
自分のコマを先に一直線上に並べた方を勝ちとする。



【シシマの遊び方】
2 人が〇か●のコマを決め、図のように置く。2 人が順に、コマを線に沿って空いている点に動かす。中央のシシマにも動かすことはできるがすでにコマのある点には動かせない。
自分のコマを先に一直線上に並べた方を勝ちとする。



さてゲームの勝敗は、先攻と後攻どちらが有利であるかは気になるところですが、置ける最大コマ数から先手が有利であることは明らかです。では後攻は不利かというとそうでもないのです。このゲームは、先攻と後攻が「最善の置き方」に従いゲームを進めると、、常に引き分けに持ち込めることが知られています。
その「最善の置き方」は次のとおりです。

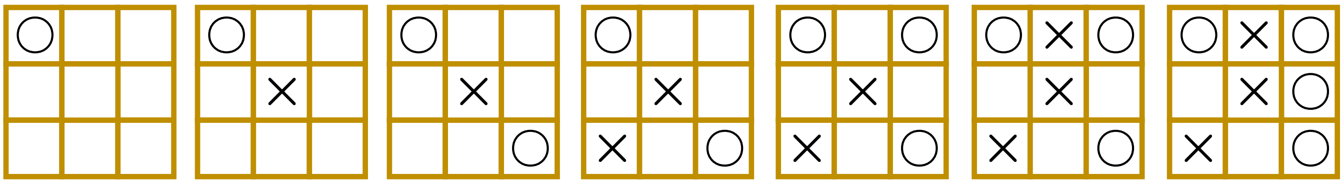
①2 つ並んでいれば、3 つめのマスに置く。

②相手が 2 つ並んでいれば、その 3 つめのマスに置く。

③ 2 段目の中央のマスに置く。

④隅のマスに置く。

①は勝つために攻めること、②は負けないために守ることであり、当たり前のことです。③、④のマス目が確保できるどうかが勝敗の鍵を握りますが、「最善の置き方」で攻め凌ぎ合いを進めると 9 つのマスがすべて埋まり引き分けになるのです。ただこれはあくまで双方が「最善の置き方」をした場合です。先攻が③ではなく④を置き、後攻が「最善の置き方」をすると、先手が勝ってしまうこともあります。ただその場合も、後攻は「注意深く最善の置き方」をすると引き分けに持ち込めます。

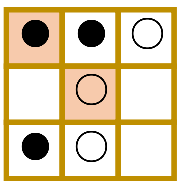


このように三目並べは引き分けになる確率が高いため、1 回のゲームで勝敗が決まることは稀です。「最善の置き方」を心がけゲームの回数を重ね、集中力が切れてどちらがミスを犯すときに決着がつくのです。お手軽ではあるけど持久戦ゲームでもあるのです。そこで、三目並べの改良ゲームも作成されています。例えば、三目並べのルールを次のように変更します。

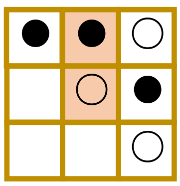
2 人がそれぞれ 3 つの〇と●をもち、三目並べの要領に交互に並べます。3 つとも並べて勝敗が着かない場合は、交互に盤上に置かれた〇と●を空いている上下、左右のマスに移動させ、一直線上に並べた方を勝ちとする。

この三目並べをオヴィディウスのゲームといいます。日本では「みつならべ」として知られており、タパタン、シシマは盤を改良したものであり、さらにルールを複雑にし難易度を高くしたものがナインメンズモリスなのです。そして、このオヴィディウスのゲームは、先攻〇の第 1 手を、盤上の 2 段目中央におくことで先手必勝になります。後攻●の第 1 手は、上段の左隅か上段の中央として考えると、先攻の第 2 手の置き方で右番の配置になるように後攻の手を操作することが可能になります。〇と●が 3 個ずつ右図のように置かれた後は、上下と左右にコマを 1 マス移動し、ゲームを進めますが、先攻〇は残り 2 手で勝つことができます。

後攻 1 手め
上段の左隅



後攻 1 手め
上段の中央



このゲームは、最初の〇●の 3 つずつの置き方についてもルールが必要なのです。
1983 年公開の映画「WarGames」(米)は、大きな話題となりました。仮想空間での世界戦争シミュレートゲームが、パソコンの暴走により現実の核戦争の危機を引き起こしそうになるという内容でしたが、そのラストで、クラッカーである主人公は米ソのコンピュータにアクセスし、三目並べのゲームを組み込みます。対戦を始めた両国のコンピュータシステムは、「最善の置き方」で応酬し、引き分けを繰り返すうちにやがて「勝者はいない」ことを学ぶのです。
数 3 は、社会を作る数と言われます。夫婦 2 人に生まれる一粒種は家族を平和にします。2 人の後の 3 人目の子どもの誕生は、こどもたち 3 人の情緒と生活を安定させます。3 本足の椅子がガタつくことなく床に固定されるように、三位一体を表す数 3 は、いつでも最善の方法を模索し選択しているのです。

7

日	月	火	水	木	金	土
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

毎月 22 日は何の日か知っていますか。

正解は、「ショートケーキの日」。ショートケーキが日本で初めて売られた記念日かというとそうではありません。カレンダーで 22 日の上(前週の同じ曜日)に位置するのは 15 日。だから「イチゴが上に載っている日」なのだそうで、ケーキ屋さんが考えたちょっとしたウィットある美味しい日なのです。

カレンダーの日にちは週 7 日を 1 行として配置されるため、曜日を表す各列の中の日にちは、公差 7 の等差数列になります。

この性質を用いた簡単なカレンダー・マジックを紹介しましょう。

> カレンダーのある月から、縦 3 列、横 3 行を選びます。選んだ正方形の中には 9 つの日にちがありますが、その和を 9 つの中から一番小さい日にちだけを知ることで求めることができるでしょうか。

日	月	火	水	木	金	土
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

8	9	10
15	16	17
22	23	24

⇒

-8	-7	-6
-1	0	1
6	7	8

例えば、右図の正方形を選ぶときの和はどうなるでしょう。すべてを足さなくとも、最小数である 8 をみるだけで瞬時に 144 になることを知ることができるのです。まず正方形内の中央にある日にち 16 に注目します。この日数を 9 つの日にちから引いてみましょう。数の配置のしくみがみえてきます。正方形内の日にちの和が 0 になることが簡単に分かるでしょう。ということは、もともとの日にちの和は、減じた 16 日の 9 つ分ですから $9\times16=144$ になります。では、中央の数 16 と一番小さい日にち 8 との関係はどうなっているのでしょうか。16 日は、8 日を 1 日進め、その 1 週間後ですから、$8+1+7=16$

すなわち、一番小さい日にちに対して中央にある日にちは 8 を加えたものということになります。以上のことから、「最小数に 8 を加え 9 倍」を計算することで和が簡単に求められるのです。例えば、一番小さな日にちが 3 日であれば、作られる正方形内の日にちの和は、$(3+8)\times9=99$ となります。

次に、この原理を用いてもう少し複雑なマジックを考えてみましょう。

> カレンダーのある月の日にちを、縦 4 列、横 4 行になるように囲み 16 個選びます。一番上の行の中から適当な日にちを選び、その日にちと同じ行(週)と同じ列(曜日)にある日にちすべてに×をつけます。次に 2 行目の週では、×のついていない日にちを選び、同様に、同じ行と列にある日にちに×をつけます。3 行目、4 行目についても同じルールで日にちを選びます。結局、各週から 4 つの日にちを選んだことになりますが、この 4 つの数の総和を最初に囲んだ 16 個の日にちを見るだけで瞬時に求めることができるでしょうか。

各週の日にちはどう選ばれるか分からないわけですからその和を予測することは難しいように思われます。そこで実際に下図のように選んでみましょう。この場合、8 日、13 日、23 日、28 日の順に選ぶので、和は、$8+13+23+28=72$ となります。

さて、一見するとバラバラに日にちを選んでいるような見えたのが、書き抜いてみると、同じ行と同じ列を消すことにより、実は各週から選ばれる曜日はみな異なっていることが分かります。

~~6~~	~~7~~	8	~~9~~
13	14	~~15~~	16
20	21	~~22~~	23
27	28	~~29~~	30

⇒

~~6~~	~~7~~	8	~~9~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~
~~20~~	21	~~22~~	23
~~27~~	28	~~29~~	30

⇒

~~6~~	~~7~~	8	~~9~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23
~~27~~	28	~~29~~	~~30~~

⇒

~~6~~	~~7~~	8	~~9~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23
~~27~~	28	~~29~~	~~30~~

6	7	8	9
6	7	8	9
6	7	8	9
6	7	8	9

その関係を見やすくするために、2 行目、3 行目、4 行目の各週の日にちから、それぞれ 7,14,21 を減じてみましょう。右図のように、各週の日にちはすべて 1 週目と同じになり、和は、各週からどのように日にちを選んでも必ず $6+7+8+9=30$ になることが理解できます。これに先ほど減じた日数の和、$7+14+21=42$ を加えればいいわけですが、これでは直接選んだ 4 つの数を足した方が計算は速いわけで、瞬時というわけにはいきませんね。でもよく考えてください。各週からどのように日にちを選んでもいいのであれば、正方形の左上の隅から右下の隅の対角線方向に選んでもいいのです。このとき、ある週の翌週の日にちは、1 日進め、さらに 1 週進めた位置にあることより 8 を加えた日にちになります。これから、対角線上に並ぶ数は、公差 8 の等差数列になり、その和は

「対角線の両端にある最小数と最大数を加えたものの 2 倍」

になります。すなわち、$(6+30)\times2=72$。これででたらめに選ばれているように思える和が瞬時に求められるのです。

1 年 365 日は、7 で割ると、$365=7\times52+1$ であり、52 週と 1 日分になります。7 で割り切れればすっきりするように思えますが、そうすると毎年元旦は同じ曜日になってしまい、何か 1 年間がマンネリ化してしまいそうです。1 日分ずれるからこそ曜日の変化を楽しめ、一年の計は元旦にありと決意し、新年に気持ちを新たにすることができるのかもしれません。数 7 は、人間の背中をほんのちょっと押してくれているようです。

216

……フェルマーに愛されなかった数

216は6の立方数ですがこれといって面白い性質はないように思えます。でも

$6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$

と連続する整数の立方数の和として分解できる凄い奴なのです。

同じような関係は$5^2 = 4^2 + 3^2$にみることができますが、連続した整数x, y, z, wで、$x^n + y^n + z^n = w^n$ と分解できるは 216 だけなのです。このように、ある数のn乗が幾つかのn乗した整数の和になる性質としてはピュタゴラスの定理があります。

ピュタゴラスの定理を満たす3つの整数の組は、奇数$2k-1$を平方した数を連続する2整数に分ける方法が有名です。

$$(2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = (2k^2 - 2k) + (2k^2 - 2k + 1) \quad \Rightarrow \quad (2k-1)^2 + (2k^2 - 2k)^2 = (2k^2 - 2k + 1)^2$$

たとえば、$5^2 = 25 = 12 + 13$より、$5^2 + 12^2 = 13^2$。さらに、$3^2 = 9 = 4 + 5$であることより、$13^2 = 12^2 + 5^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2$ 3 つの平方数の和として表すことも可能です。一般に、円$x^2 + y^2 = 1$と直線$y = mx - 1$の交点のx, y座標は有理数であることより、ピュタゴラスの定理を満たす3整数x, y, z(ピュタゴラス数)は、

$$x = 2m\ ,\ y = m^2 - 1\ ,\ z = m^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad (2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$$

となります。この関係を3次元としてみると、球と直線の交点を求めることにより、$x^2 + y^2 + z^2 = w^2$を満たす整数の組は、

$$x = 2s\ ,\ y = 2t\ ,\ z = s^2 + t^2 - 1\ ,\ w = s^2 + t^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad (2s)^2 + (2t)^2 + (s^2 + t^2 - 1)^2 = (s^2 + t^2 + 1)^2$$

3次元ピュタゴラス数が得られます。例えば、

$s = 2, t = 3$ のとき、$4^2 + 6^2 + 12^2 = 14^2$ より $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$s = 2, t = 5$ のとき、$4^2 + 10^2 + 28^2 = 30^2$ より $2^2 + 5^2 + 14^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2 = 15^2$

4つの平方数の和も表現できますが、実は、曲線と直線の交点から有理数解を得る方法は、n次元に対しても有用です。

$$x_1 = 2s_1,\ x_2 = 2s_2,\ x_3 = 2s_3,\ \cdots, x_{n-1} = 2s_{n-1},\ x_n = {s_1}^2 + {s_2}^2 + \cdots + s_{n-1}^2 - 1,\ x_{n+1} = {s_1}^2 + {s_2}^2 + \cdots + s_{n-1}^2 + 1$$

とすると、

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x_{n+1}^2$$

が成立し、n次元ピュタゴラス数$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}$が得られます。例えば、

$s_1 = 1,\ s_2 = 2,\ s_3 = 3,\ s_4 = 5$ のとき、 $2^2 + 4^2 + 6^2 + 10^2 + 38^2 = 40^2$ より、 $1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 19^2 = 20^2$

$s_1 = 1,\ s_2 = 2,\ s_3 = 3,\ s_4 = 4,\ s_5 = 5,\ s_6 = 6,\ s_7 = 7$ のとき、$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 45^2 = 46^2$

それでは、3乗数を3つの3乗数の和で表現するにはどうすればいいでしょう。次の関係式を用います。

$$x(x-2y)^3 + y(2x-y)^3 + y(x+y)^3 = x(x+y)^3$$

この式で、x, y自体を3乗数とすればよいのです。

例えば、$x = 3^3,\ y = 1^3$として代入すると、

$3^3 \times 25^3 + 1^3 \times 53^3 + 1^3 \times 28^3 = 3^3 \times 28^3$ より、$28^3 + 53^3 + 75^3 = 84^3$

また、$x = 2^3,\ y = 1^3$とすると、

$2^3 \times 6^3 + 1^3 \times 15^3 + 1^3 \times 9^3 = 2^3 \times 9^3$より、$12^3 + 15^3 + 9^3 = 18^3$。ここで両辺を$3^3$で割ると、

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

数216の美しい関係式が得られました。では次の関係式を満たす整数の組はあると思いますか。

$$x^3 + y^3 = z^3 \quad \cdots ① \qquad x^4 + y^4 + z^4 = w^4 \quad \cdots ② \qquad v^5 + w^5 + x^5 + y^5 = z^5 \quad \cdots ③$$

②はその存在はまだ証明されてはいません。①はスイスの数学者オイラー(Leonhard Euler)が存在しないことを証明しました。オイラーは①を拡張し、n乗数は、$(n-1)$個のn乗数の和として表せないことを予想しました。しかし、近年、③は、

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

がコンピュータ計算により見つけられています。しかし、②についてはまだ解決されてはいないのです(4 つの 4 乗数で表される唯一の4乗数は、$353^4 = 30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4$が見つけられています)。

ところで、オイラーが存在しないことを証明した①は、オイラーより100年前のフランスの数学者フェルマー(Pierre de Fermat)の次の予想に端を発しています。

「3以上の自然数nに対して、$x^n + y^n = z^n$を満たす、自然数の組(x, y, z)は存在しない」

フェルマーは、この証明に関して

「私は真に驚くべき証明を見つけたが、この余白はそれを記すには狭すぎる」

と遺稿の蔵書に書いています。定理の単純さとフェルマーの挑発とも思える書き置きは、数世紀にわたり、「フェルマーの最終定理」として、数学者の心を魅了し続けました。そして、ついに、360年後の1995年、イギリスのワイルズ(Andrew John Wiles)により、「フェルマー・ワイルズの定理」として予想が正しかったことが証明されたのです。そのことは、同時に整数の組の存在を信じたアマチュア数学者の淡い夢が潰えた瞬間でもあります。

立方数 216 のもつ性質は、フェルマー予想のひとつの過程の中で導かれたものですが、フェルマーの非存在の整数組に対して、その存在は美しいものです。「確かにここにいるよ」。私達にまだ信じることの希望を残してくれているのです。

18

……… 復元を繰り返す数

　18 の約数 1,2,3,6,9,18 の積は、

$$1\times2\times3\times6\times9\times18=18^3$$

ここで、

$$18^3=5832$$

ですが、各位の数の和を求めると、

$$5+8+3+2=18$$

18 に戻ってしまいます。18 は過剰数でその約数が多いことがこんな演出をしているのでしょうか。
18 の累乗で、同じように 18 に戻ってしまうものがないか調べてみましょう。
まず、18 の 5 乗です。

$$18^5=1889568$$

桁の中に 18 がちょっと顔を出します。ここでは和でなく各位の数の積を求めてみます。

$$1\times8\times8\times9\times5\times6\times8=138240$$

そして各位の数の和を計算すると、

$$1+3+8+2+4+0=18$$

18 に戻ることができました。6 乗はどうでしょうか。

$$18^6=34012224$$

今度は、各位の数の和を求めてみます。

$$3+4+1+2+2+2+4=18$$

簡単に 18 に戻りました。7 乗についても、

$$18^7=612220032$$

各位の数の和は、

$$6+1+2+2+2+0+0+3+2=18$$

　このように、18 の累乗で、3 乗、6 乗、7 乗は各位の和が元の数 18 に一致しますが、このように「累乗した各位の数の和が元の数に等しい」性質を有する数はそれほど多いわけではありません。1 を除けば、

3 乗 $\Rightarrow$ 8,17,18,26,27　　4 乗 $\Rightarrow$ 7,22,25,28,36　　5 乗 $\Rightarrow$ 28,35,36,46　　6 乗 $\Rightarrow$ 18,45,54,64

僅かな個数であり、その中では 18 のように 3 乗、6 乗,7 乗で 3 回も顔を出すのは稀なのです。
　さて、ここまできたら、8 乗も計算してみましょう。

$$18^8=11019960576$$

各位の数の和は、

$$1+1+1+9+9+6+5+7+6=45$$

随分大きな値になってしまいました。さすがにこれを 18 にするにはちょっと厳しそう。では、0 を除く各位の数の積はというと、

$$1\times1\times1\times9\times9\times6\times5\times7\times6=102060$$

これを先ほどの各位の数の和 45 で割ると、$102060\div45=2268$
2268 の各位の和は、$2+2+6+8=18$
これはいくらなんでもこじつけでしょうか。
9 乗はというと、

$$18^9=198359290368$$

各位の数の和は、

$$1+9+8+3+5+9+2+9+3+6+8=63$$

63 の各位の数の積は 18 ですね。もうそろそろ終わりにしましょう。最後は 10 乗。

$$18^{10}=3570467226624$$

0 を除く各位の数の積を求めると、

$$3\times5\times7\times4\times6\times7\times2\times2\times6\times6\times2\times4=20321280$$

さらに、積の値の各位の数の和は、

$$2+0+3+2+1+2+8+0=18$$

　これでお終い…といいたいところですが、4 乗を飛ばしていましたね。

$$18^4=104976$$

　どうすれば 18 に戻るでしょうか。(各位の数の和の積と各位の積を考えてみてください)。でも 4 乗の場合は 18 に戻すことなどどうでもよくなるような不思議な性質があるのです。この各位の数の並びをみて何か気が付きませんか。18 の 3 乗の値、

$$18^3=5832$$

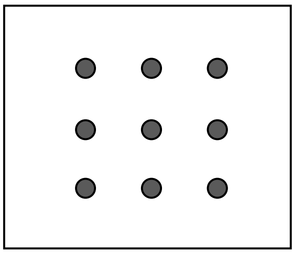
と比較してみると、凄いことが起きているのが分かるでしょうか。なんと 3 乗と 4 乗の各位の数をみると、0 から 9 までの 10 個の整数がただ 1 回だけ現れているのです。こうなると、もうこじつけや偶然と言えるでしょうか。神様のちょっとした悪戯としか思えないのです。

10

………思い込みから数学に導く数

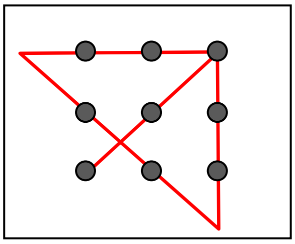
数10には多くの性質がありますが、今回の話題はその性質とはまったく関係なく、あるパズルの条件が10になるというだけです。人間社会を10進法で取り仕切っている数10には甚だ失礼な話なのですが……。

そこで問題です。



> 紙の上にある9つの点を連続した折れ線で結ぶとき、少なくとも何本の直線が必要でしょうか。

有名なパズル問題ですから、挑戦したことがある人も多いことでしょう。パズルを一筆書きの問題とみると、4隅の4点は、縦横斜めの3本の直線の交点のため、奇点は4つあります。オイラーの一筆書きの定理(奇点の個数は 0,2 のときだけ一筆書きは可能)より、一筆書きは不可能であることが分かります。したがってパズルを解決するには柔らかな発想が要求されるのです(それゆえにパズルなのですが)。



では、解答を示しましょう。図のように折れ線の傘をつくると4本の直線で結べます。

パズルを解決できなかった人の多くは、結ぶ線分を9点で作られる正方形の周および内部に限定してしまったのではないでしょうか。9 つの点をみる目は、無意識に点を結び、正方形の枠を補っていまうのです。しかし、問題のどこにもそんな制限などありません。図形から直線をはみ出すことにより、奇点の数は 2 個になり、一筆書きが可能になるわけです。これから、必要な線分の本数は 4 本というのがこのパズルの一般的な解答です。解答に続き感想として「思考に思い込みという制限を設けないようにする」とコメントしているものも多いようです。でも、思い込みは、「正方形の枠に限定する」という制限だけなのでしょうか。

実は、まだ多くの思い込みがあるのです。幾つか挙げてみましょう。

◯紙の上の点は大きさがないとはいっていない。半径のある円●としてみれば直線が円の内部の通り方により3本で可能。

◯線に幅がないとはいっていない。9点を含むような太い線■を引けば1本で可能

◯紙を切ったらダメとはいっていない。横に3分割にして切り、紙をつなぐと1本で可能。

◯紙が平面上に置かれているとはいっていない。地球上にあるなら、各列の3点を経度線上に並べる。そうして、1列目を含む直線を、紙をはみ出して北極点まで結ぶ。次に北極点から 2 列目を含む直線を南極点まで結び、さらに南極点から 3 列目を含むように結ぶと3本で可能。

◯紙を巻いたらだめとはいっていない。円柱に張り、1本の糸をらせん状に巻きつけその上に9点を置けば、1本で可能。

◯紙を折ったらダメとはいっていない。1列目と3列目が2列目に重なるように紙を折れば1本で可能。

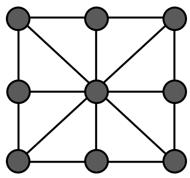
◯直線が紙の上にあるとはいっていない。9 つの点をマス目の中央になるように、紙を 9 つにたたみ、紙に垂直に直線を通せば1本で可能。

◯直線が等間隔に並んでいるとはいっていない。2列目が1列、3列めと平行でないなら、1列目と2列目、2列目と3列目を通る直線は交わるので、3本で可能。

まだこれ以外にも、リミッターの掛かっている部分があるかも知れません。考えてみてください。

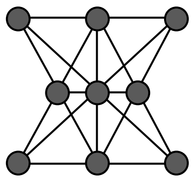
しかし、これらの解答は、点、直線、平面の定義およびその解釈を緩めたことによるものであり、「数学的」であるとはいえないでしょう。点は大きさ・面積はないもの、線は太さのないものですから、本当はユークリッド幾何学での平面や直線で問題を考えるべきなのです。そうすると上述の解答で認められるものはどれでしょうか。

そこで、この問題を「数学の問題」としてアレンジしてみましょう。



> 右図の9点は、3点を含む直線を8本用いて結んでいます。点を適当に動かすことで、直線を10本用いて結んでください。

(解答)

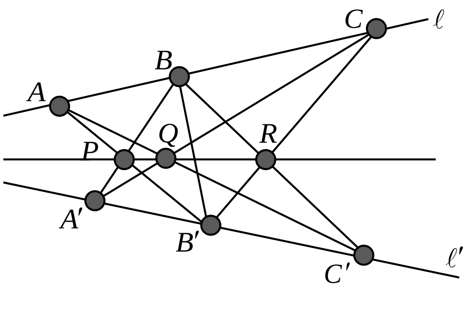


1行目の各点と3行目の各点の交点を通るように、2行目の点を移動させると、右図のように、10本の直線を引くことができます。ただ、この点の配置で2行目の3つの交点は一直線上に並んでいるかということは、疑問ですね。このことを保証しているのは「中線連結定理」であることは明らかです。

では、これ以外の解はないのでしょか。

アレキサンドリアのパップスの知恵を借りてみましょう。

> 2直線ℓ, ℓ' 上の3点をそれぞれ$A,B,C;A',B',C'$とする。
> 線分AB'と$A'B$, BC'と$B'C$, AC'と$A'C$との交点を
> それぞれP,Q,Rとするとき,この3点は一直線上にある。



定理の証明は、メネラウスの定理の逆を用いて容易に得られます。パップスの定理により点を配置し、ℓ 上の点 B を点 Q が線分 BB' 上にあるように動かすとパズルの一般解が得られます。

今の時代でも頭を悩ませるこのパズルは、パップスが活躍した4世紀の頃には数学の問題として既に解決されていたのです。数学って凄い学問ですね。

145

……‥ロンリーナンバー

145 は、$1^2+12^2=8^2+9^2=145$ であり、2 通りの平方数の和として表される数です。また、$145=3^4+4^3$ も面白い性質かもしれません。しかし 145 の特筆すべき性質は、

$$145=1!+4!+5!$$

お分かりでしょうか。145 は、それ自身が各位の数の階乗の和として表されるのです。
このような性質の数をファクトリオン(factorion)といいます。
$n!$ は、自然数 1～n の積を表しますが、その値は

$$10!=3628800$$

10 に対してびっくりするような大きな値になるため！マークを記号にしたようで、！はファクトリアル(factorial)と読みます。日本語では、n から順に 1 ずつ階段状に減じて乗ずることから階乗といいますが、階乗の値を縦に並べてみると、階段状に配置されるとみてもいいでしょう。ファクトリアルは「ひゃくとおりある」と洒落て読むこともあります。

$1!=1$
$2!=2$
$3!=6$
$4!=24$
$5!=120$
$6!=720$
$7!=5040$
$8!=40320$
$9!=362880$
$10!=3628800$

これだけ大きく膨張する階乗の値ですから、実際の数値で示すことは難しいため、近似値で表現することがあります。オイラーと同世代であるスコットランドのスターリング(James Stirling)が考案したスターリングの公式(近似式)を紹介しましょう。

$$n!\fallingdotseq\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

証明は、両辺に自然対数をとった $\log n!=n(\log n-1)$ の左辺を積分により面積計算することで求められます。
しかし、この近似は n が大きくなると誤差も開き、精度としては高いものではありません。
そこで、スターリングの公式を、ウォリスの公式

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n n!)^4}{(2n+1)((2n!))^2}$$

を用いることで、次のように改良します。

$$n!\fallingdotseq\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

この近似公式は、n が大きくなればより精度が高くなり、$n=100$ のときは、実際の数値との比の値は 0.999 であり、ほぼ実際のの値と一致するのです。そしてこれらの公式をみると、ウォリスの公式からは、円周率 π は階乗数により近似できることが分かり、さらにネイピア数 e は、

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

で得られるのです。
円周率 π 、ネイピア数 e のような超越数を表現できる階乗ですが、それでは、各桁の階乗の和として表されるファクトリオンはどれだけ存在するのでしょうか。
$1!=1,\ 2!=2$ ですから、この 2 数はファクトリオンですが、自明過ぎて価値のないものです。では 1,2 と 145 以外のファクトリオンはどれだけあるかというと、

$$40585=4!+0!+5!+8!+5!$$

唯一これだけなのです。数 145 は、1964 年に R.ドハーティがコンピュータ計算の検索により、見つけた最大のファクトリオンであり、これ以外には存在しないことも証明されています。
$(n+1)$ 桁の数 A を、

$$A=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+a_{n-2}\times10^{n-2}+\cdots+a_1\times10+a_0 \qquad 0\leqq a_i\leqq9,\ \ a_n\neq0$$

とします。

$$10^n\leqq a_n\times10^n\leqq A=a_n!+a_{n-1}!+\cdots+a_1!+a_0!\leqq9!(n+1)$$

ここで、$9!=362880$ であることより、

$10^n\leqq362880(n+1)$ 。これを解くと、$n\leqq6$ 。

7 桁を超えるファクトリオンは存在しないわけで、ドハーティが計算した 40 年前に比べ、いまでは、7 桁程度の演算であれば Excel の VBA では数秒で計算でき、40585 だけの出力をみることができます。ちなみに、同様に VBA を用いると、ファクトリオンより 1 不足する数は、

$$1466=(1!+4!+6!+6!)+1 \qquad 81368=(8!+1!+3!+6!+8!)+1$$

ファクトリオンより 1 過剰な数は、

$$372973=3!+7!+2!+9!+7!+3!-1$$

であることも簡単に求められます。
このようにファクトリオンに近い数もほとんど存在しないのです。超越数を表現したり、素数階乗では素数が無限個あることを証明したりと、多くの活躍の場を見出す階乗なのですが、自身を表すことは難しく、自己にも厳しい孤高の数なのです。

11

男 A,B,C の 3 人と、女 W の 1 人が、2 人乗りのボートを借りて向島に渡ることにした。ボートを操縦できるのは A だけである。A は W に想いを寄せているので、W を B や C とは絶対に 2 人にしたくない。A はどのような順番で 3 人を運べばいいだろうか。

当然、最初にボートに乗せるのは W であり、A はボートの中でより 2 人の距離を縮めようとするでしょう。島に到着したら、一人で岸まで戻り、折り返し B を乗せて運びます。島についたら、一人で戻ってしまうと B と W が一緒にいる時間ができるため、二人を離すため、W に「途中でイルカの群れが泳いでいたよ。見てみない。」とでもいって、ボートに乗せ、一緒に岸まで戻ります。岸についたら、W を降ろし、C を乗せて島まで運んだら、全速力で岸に戻り、最後に W を乗せてからゆっくりとデート気分で遊覧をすればいいのです。

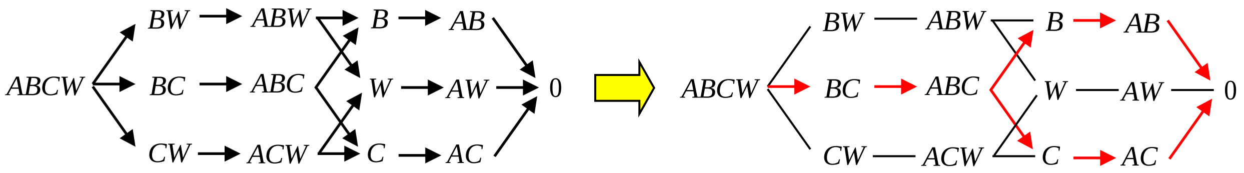
この問題の出典は古く、8 世紀の頃に「ある農夫がオオカミとヤギとキャベツを川向うまで舟で運ぶにはどうすればいいか」(オオカミはヤギを食べ、ヤギはキャベツを食べる)という内容で当時の大帝への娯楽用問題としてお抱えの数学者が考えたものであり、川渡り問題と呼ばれています。

古典的な問題ではあるのですが、題材として近代数学の一分野に関わる重要な概念が含まれています。

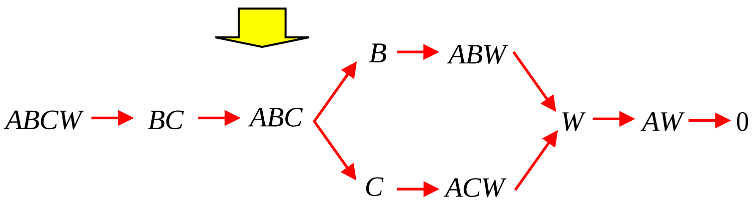
4 人の男女を点、ボートの行き来を線とみなすと、この問題は岸に残る男女の組合せである点をどのように線で結ぶかということになります。点の組合せは、2^4 から、A のみの場合を除くと 15 通りあり、ABCD⇒0 にすることができれば完成です。

一番最初に渡るのは 4 人のうちで A とあと一人ですから、岸に残る人の組合せは 3 通りあります。A が戻ってきたあと、2 回目は、A とさらに 1 人が減るため 3 通り。このように組合せを考え 0 に導きます。その経路の中から BW および CW の組合せは認められないため、関係する点および線を削除し、W の位置を考慮すればよいのです。

このように、点(node)と線(edge)をつないでできる図形を「グラフ」といい、グラフを用いて種々の問題を解く数学の分野を「グラフ理論」といいます。グラフ理論は、「ケーニヒスベルクの橋の問題」をオイラーが一筆書きで解いたことを起源として研究が続けられたものです。

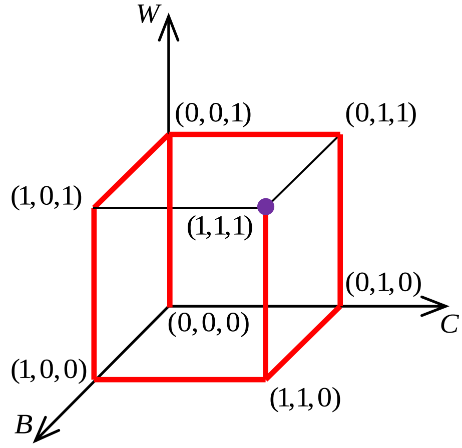


ところで、この問題は、点と線の配置を空間的に捉えることで、鮮やかな解答を用意することができます。



点 A は、常に線の上を移動しているため考える必要はないので、残りの B,C,W を成分とする空間(B,C,W)を作ります。各成分が 0 のときは手前の岸に、1 のときは向こう岸にいるとしましょう。例えば、(0,1,1)は、B が手前の岸、C,W が向こう岸にいることを意味します。そうすると問題は、(0,0,0)→(1,1,1)の経路を図の立方体の辺の移動で求めればいいことになります。なおこの中で、条件に反する経路は除きます。例えば、(1,0,1)→(1,1,1)は、C が向こう岸に移動する間、B と W は一緒にいることになるため認められないということです。すなわち、AW または BW の行き来の端点の数 0,1 が一致している辺は通れないことになります。そうして作った経路が右図であり、これから容易に移動方法を読み取ることが可能なのです。

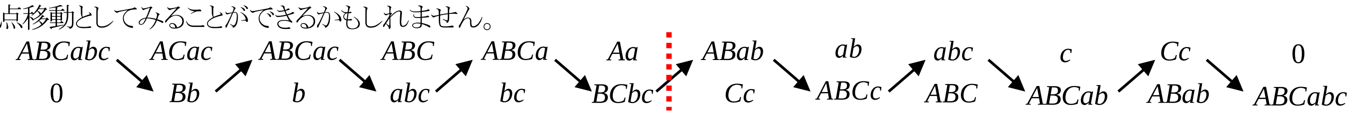
ただ、この方法は、BCW の 3 人に対し 3 次元空間を張るわけですから、さらに人数が増えると 応用することはできません。



3 組の男女のカップル A-a,B-b,C-c が 2 人乗りのボートで向こう岸まで渡りたい。ボートは 6 人全員が漕ぐことができるものとする。ただし、どの彼氏もみなヤキモチであるため、自分がいないときに彼女が他の男と一緒にいることは絶対に認めない。このわがままな要求を満たし、全員が川向うまで渡るためにはどのようにボートに乗り移動すればいいだろうか。

この問題は前述の川渡り問題から遡ること 50 年前にパズル誌に掲載されたものです。こちらの問題の方が先に考案されたことになるのです。前述の問題はこの問題を皇帝のために初級レベル用にアレンジしたということでしょうか。

さて、条件としては人数が増えたばかりでなく人間関係も複雑になっています。これも点と線を結び経路を作ると解答が浮かび上がってきます。その 1 つが次に示す経路であり 11 回の行き来で全員が川向うに渡ることができます。ただ、この経路をよくみると、$Aa - BCbc$ から $ABab - Cc$ へと変わる箇所で対称的な移動に転じていることが分かります。ちょっと工夫すると空間の点移動としてみることができるかもしれません。



666

……‥ビーストナンバー

「オーメン」(リチャード・ドナー監督)は、35 年前に公開されたオカルトブームに火をつけた映画。6 月 6 日 6 時に頭に 666 の数字を刻まれて誕生した悪魔の子ダミアンの物語です。666 は、新約聖書の最終巻である「ヨハネの黙示録」(アポカリプス)の中の 13 章 18 節に記載される海よりいでた第二の獣に従うモノたち(人間)に刻印された数字であり、この数字は数秘術ゲマトリアでは「獣の数字」といわれています。人の存在そのものに悪魔の刻印を押しているのです。

6 は神が完全な数と考える 7 より 1 少ない不完全な数であり、それを 3 つ連ねて、666 は甚だ不完全な数(人間)という意味をもたせており、反キリスト教の象徴数として扱われます。キリスト教を迫害したネロ皇帝の名前をヘブライ語で表した数値は 666 になります。マルチン・ルター、アドルフ・ヒトラーなどもラテン語、ローマ数字などで読み替えていくと数値 666 になるようですが、読み替えは、どうにでも関連付けることは可能であるため、「都合のいい解釈」ともいえます。

666 を構成している 6 は、自身を除く約数の和は、$6=1+2+3$ であり、最小の完全数です。6 は数としては完全でありながら、不完全な数の一部として嫌われ、相矛盾している有様が、如何にその解釈が適当であるかを物語っています。

したがって、666 の数の性質についても、適当な理由をつけることで、みつけだすことも可能ということです。

例えば、べき乗数との関係をみてみましょう。

自然数の和では、 $666=1+2+3+4+5+6+\cdots+(6\times 6)$

2 乗数の和では、 $666=\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+\cdots(6\times 6)^2}{1+6+66}$

3 乗数の和では、$666=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+5^3+4^3+3^3+2^3+1^3$

その一部をみると、 $6\times 6\times 6=6^3=5^3+4^3+3^3$

さらに、6 乗数では、$666=1^6-2^6+3^6$

このように 666 はべき乗和として表すことができますが、そのべき乗数の配置はあまりにも美しいのです。

さらに、素数を小さい順に 7 つ抜き出し、その平方の和を求めてみましょう。

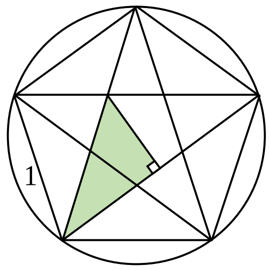
$$666=2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2$$

ここまでくると、こじつけであるとは言いがたくなります。

次に、666 を 6 進数で表してみましょう。$666=3030_{(6)}$ これから、

$$666=3\times 6^3+3\times 6=6^3+6^3+6^3+6+6+6$$

$666°$ の三角比の値はもっと驚くべき結果を導きます。$666°=7\times 90°+36°$ ですが、$36°$ は円に内接する正五角形の対角線を結んでできる五芒星形(ペンタグランマ)の頂角の大きさです。正五角形の一辺の長さを 1 とするとき、対角線の長さは、自然界でもっとも美しいと言われる黄金数 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ で与えられます(対角線の長さを x とし、トレミーの定理を用いると、$x^2-x-1=0$ の解として得られます)。右図の直角三角形に三角比を考えると、



$\sin 666°=-\cos 36°=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$666°$ の正弦の値は黄金数の $-\dfrac{1}{2}$ 倍。地上界と悪魔界の出入口であるペンタグランマから黄金数が生まれ、獣の数 666 の中に封じ込められているのです。三角比は円周率 π と深い関わりをもちますが、円周率の小数点以下の 144 桁までの各桁の数の和は 666 になります。3 つの 6 で示される 666 は、神の左手、悪魔の右手、どちらなのでしょうか。

次に 666 の平方を計算してみましょう。$666\times 666=443556$

なにも起こっていないように思えますが、6 を連ねた 666…666 の平方した結果を並べて書いてみると、右のような数のピラミッドが作られます。どの数も偶数桁になりますが、半分に分け上位桁と下位桁の和を求めてみます。例えば、

$444443555556\Rightarrow 444443+555556=999999$

6 をひっくり返した 9 が連なるのです。なお、この性質は、9 についてもみることができます。

$$66\times 66=4356$$
$$666\times 666=443556$$
$$6666\times 6666=44435556$$
$$66666\times 66666=4444355556$$
$$666666\times 666666=444443555556$$
$$6666666\times 6666666=44444435555556$$
$$66666666\times 66666666=4444444355555556$$

$9999^2=(10000-1)^2=100000000-20000+1=99980001\Rightarrow 9998+0001=9999$

このような 666 の不思議さ、不可思議さに魅入られた数学者クリフォード・A・ピッツバーク氏は、著書「オズの数学」で、2 種類のレギオン数(Legion’s Number)を命名しました。レギオンはローマ軍団転じて、軍団の意であり、666 は悪魔の軍団の数ということになります。第一種レギオン数は 666^{666} ですが、多倍長計算ソフトで実行させると、

$666^{666}=27154\cdots\cdots\cdots 98016$

1881 桁の大きな数が得られます。第二種レギオン数は $666!^{666!}$。同様に多倍長計算ソフトの実行ボタンを押すと、画面上に砂時計が回り始め、パソコンがフリーズしてしまいました。フリーズが融けるとき、いったい何が画面に現れるのでしょうか。恐ろしいものを呼び出してしまったのかも知れません。

(パソコンを現代文明の野獣であると主張する人もいます。アルファベット $A\sim Z$ を 6 の倍数 $6n(n=1,2,3,\cdots 26)$ に対応させます。そして、Computer のアルファベットを数字に置き換えると、文字に対応する数の和は…………)

$\dfrac{12}{5}$ (2)

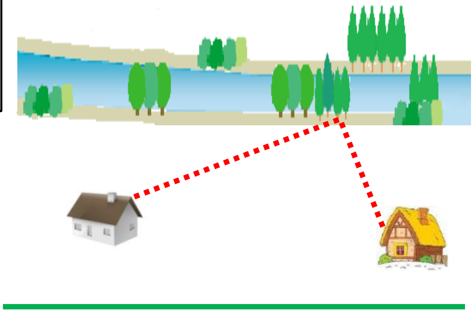
…調和から最短経路を導く数

2 数、2 と 3 の平均には

$$A=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}=2.5 \quad G=\sqrt{2\times 3}=\sqrt{6}\fallingdotseq 2.449 \qquad H=\frac{2\times 2\times 3}{2+3}=\frac{12}{5}=2.4$$

などがあり、左から順に、相加平均(A)、相乗平均(G)、調和平均(H)といい、$A \geqq G \geqq H$ という関係が成立しています。
調和平均は、経路を往復したときの速度の平均や、音の高さの平均などに用いられますが、最短経路を求める次のような問題にも応用することができます。

> みつる君は、週に 1 回、お祖母ちゃんの家に行く。ロバを連れて近くの川岸で水を汲み、水袋をロバの背にくくりつけて、お祖母ちゃんの家まで運んでいるのだ。みつる君はどこの川岸で水を汲むのが一番いいだろうか。

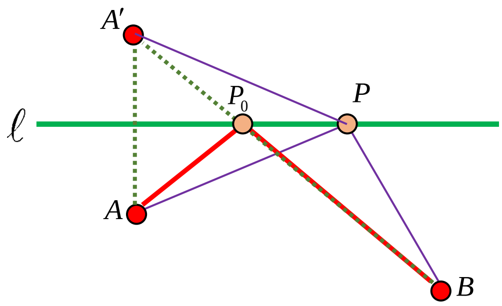


ロバで水を運ぶわけで、井戸もないずいぶん昔の話であることが分かりますね。ロバの問題といわれるこのパズルは、みつる君の家を A、お祖母ちゃんの家を B とし、水を汲む川岸の地点を P とするとき、$AP+PB$ の長さの最小値を求める最短経路問題ですが、その解答もよく知られています。

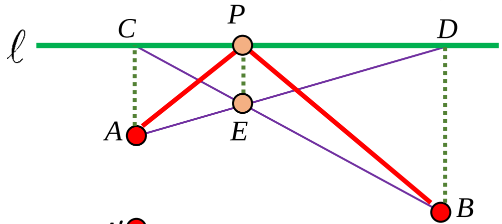
　川岸である直線 ℓ に関する点 A の対称点を A' とします。
点 A' と点 B を結ぶ直線と ℓ との交点を P_0 としましょう。
すると、水を汲み適当な地点 P に対して、$AP=A'P$ であることより、

$$AP+PB=A'P+PB \geqq A'P_0+P_0B=A'B$$

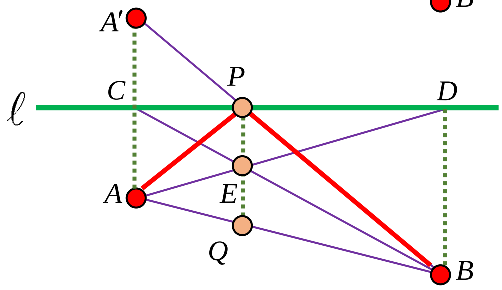
点 P_0 で水を汲むときが最短距離であり、ベストということが分かりますね。
でも問題文では、最短距離を求めよとはいっていないことにも注意してください。例えば、お祖母ちゃんの家に行くまで要する時間の問題とみれば、水を背に乗せたあと、ロバはゆっくりと歩くことになるわけですから、ロバの背に水袋を乗せている時間が最小になる場合がベストとみることもできるのです。すなわち、点 B から川岸である直線 ℓ に下ろした垂線との交点を答えとしてもいいのではないでしょうか。動物愛護にもなりますし。



　まあ、そんな解答のオチも考えられるのですが、ところでこの問題、最短経路を求めるにしてもちょっと首を傾げる点があるのです。それは、みつる君は川の中にある点 A' の位置をどうやって知ればいいのでしょうか。原理は分かっても実際には川の中に入らないと点 P_0 の位置はわからないのです。そこでみつる君にも理解できるように点 P_0 の位置を探してみましょう。

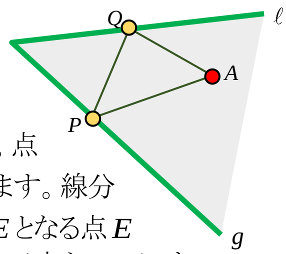


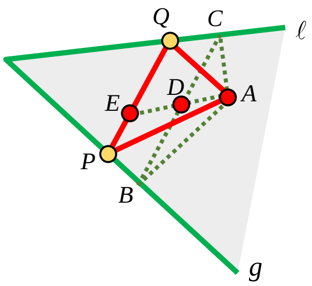
　点 A および点 B から直線 ℓ に垂線を引き、その足をそれぞれ C, D とします。直線 AD と直線 BC との交点を E とし、点 E から直線 ℓ に下ろした垂線の足を P とするとこの点 P が川の水を汲む位置になります。
　点 A を通り直線 ℓ に垂直な直線と、直線 BP との交点を A'、線分 AB と直線 PE との交点を Q とします。



　$\Delta BCA \backsim \Delta BEQ$ より、$AC=kQE$　$\Delta DCA \backsim \Delta DPE$ より、$AC=kPE$
　これから $PE=EQ$。また、$\Delta BCA \backsim \Delta BEQ$ より、$A'C=kPE$
　以上より　$AC=A'C$ となり、点 A' は直線 ℓ に関する対称点になります。
ところで、図の PQ の長さですが、線分 AC と BD の調和平均で与えられます。そして、このとき $CP:PD=AC:BD$ ですから、実は、みつる君は、点 E を求めなくても、CD 間の岸辺を歩き、$AC:BD$ の比になる地点を探せばいいだけだったのです。

> みつる君の家は、図のような中洲にあります。みつる君は毎朝、ℓ 側の川岸で洗濯をし、g 側の川岸で水を汲んで家に戻ります(洗濯した場所の川で飲料水は汲みたくないですね)。みつる君は、2 つの川岸のどこの場所で洗濯・水汲みをすればいいでしょうか。





$AP+PQ+QA$ が最小となる最短経路の問題として考えましょう。点 A から直線 g, ℓ に垂線を下ろし、その足をそれぞれ B, C とします。線分 BC 上の適当な点 D をとり、線分 AD の D の延長上に $AD=DE$ となる点 E をとります。点 E を通り、直線 BC に平行な直線が直線 ℓ, g と交わる点を P, Q にすればいいのです。その理由は、点 A の ℓ, g に関する対称点を考えてみれば分かります。

$\dfrac{1}{7}$

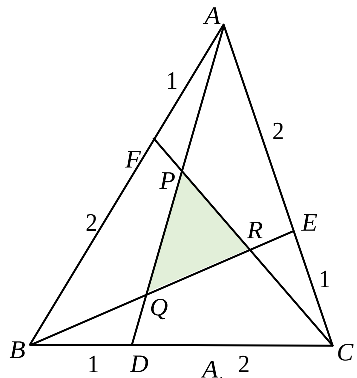
…三角形に隠れている循環小数

$\dfrac{1}{7}=0.142857142857142857\cdots$ であり、循環節の長さ 6 の循環小数です。

循環節の数 142857 に、1 から 6 までの数字を掛けると各位の数の順番が入れ替わり、数字たちがポルカを踊り出します。

$\dfrac{1}{7}$ を 22 倍した値は $\dfrac{22}{7}=3+\dfrac{1}{7}=3.142857\cdots$ であり、円周率の良い近似を与えます。

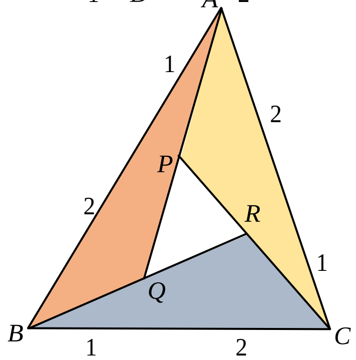
$\dfrac{1}{7}$ を 24 倍した値 $\dfrac{24}{7}=3.4285714285\ 7142857142\cdots$ にも、142857 が現れますが、スラングでは 24hours/7 days a week」の略語でもあり、24 時間(1 日)と 7 日(1 週間)、常に(always)、いつも(anytime)の意味になります。セブン・イレブンは本当は、7/24 ということになるのでしょうか。



さて、今回の話題ですが、その $\dfrac{1}{7}$ の面積を作り出す比の値についてです。

> 三角形 ABC の各辺 BC, DA, AB を $2:1$ の比に内分する点をそれぞれ D, E, F とする。このとき、線分 AD, DE, CF によって囲まれてできる三角形の面積は、もとの三角形 ABC の面積の何倍になるか。

$\dfrac{1}{7}$ が答えになりますが、$2:1$ の比の値からどのように得られるのかをみてみましょう。



図の三角形 PQR の面積は、三角形 ABC から、$\Delta ABQ, \Delta BCR, \Delta CAP$ を減ずると求められますから、$AQ:QD$ が分かればいいことになります。これはメネラウスの定理を用いると簡単に得られます。メネラウスの定理は、

「三角形の各辺を内分・外分する点を中継しながら、辺の両端点(頂点)の比の積を求めて一周すると、値 1 になる」

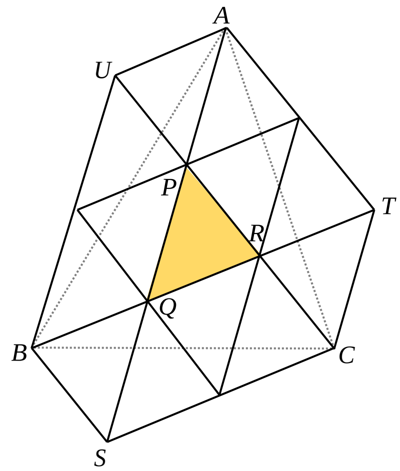
というものです。$AQ:QD$ を求めるわけですから、辺 AD の内分点が Q であるとみて、A を出発点として、移動します。点 Q を中継して点 D についたら、今度は C に行くために外分点 B を経由します。点 C から点 A に行くには内分点 E を経由します。これで最初の点 A に戻ることができました。式で表してみましょう。

$$\frac{AQ}{QD}\times\frac{DB}{BC}\times\frac{CE}{EA}=1 \quad \text{これより、} \quad \frac{AQ}{QD}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=1 \quad \therefore \quad AQ:QD=6:1$$

$$\Delta ABQ=\frac{6}{7}\Delta ABD=\frac{6}{7}\times\frac{1}{3}\Delta ABC=\frac{2}{7}S \quad (S=\Delta ABC)$$

同様に、$\Delta BCR=\Delta CAP=\Delta ABQ=\dfrac{2}{7}S$ です。$\therefore$ $\Delta PQR=\Delta ABC-(\Delta ABQ+\Delta BCR+\Delta CAP)=S-\dfrac{2}{7}S\times 3=\dfrac{1}{7}S$

求められましたね。でもメネラウスの定理は素晴らしい美しい定理なのですが慣れるまでちょっと使いにくいかもしれません。そこで、別の視覚的な方法を考えてみましょう。



頂点 A, B, C, P, Q, R を通り、三角形 PQR の各辺に平行な直線を引くと、右図のように ΔPQR と合同な 13 個の三角形ができます。そこでその面積を S とします。ここで、例えば ΔBCR は平行四辺形 $BSCR$ の面積 $4S$ の半分ですから $2S$ 。

$\Delta CAP, \Delta ABQ$ も $2S$ ですから、ΔABC の面積は $7S$ になります。

同様に考えることで、三角形 ABC の各辺を $m:n$ の分けるときにも、ΔPQR の面積と ΔABC の面積 S との比を求めることができます。実際に計算すると、

$$AQ:QB=(m+n)n:m^2$$

となることから、

$$\Delta ABQ=\frac{(m+n)n}{m^2+mn+n^2}\Delta ABD=\frac{(m+n)n}{m^2+mn+n^2}\times\frac{m}{m+n}\Delta ABC=\frac{mn}{m^2+mn+n^2}S$$

$$\Delta PQR=\left(1-\frac{3mn}{m^2+mn+n^2}\right)S=\frac{(m-n)^2}{m^2+mn+n^2}S=\frac{(m-n)^3}{m^3-n^3}S$$

$\dfrac{1}{7}$ の分子、分母はそれぞれ、$(2-1)^3=1$、$2^3-1^3=7$ で与えられていたのです。

41

…素数を生成する数

$P(n)=n^2-n+41$としましょう。

$P(1)=41$、$P(2)=43$、$P(3)=47$、$P(4)=53$、$P(5)=61$、$P(6)=71$、$P(7)=83$、$P(8)=97$、……

これらの数はすべて素数を表しています。素数である41に連続する2整数の積$(n-1)n$を加えると新たな素数が生成されるのです。もう少し調べてみましょう。

$P(31)=971$、$P(32)=1033$、$P(33)=1097$、$P(34)=1163$、$P(35)=1231$、……

確かに素数です。でも、すべての素数を生成しているわけではないようです。$P(4)=53$と$P(5)=61$の間には59がありますし、いくつも素数が抜け落ちています。さらに、この式は$P(41)$で破綻してしまうことは明らかです。

なぜなら、$P(41)=41\times 41-41+41=41^2$になるからです。

この式$P(n)$は、オイラーがみつけたものですが、もちろんオイラーも素数を生成する万能式とは思っているはずもなく、同様の式はオイラーが好んだ数 17 を用いたn^2-n+17でも$n=16$まで成立します。さらに多項式$n^2-81n+1681$は$n=80$まで素数を生成することができるのです。素数全体を1変数の2次の多項式として表現することは不可能なのですが、1970年にユーリ・マチャセヴィッチは正の値をとるものが必ず素数になる 19 変数の多項式を見つけています。しかしその多項式もすべての素数のみを生み出す式ではないのです。

素数の研究の歴史は、紀元前 300 年ごろのユークリッドの時代から始まり、素数が無限に存在することの証明はユークリッド原論に示され、デュドネは「ギリシアの数論でもっとも美しい定理」と賞賛しています。

素数の個数が有限個であるとし、そのすべてを$p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n$とします。このとき、$p=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdots\cdots p_n+1$なる数$p$を作ると、$p$は、$p_i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$で割ると余り 1 になりますから割り切れなく、$p$も素数ということになります。これから素数は無限個存在することになります。

またユークリッドは、$M_p=2^p-1$が素数であるとき、$\dfrac{M_p(M_p+1)}{2}=(2^p-1)\times 2^{p-1}$は完全数であることも証明しています。

$$(1+M_p)(1+2+2^2+\cdots+2^{p-1})-M_p\times 2^{p-1}=2^p\times\frac{2^p-1}{2-1}=2^p(2^p-1)-2^{p-1}(2^p-1)=2^{p-1}(2^p-1)$$

このように、素数が無数にあることや素数の一部が完全数であることは、紀元前にユークリッドが証明したために、後世は、素数と完全数の関係、自然数の中での素数の散らばり具合といったことが研究対象となっていきます。

M_pが素数であるpについては、1664 年にフランスの数学者メルセンヌは、$19<p\leqq 257$のときは、$p=31,67,127,257$であることを予想します(素数であるM_pをメルセンヌ数といいます)。1772 年、$p=31$について、スイスの数学者オイラーは、その証明をしますが$p=257$についてはさらに100年の時を経てリュカ(フランス)の成果(反例)まで待たなければなりません。

なお、オイラーから遡ること 100 年前、フェルマー(仏)は、$F_n=2^{2^n}+1$は素数であると予想しましたが、オイラーは$F_5=641\times 6700417$の反例をみつけています。また、オイラーは偶数の完全数は$2^{p-1}(2^p-1)$で与えられることも証明しています。新たな素数の発見は完全数の発見にもつながっていくのです。

また、素数のでたらめのように配置されるその散らばりの分布について、ガウス(独)やル・ジャンドル(仏)は、素数の個数$\pi(n)$は、nが大きくなると、$\dfrac{n}{\log n}$に近づくことを予想します(素数定理)。この証明に取り組んだ末に、1859年、リーマンは数学史上もっとも重要な未解決問題といわれる「リーマン予想」にたどり着くのです。一方、素数定理については、1896 年、アダマール(仏)やプサン(ベルギー)により、解析的な方法を用いて解決されています。

このように人間は2300年以上の間、素数の秘密に近づこうと研究を続けていますが、ユークリッドの頃からそれほど大きな進展があるとはいえないのです。北アメリカには13年あるいは17年周期で、大量発生する蝉がいます。その周期が素数であるため「素数ゼミ」ともいわれますが、その体内時計は素数の時間を刻み、周期を守りその最小公倍数を大きくすることで交雑をなくし、大量発生します。その圧倒的な量をもって天敵の攻撃による絶滅を防いでいるのです。自然は人間ではなく蝉というちっぽけな虫に素数の秘密を解き明かしたのかも知れません。

41 に話を戻しましょう。スタニスラフ・ウラム(ポーランド)は自然数を四角いらせん状に配置していくと、素数の多くは対角線上に現れることを発見しました。ウラムの螺旋において中心を 41 にして以降の自然数を螺旋に配置してみましょう。$p(n)=n^2-n+41$の値は、対角線上に次々と現れてきます。オイラーは$P(n)$に素数の秘密の一旦を垣間見たのでしょうか。オイラーが見つけた美しい素数の関係式があります。

$$\frac{2^2}{2^2-1}\times\frac{3^2}{3^2-1}\times\frac{5^2}{5^2-1}\times\frac{7^2}{7^2-1}\times\frac{11^2}{11^2-1}\times\frac{13^2}{13^2-1}\times\frac{17^2}{17^2-1}\times\frac{19^2}{19^2-1}\times\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

素数により、宇宙の深淵に横たわる究極数πが表現されるのです。オイラーは、宇宙の秘密を解明する鍵は素数であると信じ、宇宙に向かって無限に伸びる素数階段を渡そうとしたのです。

140	139	138	137	136	135	134	133	132	131
105	104	103	102	101	100	99	98	97	130
106	77	76	75	74	73	72	71	96	129
107	78	57	56	55	54	53	70	95	128
108	79	58	45	44	43	52	69	94	127
109	80	59	46	41	42	51	68	93	126
110	81	60	47	48	49	50	67	92	125
111	82	61	62	63	64	65	66	91	124
112	83	84	85	86	87	88	89	90	123
113	114	115	116	117	118	119	120	121	122

220

…井戸端会議に出席したある数

■世の中(数の世界では)、それ自身を除く約数の和がそれ自身になる 6 のような完全数がもてはやされるけど、オレ 220 だって凄いんだぜ。素因数分解すると$220 = 2^5 \cdot 5 \cdot 11$だから、オレを除いた約数の和は、

$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+5)(1+11)-220=284$$

になる。だからどうしたって?。オレのマブダチの 284 は、$284 = 2^2 \cdot 71$だから、 $(1+2+2^2)(1+71)-284=220$

どうだい。俺達は互いに認め合う仲で、自分自身も和の中に含めると、約数の和が 504 で等しくなる。オレたちはこんなに強い絆で結ばれている。完全数なんて所詮、自分を自分でしか評価できないナルシストだろ。オレ達「友愛数」グループは聖書にも「ヤコブが兄のエサウに友愛のしるしに贈った羊の数が 220」といったように取り上げられる由緒ある数なんだ。オレのメンバーは、$(1184,1210)$、$(2620,2924)$、$(12,285、14,595)$を始めとして 1000 組以上あるんだぞ。

■わたし 12496 ですけど、「友愛数」は「完全数」をひとりよがりの数みたいな言い方するけど、私にいわせればどっちもどっちよ。1000 組以上仲間がいるっていったって、お互い交流はまったくないでしょ。それだったら完全数と大した違いはないわ。ちなみに私が所属する「社交数」グループでは、私達の自分自身を除く約数の和は、お互いを表し友達の輪を作っているの。

$$12496 \to 14288 \to 15472 \to 14536 \to 14246 \to (12496)$$

私たちはまだ 212 グループしかないけど、数 14316 なんかは 28 の社交鎖をもった大所帯なのよ。構成する総数なら友愛数なんかとは比べ物にならないわ。

■それもまた、どっちもどっちだな。僕は 103340640。友愛数は無二の親友というけど、それってお互いの意見を言い合ったら終わってしまうだろ。一方、社交数のように人数が多すぎると収集がつかなくなり、集団も群れになってしまう。「社交数」グループは 28 の社交鎖を自慢するけどまだ 1 組しかないよな。ほとんどが 4 社交鎖の組ばかりで、3 つの社交鎖の組って入会者がだれもいないって聞いている。だから「架空の鎖」(crowds:存在しない)なんて揶揄されてしまう。やっぱり、一番理想的なのは 3 つの数で構成されている場合だと思う。3 つの数は三位一体、お互いが理解でき、バランスのいい社会を作ることができる。僕の親友は、123228768 と 124015008 だけど、僕達の一つの数の約数の和は、残り 2 数の和に一致するんだ。例えば、僕の約数の和 247243776 は、

247243776=123228768+124015008

となっている。僕たちほど、深い信頼関係で結ばれている数は他にはないと思うよ。

■それはどうでしょう。あなたたちグループの大きな欠点をわたしは知っている。あなたたちってみんな偶数同士、奇数同士の組ばかりでしょ。男組とか女子会とか、そりゃ仲間内でワイワイやるのは楽しいかもしれないけど、それで終わってしまうのは不健全だわ。やはり数(人)として、偶数と奇数の間にも友情を育まなければいけないと思う。自己紹介が遅れましたが私は 48。$48 = 2^4 \times 3$であることから、私の約数の和から 1 と私自身を除いたものは、

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3)-(1+48)=75$$

私の連れ合い 75 を紹介するわ。$75 = 3 \times 5^2$より、同じように和を求めると、$(1+3)(1+5+5^2)-(1+75)=48$

約数の和は友愛数と同じで等しく互いに相手を表現しているけど、私は偶数で、彼は奇数。私たちは友愛数から孤独な 1 を除いたことで、生涯の伴侶を見つけることができたの。私たちのグループは「婚約数」といいますが、仲間には、

$(140,195)$、$(1575,1648)$、$(1050,1925)$、$(2024,2295)$

みんな異性同士の組よ。でもね、わたしたちと似ているグループで自分自身を除いた数にさらに 1 を加えた数が相手を表している「拡大友愛数」って集団もあるのよね。

$(6,160、11,697)$、$(12,220、16,005)$、$(23,500、28,917)$、$(68,908、76,245)$

といったメンバーなんだけど、新たに 1 を加えていつでも自我を主張するなんておかしい。そんな不倫集団と一緒にはしないでね。

■そんなに、偶数とか奇数とか種類に拘ることが大事なことなんだろうか。「婚約数」にしても、まだ偶数同士、奇数同士の組が入会していないだけということだろ。いまのご時世、同性同士のカップルが誕生したっていいじゃないか。大事なのはお互いを信じ尊重する気持ちではないだろうか。私達は 714 と 715。「ルース=アーロン・ペア」と 2 数で 1 つのニックネームで呼ばれる。私達はそれぞれ、$714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17$、$715 = 5 \times 11 \times 13$と素因数分解できるけど、1 と自分自身を除く約数の和は、$2+3+7+17=5+11+13$、等しくなる連続する 2 数なんだ。ちなみにニックネームは、人間界のベースボールというゲームで、ベーブ・ルースという選手が 1935 年に作ったホームラン記録 714 本を 1974 年にハンク・アーロンが 715 本を打って塗り替えたことに由来している。私達は連続する 2 数だから必ず偶数と奇数の組合せになるけどそんなことは気にしていない。お互い支えあって何か結果を残すことに価値を見出している。例えば、私達 2 数を掛けると、 $714 \times 715 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 = 510510$

連続する 7 つの素数の積(素数階乗)になる。きみたちの中でそんなことができる奴はいるか。

■でも、その 7 つの素数の平方の和は、$2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2=666$。それにベースボールで 700 本以上打っているのは 3 人で、残りの 1 人であるホームラン王のバリー・ボンズは 6 試合で連続してホームランをうち 666 本になったということだろ。オタクらには黒い噂もあるって聞いている。えっ、僕の名前は何かって。僕は………。

数たちの自慢話はまだまだ続きそうです。

$128\sqrt{e980}$

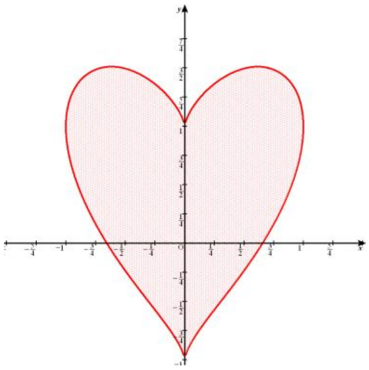
…愛を告白する数

計算しようとは思わないでしょうが、その値は

$128\sqrt{e980} = 6606.4818843256\cdots$　　（e はネイピア数）

となります。この計算結果が何を表すかというと、値に意味は何もありません。しかしこの数は「愛を告白する数」としてインターネット上では話題になっているのです。値に意味はないのになぜ？、ということは後ほど触れるとして、愛を表現している方程式としてよく知られているものはあります。

$$x^2 + \left(y - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 = 1$$



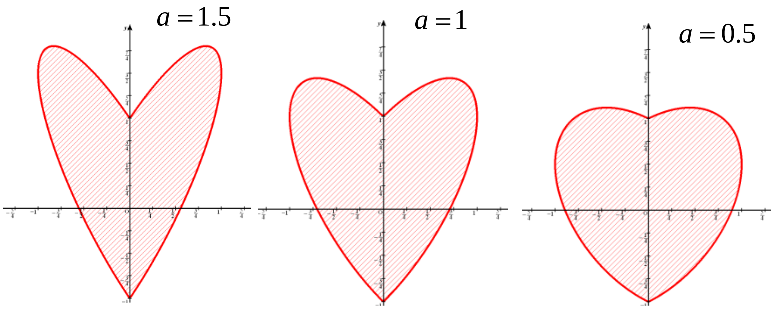
この方程式をグラフとして描画するとどんな図形が現れるか予想できますか。
右が描画したものです。ハートマーク、数式があなたに代わり愛を語ってくれましたね。
この方程式は「愛の方程式」(The Love Formula)と言われています。
なお、右図のグラフは方程式の等号(=)を不等号(≦)に変えています。この場合、「愛の不等式」になってしまい、愛が壊れそうな予感がします。ハートの内部は塗らないほうがいいかもしれませんね。
数式を用いて愛を表現することは、愛が人間という種族の最大の感心事であるため、いろいろと試みられているようです。

$$y = \sqrt{1-x^2} + a|x| \qquad y = -\sqrt{1-x^2} + a|x|$$

今度は2つの式ですが、先ほどよりは分かりやすく、式の中には円の方程式 $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ が含まれています。
さらに変数 a の値を変えることにより、ハートの形(丸み)が変化します。$a=1$ のときは、理想的なハートマークであり、$a>1$ のときは尖った愛、$a<1$ のときは愛が丸く膨らんでいきます。
そして、$a=0$ のときは円(満)になるのです。
この変化は、まるで、男女を表している二人の愛の方程式が、寄り添い愛を紡いでいく様にみえないでしょうか。
なお、2つの方程式は、

$$x^2 + \left(y - a|x|\right)^2 = 1$$

と一つにまとめられますが、野暮というものでしょう。



このようなグラフはハート形曲線といい、その式表現も様々です。ちなみに google ではお茶目な微笑ましいサービスを提供しています。検索画面で次の式を入力し、検索ボタンを押してください。

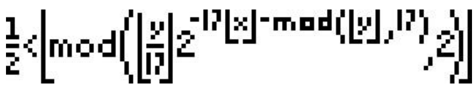
```
sqrt(cos(x))*cos(300x)+sqrt(abs(x))-0.7)*(4-x*x)^0.01, sqrt(6-x^2), -sqrt(6-x^2) from -4.5 to 4.5
```

何が現れるかは実際にやってみてのお楽しみ。古風ゆかしき恋文も、IT 時代ではサプライズの告白になるようです。
さて、次のように愛の形を表す式もあります。

$$\frac{1}{2} < \left\lfloor \mathrm{mod}\left(\left\lfloor \frac{y}{17} \right\rfloor 2^{-17\lfloor x \rfloor - \mathrm{mod}(\lfloor y \rfloor, 17)}, 2\right) \right\rfloor$$

$\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す関数であり、floor function(床関数)といいます。日本では $[x]$ (ガウス記号)として用いられます。

この数式は、Jeff Tupper(トロント大学の教授)が考案したもので、Tupper's Self-Referential Formula といいます。日本語に訳すと「再帰公式」となりますが、関数を表示させると、そのグラフの一部にこの数式自体が描画されるのです。右図は、Wolfram MathWorld で公開している実際の画像です。数式が自らを表現してしまうって驚くべきことではないでしょうか。



このことから Self-Referential Formula は、言い換えればナルシストの数式であり、Self-Love(自己愛)とみなすこともできるでしょう。人は自らを愛せなければ他人も愛せないものです。この数式は無限に広がり描画されたグラフの中に再帰的に自己を再現するのです。そう捉えると、グラフそのものが愛そのものを表していると考えてもいいのではないでしょうか。

それでは最後に表題の数がどうして「愛を告白」しているのかお教えしましょう。白紙の紙を用意してください。その紙で数の上半分を覆ってみます。ルートの中の e(ネイピア数)が隠れてしまわないようにしましょう。よくみてください。英語で綴られた「愛の告白」が浮かび上がっていませんか？

91

…ちょっと頑張る半人前の素数

$91 = 7 \times 13$ であり7も13も素数です。このように2つの素数の積で表される数を半素数(semiprimenumber)といいます。
半素数は簡単に作れますし、不思議でもなく、珍しくもないでしょう。そういった神秘的な性質はすべて素数がいいとこどりしてしまっています。$1309 = 7 \times 11 \times 17$ ですが、このように 3 つの素数の積で表される数を楔数(sphenic number)、といっても「だからなに」といわれてしまうかもしれません。ちなみに、91 を和で表現すると、

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13=91$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=91$$

$$3^3+4^3=91$$

こんなに羅列しても、これも「まあ、面白いね」で終わってしまいそうです。このようなべき乗の性質は666がもっと神秘的に力強く主張していました。数 91 ひとつでは力不足のようなので、それなら91,93,95と、連続する3つの奇数を並べてみましょう。

$$93 = 3 \times 31 \qquad 95 = 5 \times 19$$

数93,95も、半素数です。3つの半素数が並んで、3人(数)寄れば…となりますが、さて何を意味するでしょうか。
実は、この3数は、連続する3つの奇数ですべて「素数でない数」の最初の3組を表しています(さらに、3つとも半素数)。
奇数を小さい順に並べると、

1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41,43,45,47,49,51,…

となりますが、なかなか「素数でない連続する3数」は登場しません。ところが一旦、91からの3つがその姿をみせると、次は、

115,117,119,121,123,125

いっぺんに堰を切ったように6つの数が連続して現れます。なお、この中で半素数で3連続するのは119,121,123です。
そして、次に現れるのは、

141,143,145,147

半素数であり連続するのは141,143,145です。このように、素数でない奇数はどんどん勢力を増し、5つの連続する奇数であり、さらにすべてが半素数である

213,215,217,219,221

といったものまで調子に乗って振る舞い始めます。
これに対して、素数で3連続するもの(当然、奇数で)は、どうかというと、3,5,7の1組しかありません。
前述した奇数を小さい順に並べた数の列をみてください。3から始めて2つ置きに3の倍数が現れることが分かります。これから、3,5,7の1組以外で、3数(以上)が連続して現れることはないのです。
では「連続する素数でない3つの奇数」はどれだけあるのでしょうか。
実は、無数に存在しますが、その証明は簡単にできます。n を奇数($n \geqq 3$)として、次の3数を考えます。

$$2n(n+2)(n+4)+n$$

$$2n(n+2)(n+4)+(n+2)$$

$$2n(n+2)(n+4)+(n+4)$$

$2n(n+2)(n+4)$ は偶数で、$n, n+2, n+4$ はみな奇数よりこの 3 数は奇数であり、順に共通因数 $n, n+2, n+4$ をもつことより素数ではありません。すなわちこれから素数でなく連続する3奇数が作れます。
例えば $n=3$ とすると、213,215,217という具合です。同じように、4つ連続する場合は、

$2n(n+2)(n+4)(n+6)$ に、$n,\ n+2,\ n+4,\ n+6$ を加えた4数

であり、m 個連続する場合は、

$2n(n+2)(n+4)(n+6)\cdots\{n+2(m-1)\}$ に、$n,\ n+2,\ n+4,\ n+6,\ \cdots, 2(m-1)$ を加えた m 数

とすると得られます。
また、

$2n(n+2)(n+4)$ に対して、$n,\ n+2,\ n+4$ を引いた3数

とすると、さらに小さな「連続する素数でない 3 つの奇数」がみつかり、$n=3$ とすると、203,205,207 であり、このような方法で得られる連続する3奇数は、加減のそれぞれにより、(203,205,207)と(213,215,217)のようにpairで現れることになります。
このように見ていくと、「連続する素数でない3つの奇数」と大上段に構えた割には、どんどん萎んでいき、その希少価値も薄れていくようです。
では、数91は、このような方法で作ることは可能かというと、

$6n(n+2)(n+4)$ に対して、$n,\ n+2,\ n+4$ を加えた3数

を考えて、$n=1$ とすることで得られます。実際に代入すると、

$$91 = 6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1,\ 93 = 6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 + 3,\ 95 = 6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 + 5$$

これから、93と95については、その式から素数でないことは分かりますが、91は式だけからは判別できません。
そう考えると、素数でない連続する3つの奇数である最初の数91は、なかなかどうして、頑張っているのではないでしょうか。
半素数と、まるで半人前の素数のように言われながら、虎視眈々と活躍の機会を伺いながら、一気に攻勢に転じているのです。
なお、半素数は、近年、RSA 暗号の公開鍵として、注目を浴びてきています。陽の目をみるまでは諦めてはいけないということなのでしょう。

13

…運命を左右する数

数 13 は忌み数であり、嫌われ者です。

北欧神話では、13 人目は招かれざる神ロキ、キリスト教神話では、13 人目は天使(であったころの)サタン、そして、「最後の晩餐」では、13 番目の席についたのはユダであり、このように 13 番目に登場する人や神は異端者として扱われます。ただ、それは 13 番目に位置する神や人に問題があるのであって、数 13 に罪があるわけではありません。それにも関わらず、例えば旅行する場合を考えてみると、空港へ着くと 13 ゲートはなく、飛行機に乗ると座席番号 13 番はなく、ホテルへ泊まると 12 階の上は 14 階で、13 号室は使われず、旅行日を 13 日の金曜日にして湖に出かけようなんてことは避けたいところでしょう。このように人間社会は 13 を排除しようとする傾向にあり、「それ、イジメだろ」とさえ疑いたくなります。確かに 60 進法時間のこの世界では、私達は、24 時間、12 ヶ月といったように数 12 を基準にして生活を送っているため、その次の数 13 は非調和的で馴染まないとはいえます。13 が素数であることも馴染まない理由ですが、素数の積が数 12 を形成しているわけでもあります。7 も素数ですが、こちらは、13 とは対称的なナイスガイとして扱われ厚遇されています。結局、人間が安易に自然数の序列から数 13 に 13 番目というレッテルを貼ってしまったことに問題があるのでしょう。正の奇数やフィボナッチ数列「1,1,2,3,5,8,13,21…」の序列では数 13 は、7 番目のラッキーな位置にあります。そう考えれば自然数の序列の 7 番目の数 7 がラッキー数である根拠も 13 と同様に脆いといえます。

実は、ラッキー数(幸運数:lucky Number)と命名されている数のグループは存在しています。

正の奇数列の 2 番目の 3 に対して、奇数列から 3 の倍数に位置にある数を取り除きます(下図②)。次にこの列から 3 番目にある数 7 に対して、7 の倍数の位置にある数を取り除きます(下図③)。同様に次には 4 番目の数 9 に対して、9 の倍数の位置にある数を取り除くことを続けていくことで生成される数列の項の値を、数学者スタニスワフ・ウラム(ポーランド)はラッキー数と命名しました。何がラッキーかというと、ヨセフスの生き残り問題(日本では継子立て)の抽出法に似ているからなのですが、それよりも素数列を求めるエラトステネスの抽出法に近いといえます。エラトステネスは数列の第 n 項の数の倍数がある項をふるいにかけたのに対して、ウラムは第 n 項の数の倍数である項をふるいにかけたのです。なお、ラッキー数の分布は素数に近いものが得られることが知られています。そしてこの序列で 5 番目に位置するのが数 13 なのです。

①	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	…
②	1	3		7	9		13	15		19	21		25	27		31	33		37	39		43	45		49	51		55	57		61	63		67	69	…
③	1	3		7	9		13	15			21		25	27		31	33		37			43	45		49	51		55	57			63		67	69	…
④	1	3		7	9		13	15			21		25			31	33		37			43	45		49	51		55				63		67	69	…
⑤	1	3		7	9		13	15			21		25			31	33		37			43			49	51		55				63		67	69	…
⑥	1	3		7	9		13	15			21		25			31	33		37			43			49	51						63		67	69	…

幸運はフォーチュン(fortune)の英訳でもありますが、フォーチュン数(運命数:Fortunate Number)といわれる数もあります。それは、素数を小さい順に並べるとき、n 番目までの素数 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ の積 $p(n) = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$ に対して $p(n) + m$ が素数になるような最小の自然数 m ($m \geqq 2$) で生成される数のことです。

例えば、$n = 1$ のときは、$p(1) = 2$ であり、$2 + m$ が素数になるような最小の m は、4,5,6,7,…を考えると 5 が素数より、$m = 3$。これが最初のフォーチュン数です。$p(2) = 2 \cdot 3 = 6$ では、8,9,10,11,12,…だから、11 が素数より $m = 5$。以下このように続けて抽出していきます。なお、$m \leqq p_n$ のとき、m は $p_k (k = 1, 2, \cdots n)$ の積で表されることより、$p(n) + m$ は素数ではありません。すなわち $m > p_n$ に対して考えばいいことになります。

例えば $n = 4$ のときは、$p(4) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ だから、$m \geqq 8$ を調べると、218,219,220,221,222,223,…。223 が素数より、$m = 13$。数 13 は 4 番目のフォーチュン数なのです。同様に抽出を続けると、次の数列が得られます。

3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 37, 47, 59, 61, 67, 71, 79, 89, 101, 103, 107, 109, 127, 151, 157, 163, 167, 191,…

さて、この抽出方法ですが、ユークリッド原論の中にある「素数は無数に存在する」ことの証明に似ています。素数の個数が有限個であり n 個であるとすると、$p(n) + 1$ は新たな素数であり矛盾が生じ背理法により証明できるわけですが、フォーチュン数は、その次に現れる素数までの個数を示しているのです。なお、フォーチュン数はすべて素数であることが予想されています。このように、数の序列の規則性により、数 13 は、

4 番目のフォーチュン数、5 番目のラッキー数、6 番目の素数、7 番目のフィボナッチ数

であり、不吉というよりむしろ幸運な数の序列に含まれる数なのです。

60 進法の中で数 13 は非調和であると述べましたが、1 年は 52 週であり、これを 4×13=52 とみれば、13 週を節目に春夏秋冬が移り変わるわけです。数 13 は、四季の彩りを変える数であり、非調和どころか、調和を演出しているとも言えるのです。(トランプは、4 つの種類のカードがそれぞれ 13 枚あり、4×13=52 枚で 1 組ですが、これから対等性のある無数のゲームが生み出されることも面白いのではないでしょうか)。

また、1 週は 7 日ですから、52×7=364。すなわち 52 週は 364 日で、1 年 365 日より 1 日足りません。1 日を陽が照っている時間とするならば、その間の夜の日数は 13×4×7=364 日ということになります。この夜が漆黒の闇の世界か、それとも月明かりに浮かぶ淡い光を湛える世界とみるかで数 13 はガラリとその装いを変えます。

月光を弦にアルペジオを奏でたくなる夜、ピーター・パンやティンカー・ベルが点滅する星の光の間を縫い飛翔しているようなロマンチックな寓話の世界の住人が数 13 であることを願いたいものです。

19

…代数の骨を作る数

19は8番目の素数であり、その逆数は(整数nに対して)最大の循環節$n-1$をもつ小数として知られています。また、

$$19^5+19^2+19^1+19^3+19^5+19^6+19^4+19^0=52135640$$

の計算をみると、計算結果の右辺は、左辺の各指数の左からの並びに一致しているという面白い性質もあります。

でも数19を有名にしたのは次の問題でしょう。

「Aha, その全部と七分の一とで、十九になる」

ここで用いられているAha(アハ)は、わかった、なるほど、といった驚きや喜びを表す感嘆詞ではありません。「多数」「量」といった「変数」の意味であり、それをxとおいて問題を式で表せば、

$$x+\frac{x}{7}=19$$

となります。この問題は今から3700年前のエジプトのアーメスのパピルス(Papyrus)に記載されているものです。

1857年、エジプトで転地療養をしていた考古学者、ヘンリー‥リンド(スコットランド)は、ナイル湖畔のルクソールという村の店で偶然このパピルスをみつけました。リンド氏の死後、パピルスは大英博物館に寄贈され、以後、リンド数学パピルス(Rhind Mathematical Papyrus 略称RMP)と呼ばれ、世界中の数学者、考古学者の研究の中心となります。パピルスは、「算術(RMP1-40)」、「幾何(RMP41-60)」、「雑題(RMP61-87)」の3つの章からなり、上述の問題は「算術」の中にある「アハ(量)の問題」(RMP24―29)の巻頭を飾っています。そしてこの問題は、人間がその歴史の中で最初に解いた代数問題であり、この時代にすでに代数が存在していたことは驚くべきことといえるでしょう。

また、「雑題」のRMP79には次の問題が掲載されています。

7件の家では7匹ずつの猫を飼っている。
それぞれの猫は7匹ずつのネズミを捕る。
それぞれのネズミは麦の穂を7本ずつ食べる。
それぞれの麦の穂からは7ヘカット(容積単位)の麦がとれる。
では、これらの数の合計はいくらか。

(答え)

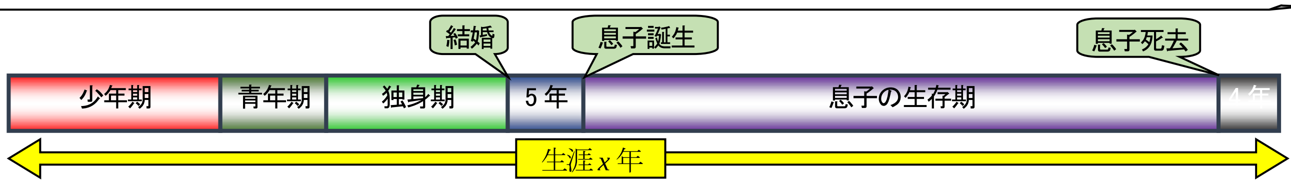
$$7+7^2+7^3+7^4+7^5=\frac{7\left(7^5-1\right)}{7-1}=19607$$

※RMPの解答は等比数列の和の公式は用いていません。

猫、ネズミ、麦の穂といった異なるモノの数の合計をとることはナンセンスかも知れません。でも、この問題が一級品のパズルであることは疑いのないことです。その発想には等比数列の概念がすでに芽生えているのです。

ところで、代数を体系的にまとめたのは、代数の父と呼ばれるディオファントス(Diophantus)といわれています。ギリシア時代の数学者で没年は不明なのですが、84歳まで生きたということは分かっています。彼の弟子の一人が記したギリシア詩歌集の1篇が生涯を詠んでいるのです。

ディオファントスは、その生涯の6分の1を少年期、12分の1を青年期として過ごした。その後、生涯の7分の1を経て結婚し、5 年後にひとり息子を授かった。しかし、その子は父の一生の半分しか生きずにこの世を去った。その悲しみの4年後にディオファントスも亡くなった。



ディオフォントスの生涯をx年として、式で表すと、

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

となり、$x=84$が得られます。これから、次のような伝記が綴られます。

少年期14年、青年期7年を過ごし、独身12年の後に結婚(33歳)し、38歳で息子が誕生するがディオファントスが80歳のときに息子は亡くなる。そして、84歳でディオフォントスもその生涯を閉じた。

この問題は、リンド・パピルスの代数問題と大した違いもない簡単な1次方程式であり、その答えも12と7の最小公倍数から容易に予想はできてしまいます。ディオファントスは、このように単純な方程式で自分の伝記を記したことに天国で憤慨しているかもしれません。彼はディオファントス方程式という複雑な不定方程式を研究したことでも知られており、その研究により、方程式は特定問題の数の関係式を導くことから、数のすべてを類別する整数論という純粋理論へと発展していくのです。

そして、17世紀、フランスのデカルトは、未知数を今日普及している記号や符号で表す記号代数学を確立し、代数は一気に花開くのです。

代数(Algebra)はal-jabr(まとめる)を語源とし、中世では、代数学者(algebraist)は「骨をまとめる人」、すなわち外科医と同意語でした。デカルトがディオファントスを、ディオファントスがリンド・パピルスを知っていたかどうかは分かりません(あまりに年代の開きがあるのです)。しかし、代数の本質の部分は、骨の中の遺伝子情報として、数千年の時の流れの中で途切れることなく脈々と受け継がれていたのかも知れません。

220

…電卓のキーナンバー

電卓で数字遊びをしてみましょう。
電卓の数字の配列は右図のようになっていますね。

7	8	9
4	5	6
1	2	3

数字のボタンを押すルールを決めて、2桁の数を4つ作り、その和を求めます。
例えば、4隅の4つの数字を2回ずつ押すルールを決めると、4つの数11,33,77,99になり、その和は、

$11+33+77+99=220$ …①

になります。4隅の各数字に対して、2番目に押す数を5にすると、

$15+35+75+95=220$ …②

4隅の次の数を上下にある数字にすると、

$14+36+74+96=220$ …③

4隅の次の数を左右にある数にしても、

$12+32+78+98=220$ …④

最初の数を4隅ではなく、真中の5にしてみましょう。上下と左右の数を次に押すと、

$52+54+56+58=220$ …⑤

2,6,8,4の並びをぐるぐる回してみても

$26+68+84+42=220$ …⑥

このように、あるルールを決めて2桁の数の和を求めると220になることが多いようです。
面白いと思いませんか。ではどうして220という数が得られるのか調べてみましょう。
各数から5を引いた数−4〜4を配置してみます。
右図のようになりますね。ここで、先ほどの幾つかのルールを当てはめてみます。

2	3	4
-1	0	1
-4	-3	-2

まず、2桁の数を十の位と一の位に分けて、それぞれの和を求めてみましょう。
①の十の位は、1,3,7,9ですが、これは$-4,-2,2,4$に対応するのでその和は0になります。
だから、一の位も0です。
②、③、④も十の位は同じ数なのでその和は0です。それぞれの一の位の和は

②$5+5+5+5\to0+0+0+0=0$

③$4+6+4+6\to-1+1-1+1=0$

④$2+2+8+8\to-3-3+3+3=0$

もう分かりましたね。⑥についても

十位　$2+6+8+4\to-3+1+3-1=0$

一位　$6+8+4+2\to1+3-1-3=0$

このように、規則正しいルールを設定すると、十位、一位ともにその和は0になることが多いのです(その和が0になるようにルールを設定しているといった方がいいかもしれませんが)。
次に、元の数に戻すために、すべての数に5を加えると、

十位の数の和　$5\times4\times10=200$

一位の数の和　$5\times4=20$

になるので、元の数の総和は220ということになります。
さて、この原理は、3桁の4つの数の和についても応用できることが分かると思います。
例えば、4隅の数字をそれぞれ3回叩き、3桁の数を作るとその和は、

$111+333+999+777=2220$

中央の5を含むように、対角線、縦、横の和を求めると、

$159+357+456+258=2220$

中央の5を含まないように、縦、横の和を求めると、

$123+369+987+741=2220$

その他にも、

$222+444+666+888=2220$

$111+333+999+777=2220$

$456+654+258+852=2220$

真ん中の数字5がルールのkeyになっていることが分かりますね。
4桁の数はどうでしょうか。
2×2の正方形の中の数を隅を起点にして反時計回りにして4桁の数を作り、その和を求めると、

$5412+5236+5698+5874=22220$

5を除いた数の囲みの中から、隅の数を起点にして、反時計回りに4数選んで4桁の数を作り、その和を求めると、

$1236+3698+9874+7412=22220$

4桁の6数字を加えるルールを設定すると、さらに不思議度はアップしますね。この原理は数7で紹介しているカレンダーマジックにも応用ができます。ルールのある数の並びは秩序をもたらす、何か人間社会と同じですね。

3912657840

10 桁である四十億近くのこの大きな数にどんな意味があるかは、数字の並びで分かるかと思います。
0 から 9 までの数字を 1 つずつ並べてできる数であり、このような数を小町数といいます。

小町数の総数は 10 桁めが 0 のものを除くと、

$$10!-9!=3265920\text{ 個}$$

これだけたくさんある小町数の中で、表題の数にどんな特徴があるでしょう。
この数は 1 から 10 までのすべての数で割り切れるといったら驚きますか。

でも、それほど大したことではないのです。なぜならこのように割り切れる小町数は、11459 個もあります。

1 から 10 の各数を素因数分解すると、右表のようになります。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	2^2	5	$2\cdot 3$	7	2^3	3^2	$2\cdot 5$

このことから、1 から 10 までのすべての自然数で割り切れるためには、小町数は因数 $2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ があればいいことが分かります。すべての小町数の各位の数の和は 1 から 9 までの和より 45 です。各位の数の和が 9 の倍数であればもとの数は 9 の倍数より、すべての小町数は 9 の倍数になります。また、10 で割り切れるためには 1 の位は 0 になります。

$2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ から $3^2\cdot 2\cdot 5$ を除くと $2^2\cdot 7=28$ 。すなわち、下二桁が 10 の小町数が 28 で割り切れればいいのです。

ここで、4 の倍数の判定は下 2 桁が 4 の倍数であり、7 の倍数の判定は、下位から 3 桁ずつ順に奇数番目は加え偶数番目は引いた数が 7 の倍数であることから、この条件を満たす小町数は、結構な個数になることは予想できるのです。

もっとも小町数の総数に対しては 0.35%であり、割合としては小さいのですが。

さて、その 11459 個の中でもこの小町数の性質は傑出しています。

数の並びから適当な場所の 2 桁をとってみましょう。

39, 91, 12, 26, 65, 57, 78, 84, 40

9 個の 2 桁の数が得られますが、元の小町数は、これらのどの 2 桁の数でも割り切れるのです。

小町数を素因数分解してみるとその理由が分かります。

$$3912657840=2^4\times 3^2\times 5\times 7^2\times 13\times 19\times 449$$

どの 2 桁の数も合成数であり、その因数はこの素因数分解の中にみつけることができます。

三百万個以上もある小町数には、このような個性的な数がいろいろあります。幾つか紹介しましょう。

2438195760 は、何と 1 から 18 までのすべての数で割り切れます。当然、2 倍した数もその性質を満たすことになりますが、その数は、4876391520、やはり小町数になっています。この性質をもつ小町数は他に、

4753869120,　3785942160

が知られています。

小町数にちょっと足りない(0 が使われていない)987654321 は、小町数を生みます。

$$987654321\times 2=1975308642$$

3 の倍数以外の数 2,4,5,7,8 を掛けたものはみんな小町数になります。

小町数は素数ではありませんが、素数を誘う小町数もあります。

小町数 1234567890 に 1 を加えた数 1234567891 は素数です。そして、2 数の並びをつないだ 12345678901234567891 は素数であり、さらには 1234567891234567891234567891 も素数といったら信じられるでしょうか。

次の 3 つの小町数は、三人小町です。

9876543210,　1234567890,　8641975320

その理由は、

$$9876543210-1234567890=8641975320$$

2 つの小町数の差が残りの小町数を表します。

ここで、小町数 1234567890 の末尾の 0 を先頭に移して 0123456789 としてお色直しをします。

$$9876543210-0123456789=9753086421$$

また新しい小町数がふらふらと寄ってきました。

数の先頭に 0 がある場合も(ネオ)小町数として許すと、0429315678 は際立った性質を披露します。

$$0429315678=04926\times 87153=07923\times 54186=15846\times 27093$$

小町数が小町算により表現できるのです。

このように、いろいろな小町数が千紫万紅で咲きほこるのですが、単独の小町数の性質としては、3912657840 は凄いと思うのです。この小町数の性質は、言い換えると、「その約数が数の並びにすべて見えている」とみることができます。そのため、小町数 3912657840 はヌード小町とも名付けられているのです。そして、このようなヌード小町は、他には存在しないのです。

ちなみに、9517634280 は素因数分解すると、$9517634280=2^3\times 3^2\times 5\times 7\times 11\times 17\times 19\times 1063$

この小町は、1 から 12 までの数で割り切れます。また、数の並びから適当な 2 桁の場所を選ぶと、下 2 桁の 80 を除いてすべての数で割り切れます。残念ながら、最後の 1 枚がめくることができないのです。命名するならばセミヌード小町ということになりましょうか。

誰ですか？、こちらの小町の方が艶かしいと思っているのは。

$\frac{1}{2}$(2)

等価のバランスをとる数

確率$\frac{1}{2}$は心理を揺さぶる数として紹介しました。でも、$\frac{1}{2}=0.5$とし、小数としてみると随分違った印象になります。0.5 は 1 を基準とした半分の割合である数。$\frac{1}{2}$は 1 を同等・同質の 2 つのものに分ける半々(fifty-fity)を示す数字です。例えば、1 枚の硬貨を投げたときに表がでる確率$\frac{1}{2}$は、表と裏が等価値としてバランスをとっている状態とみることができます。表に対して裏は対義語(反対語)ですが、そのそれぞれがハーフという関係ではなく、語句として対等と捉えます。ところが、数学の確率として考えると裏は表の余事象であり、表の否定になるのですが、それは微妙なニュアンスを含みもってしまうのです。

硬貨を投げるとき、「表がでること」の否定は「表がでない」ことであり、それは「裏がでる」ということでしょうか。まず、表がでる状態を考えてみてください。投げた硬貨を床に落とすと硬貨は何回か跳ね小刻みに振動しながら硬貨の表面を上にしてやがて止まります。このことが硬貨の表がでるということです。そうならない状態はというと、もちろん裏面を上にして止まるということもありますが、ひょっとしたら床に垂直に硬貨が立つことも起こり得るのです。硬貨の厚みが十分あればその可能性はより高くなります。確率は「同様に確からしい」状態での試行ですが、硬貨を投げるときは実際の状態ではなく表と裏しかない理想の状態を想定し、事象の否定が事象の反対に転嫁し、そこにバランスをとる$\frac{1}{2}$が生まれるのです。ところで、反対と否定の違いは何でしょうか。

反対は、語句・単語に対して意味が対をなすもの、逆を表すものであり、対義語(反対語)というように、もとの語句・単語の言葉に対して考えます。「白である」の反対は白に対して「黒である」ということになります。

これに対して否定は、語句や単語を否定するのではなく、形容詞、形容動詞、動詞、接続詞といったものを否定します。「白である」の否定は「白でない」であり、白以外の無数の色を示すため$\frac{1}{2}$でのバランスはとれなくなります。

国語という言語は多くは反対を扱い、数学という言語は否定を扱います。ただ、整数に対して「偶数である」の否定は「偶数でない」ですが、整数は偶数と奇数のみで構成されることにより、「偶数でない」ことは「奇数である」ことであり、いつのまにか反対を述べています。また、表に対して裏のように、否定が対をなす 2 値しか認めないこともあり、否定の捉え方が危うくなるのです。

数学でも否定が$\frac{1}{2}$を中心に据えることがあります。論理では、正しい、誤りが判断できる式や文章を命題といい、正しいものを真の命題、誤りであるものを偽の命題といいます。偽は真の否定であり反対でもあります。

いま、「◯◯ならば◯◯である」という命題、具体的には「人間ならば動物である」という命題を、

「動物ならば人間である」「人間でなければ動物ではない」「動物でなければ人間ではない」

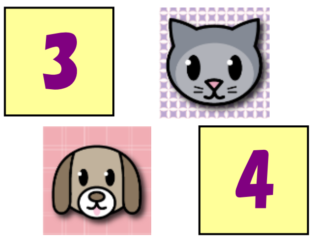
このように書き換えます。それぞれをもとの命題に対して、逆、裏、対偶といい、実はもとの命題と対偶の真偽は必ず一致するのです。上の例で確認して下さい。では、「ﾀﾞｲｴｯﾄするならば痩せる」の場合はどうなるでしょう。

逆:「痩せるならばﾀﾞｲｴｯﾄする」裏:「ﾀﾞｲｴｯﾄしないならば痩せない」対偶:「痩せないならばﾀﾞｲｴｯﾄしない」

元の文章が命題かどうかは怪しいのですが、願望的な命題？とするならば、一番納得できないのはネガティブな表現である対偶でしょう。その原因は時間にあります。「ﾀﾞｲｴｯﾄするならば痩せる」ということは「いまﾀﾞｲｴｯﾄをすればやがては痩せる」のであり、未来の予測を述べているのです。だから対偶は、痩せないことは現在とし、ﾀﾞｲｴｯﾄは過去のこととみて、「痩せないのはﾀﾞｲｴｯﾄしなかったからである」。すっきりしましたね。

パズルをひとつ。

> 4 枚のカードがある。カードの片方の面には、数字が書かれていて、もう片方の面には犬と猫の絵が描かれている。いま、4 枚のうち、2 枚のカードは、3 と 4 の数字、残り 2 枚のカードは、犬と猫の絵が見える状態で机の上に置いてある。このとき、
>
> 「奇数のカードの裏は犬の絵である」
>
> という仮説が正しいかどうかを調べたい。最初にめくるのは 3 のカードである。では、2 枚めはどのカードをめくればいいだろう。

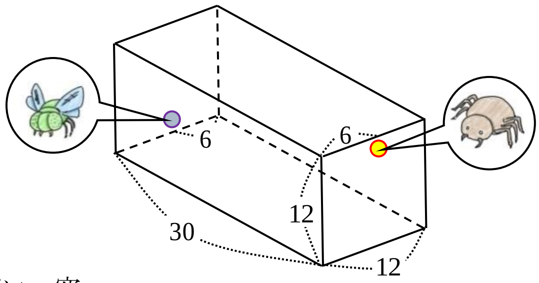


犬のカードではありません。「犬のカードの裏は奇数である」は逆を示します。逆は真なりという言葉に騙されてはダメですね。正解は、もちろん猫のカードです。

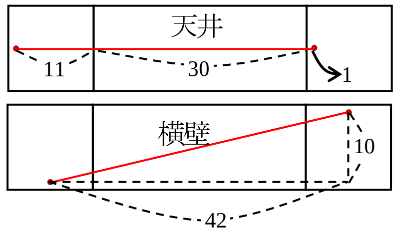
このように、ある命題に対して、否定を用いて得られる対偶は、等価の命題であり fifty-fifty の関係にあります。否定することがいつのまにか$\frac{1}{2}$のバランスをとっているのです。

1905年1月18日。Daily Mail紙が掲載したパズルにより霧の都ロンドンを大衆の大きな関心と驚きに包まれます。

> 幅30フィート、奥行きと高さがともに12フィートの直方体の部屋がある。正方形の壁の1つには、天井から1フィート下の中央の位置に蜘蛛がいる。またもう一方の正方形の壁には、床から1フィート上の中央の位置に蝿がいる。蜘蛛が壁・天井・床を伝い這いながら、静止している蝿のところまで行くとき、その最短距離は何フィートだろうか。



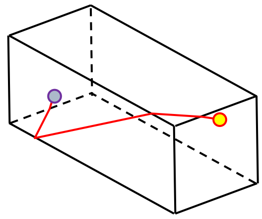
読者の多くの解答は、蜘蛛は正方形の壁を上に進み、壁に垂直に天井を伝い、突き当りの正方形の壁を下に進むというものでした(あるいは、床に降り、また這い登ってもいい)。その場合の距離は、$1+30+11=42$ (フィート)



しかし、パズル愛好家達は、この手の問題は厚紙の直方体を考えて2つの正方形の壁と手前の長方形の壁の部分を展開して蜘蛛と蝿を結べばいい、としたり顔に講釈し、その距離は、

$$\sqrt{42^2+10^2}=\sqrt{1864}=43.174 \text{(フィート)}$$

としますが残念ながら単純に天井を這うルートより長くなってしまい臍を噛むことになります。

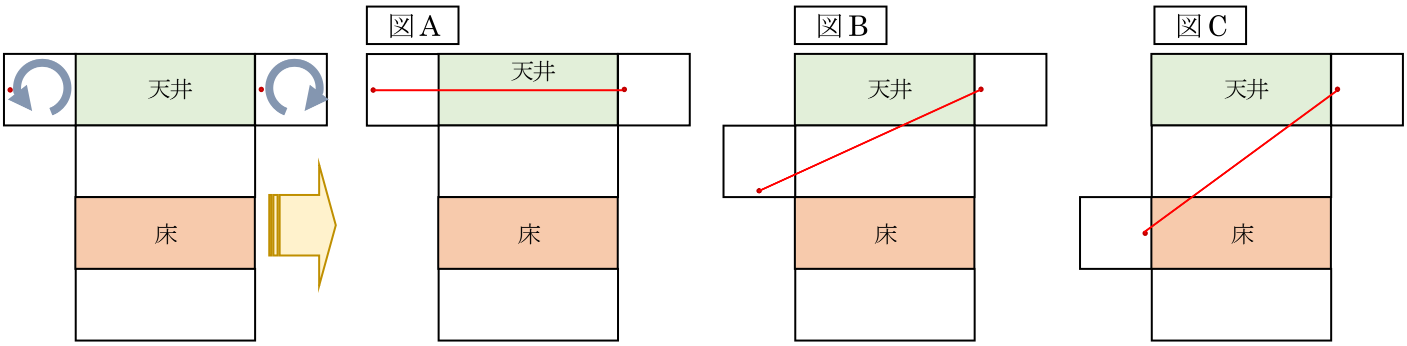


結局、答えは42フィートという誰もが納得するつまらない結論に至ります。ところが、出題者であるパズリストのデュードニーが提示した答えはなんと40フィート。経路は、壁、天井、横壁、床、壁と、蜘蛛は立方体の6面中の5面を通過するという信じられないものだったのです。

直方体の展開図から蜘蛛と蝿を結ぶ直線を求める考え方に間違いはありません。しかし、その展開図の数は16通りにもなります。それは下左図のように、長方形を4枚縦に並べ、天井の両側に蝿と蜘蛛がいる正方形の壁を配置し、蜘蛛がいる右側の正方形は時計回り、蝿がいる左側の正方形は反時計回りに90°ずつ回転させて下の長方形に移してみると分かります。ここでは、蜘蛛の位置を天井からaフィート下、蝿の位置を床からaフィート上の位置に配置した展開図を考えてみましょう(aの取りうる値の範囲は、$0 \leqq a \leqq 6$)。この中で、蜘蛛と蝿の相対的な位置が同じものについては除くと、その展開図の数は9通りになります。さらに、蜘蛛と蝿を直線で結ぶと展開図からはみ出してしまう、ある展開図での距離は別のそれよりも明らかに長い、こういったものを除くと展開図の数は激減し下図のA,B,C図の3図だけになります。A,B,C図の最短距離をそれぞれ、L_A, L_B, L_cとすると、

$$L_A=42,\quad L_B=\sqrt{(36+a)^2+(18-a)^2}=\sqrt{2a^2+36a+1620},\quad L_C=\sqrt{(30+2a)^2+24^2}=\sqrt{4a^2+120a+1476}$$

で各図の最短距離は求められます。



したがって、$a=1$のときは、$L_A=42$、$L_B=\sqrt{1658}=40.719$、$L_C=\sqrt{1600}=40$であり図Cが最短経路になるのです。

aの値によってどの図が最短経路になるか調べてみましょう。

$L_B<L_A$のときは$a<3.37$。$L_C<L_B$のときは$a<1.65$、$L_C<L_A$のときは$a<2.23$

これから、右表のように距離の大小関係が得られます。

aの範囲	距離の大小
$0<a<1.65$	$L_C<L_B<L_A$
$1.65<a<2.23$	$L_B<L_C<L_A$
$2.23<a<3.37$	$L_B<L_A<L_C$
$3.37<a<6$	$L_A<L_B<L_C$

アメリカのパズリストのサム・ロイドはデュードニーの好敵手として知られていますが、彼もこのパズルが随分気に入ったようで、$a=3$の場合を出題しています。今度は、図Bが最短経路で図Cが一番長くなります。ロイドのデュードニーに対する気持ちが垣間見えます。後に、デュードニーは自著「カンタベリー・パズル」に彼の有名問題と一緒にこの問題も再掲しています。その解説では、$a=2,3,4,5,6$の場合の解答を読者に委ねているのですが、これもまた、その読者の一人にサム・ロイドを暗に意識しているようで、その駆け引きは面白いものがあります。

$a=1$の最短経路は読者をミスリードさせ、さらに経路は5面を通るという意外性があり、なおかつその結果は40フィートという整数値で得られます(この値は3,4,5のピタゴラス数の8倍になるよう工夫されているのです)。

数40はデュードニューというパズリストと彼の知的パズルを生んだモニュメントの数といえるのではないでしょうか。

e^{π}

超越数の中の超越数

円周率πやネイピア数eは無理数(循環しない無限小数)ですが有理数を係数とする多項式の解としては得られません。このような無理数を超越数といいます。例えば、$\sqrt{2}$は$x^2=2$の解なので超越数ではないフツーの無理数で、これを代数的数ともいいます。

2 つの数の近似値は、

$\pi = 3.141592653589723846\cdots$　　　$e = 2.718281828459045\cdots$

ですが、では、この 2 数を組合せて作った数は超越数でしょうか。

2 数の和$\pi+e$と積πeは、少なくとも一方は超越数であることは 1971 年、ブルベイカー(D.Brubaker)により示されています。その証明は簡単なものです。

$p=\pi+e,\ q=\pi e$

とおき、p,qはともに代数的数であるとします。

2 次方程式$x^2-px+q=0$の解は、左辺を因数分解すると$(x-\pi)(x-e)=0$。

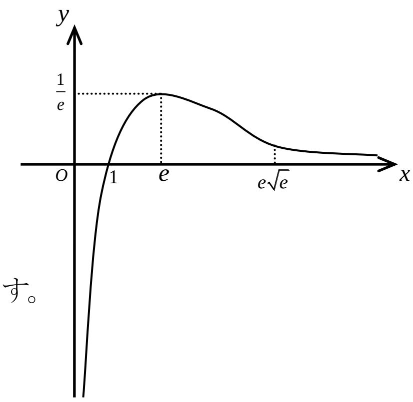
これより、$x=\pi,e$となります。

代数的数を係数とする多項式の解は代数的数なのですが、πとeは超越数(代数的でない数)ですから矛盾しています。

すなわち、p,qの少なくとも一方は超越数ということになるのです。ただ、この証明は 1 つの数が超越数で他方が代数的数または超越数であることをいっているだけで、$\pi+e$とπeのどちらがその超越数であるかは分かりません。

超越数の判定は難しいものなのです。では、2 数を用いて作られるべき乗π^e、e^π、e^e、π^πは超越数でしょうか。

この 4 つの数の大小関係は、関数$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$のグラフから見ることができます。



$f(x)$は$x=e$で最大値をとることから、$f(\pi)<f(e)$。

すなわち$\dfrac{\log\pi}{\pi}<\dfrac{\log e}{e}$より$e\log\pi<\pi\log e$。これから$\pi^e<e^\pi$となります。

また$e<\pi$より明らかに、$e^e<\pi^e,\ e^\pi<\pi^\pi$ですから、

$e^e<\pi^e<e^\pi<\pi^\pi$

この 4 つの数の中で唯一e^πだけが超越数であることが次の定理により証明できます。

> αを代数的数(ただし、$\alpha\neq 0,1$)、βを有理数でない代数的数とするとき、α^βは超越数である。

ゲルフォントとシュナイダーにより独立して証明された指数関数の値の超越性に関する定理です。

この定理を用いると、$\alpha=2$、$\beta=\sqrt{2}$とすると、$2^{\sqrt{2}}$は超越数ということになります。でも、e^πは$\alpha=e$、$\beta=\pi$として適用することはできません。そこでさらに次の公式を用います。

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$　$\cdots\cdots(*)$

これは、複素解析で重要な働きをするもので、オイラーの公式といわれています。

特に$\theta=\pi$であるとき、

$e^{i\pi}+1=0$

円周率、ネイピア数、そして実数と虚数の単位である 1(0)とiがひとつの式の中に出現します。物理学者ファインマンは「至宝の公式」といいましたが、これは神が人間に与えた公式ともいえるのです。

$e^{i\pi}=-1$の両辺を$-i$乗してみましょう。$(e^{i\pi})^{-i}=(-1)^{-i}$より、$e^\pi=(-1)^{-i}$。

なんとも不思議な結果が得られます。ここで$\alpha=-1$、$\beta=-i$とすると、aは代数的数であり、βは有理数でない代数的数ですから、e^πは超越数であることが示されるのです。

ちなみに(*)において、$\theta=\dfrac{\pi}{2}$とすると、$e^{\frac{\pi}{2}i}=i$。両辺をi乗すると、$e^{-\frac{\pi}{2}}=i^i$。

iのi乗は実数になることも不思議ですね。

さて、e^πは超越数であることが証明されましたが、その近似値を求めると、

$e^\pi=23.140692632779269005\cdots$

数の並びをよくみてください。1 の位と小数第 1 位、2 位にチャッカリ円周率の 3.14 が顔を出していることが分かりますか。さらに見ていくと円周率の並びの一部 926 も見受けられます。そこでe^πとπの差を計算してみると、

$e^\pi-\pi=19.9990999\cdots$

その値は整数 20 に限りなく近づきます。e^πとπはともに超越数ですが、その差が超越数であるかは分かりません。でも、ちょっとこちら側の世界に近づいてくれているようで嬉しいと思いませんか。

6

………輪廻転生する数

6 はそれ自身を除く約数 1,2,3 の和がもとの数 6 に等しい性質をもち、ユークリッドはこれを完全数と命名しました。6 は自然数で最初に現れる完全数ですが、ギリシャ時代では他の意味においても完全であることの象徴でした。

ピュタゴラス学派が発見した最初のピュタゴラス数 3,4,5 は、三平方の定理である

$$3^2+4^2=5^2$$

を満たすだけでなく、その周の長さの半分は 6 であり、その面積もまた 6 になります。

ピュタゴラス学派は、最初の偶数 2 を女性数、根元の数である 1 を除く最初の奇数 3 を男性数と考え、その積である 6 を健康、愛そして結婚を表す数としています。互いに離れることのない結婚はまさに完全であることの象徴なのです。後世、聖アウグスティヌスは「6 は完全ゆえに、神は世界を 6 日間で作り上げ、その 6 日間の神の仕事がなければ世界はたいらのままであったろう」と述べています。

女性数 2 と男性数 3 を 1 辺とする立方体の体積の積は、$2^3\times3^3=216$ ですが、ピュタゴラスはこの数を神聖視したと言われています。6 の累乗は最後の桁が常に 6 になるため循環的な数であり、6 の 3 乗である 216 日は受胎の後、胎児が母体に留まる最短の日数と考えられました。そして、古代ギリシャの書物には、ピュタゴラスの輪廻転生の周期もまた 216 日であると記されています。その転生で彼は過去に植物であったこと、動物であったことを主張し、自然界すべてのものが幸福になれると信じていました。さらには太陽系のすべての惑星(ピュタゴラスは宇宙をコスモスと名づけました)に生物が生息しており、地球から遠く離れるほどその生命体は人類より進化しているとも考えました。だから創始者であるピュタゴラスを学派の人達は地球外の高度な生命体(宇宙人)であると見ていたようです。

そして数は純粋であり、物質的な変化に影響を受けることのない神のように尊大であり、「万物は数である」とし、「数はもっとも知恵あるもの」と考えました。自然界のモノの基準である数は粒子(有理数)でなければならず、学派は粒子論を説くようになり、白い衣服をまとう教団へと転じていきますが、やがて無理数の発見により教義は破壊し滅んでしまいます。

しかしその思想は、ピュタゴラスの影響を受けたプラトンへと受け継がれます。プラトンの著書「饗宴」は、彼の師であるソクラテスに招かれた 5 人の客がギリシャ神話のエロス神を称える対話で進められる恋愛論ですが、6 を神聖化した愛と結婚が語られるのです。著書「メノン」では、ソクラテスに「魂は不死であり、その輪廻の過程ですべてのことを経験してきており、学ぶことはそれを想い起こすことである」(アナムネーシス:想起説)と語らせ、ピュタゴラスの思想を発展させています。

また、プラトンの著書「国家」の第 8 巻には、後にプラトン数と呼ばれる不可解な数の記述がありますが、ここにも完全数 6 が隠されています。数 3,4,5 はそれぞれ、政治家、市民、法律を表し、これを 3 辺とする直方体の体積 60 は国家を意味すると考えました。その体積の 4 乗である 12,960,000 は国家の存続日数であり、この聖数がプラトン数であると後世の学者は分析しています。プラトン数は、年に換算すると 36,000 年(1 年は 360 日とします)。これらのすべての数は 6 により形成されているのです。

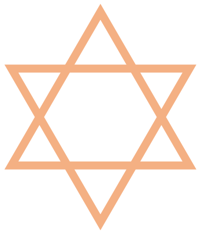
そして数 3,4,5 の立方数の和は、

$$3^3+4^3+5^3=6^3$$

この等式は、1 辺の長さ 6 の立方体は 1 辺の長さが 3,4,5 である 3 つの立方体に分割できることを示しています(実際、もとの立方体を 8 片に切り離すことで 3 つの立方体が組めることが知られています)。連続した 3 つの整数 x,y,z,w に対して、

$x^n+y^n+z^n=w^n$ と分解することができるのは、$6^3=216$ 以外にはなくこの美しい数 216 もまた聖数と考えられました。

なお、イスラム圏ではこの世を立方体の 6 面のカゴとみなし、人間はその中に捕らえられており、視覚、聴覚、触覚、味覚、嗅覚の五感と地、水、風、火の四大に束縛されて抜け出ることはできないと考えました。



また、ヘルメス神秘主義の六芒星形は、上向き、下向きの 2 つの正三角形を組合せて作られますが、上向きの三角形は、善・努力・創作の象徴、下向きの三角形は、物質・悪・破壊の象徴であると考えられ、これにより精神－物質、神－混沌、空間－時間の両極を示すことになり、宇宙が形成されると説いています。

どちらも、ギリシャ思想と比較すると、ネガティブな神秘性に包まれていますが、それでも世界の創造という面では同じ価値観に基づいているのです。

さて、近世、216 を魔法陣の中に封じ込めたパズリストがいます。その名はデュードニー。

彼は、縦、横、斜めの積が一定になる 3×3 魔法陣で、その積が一番小さいものを発見しました。その積は 6 の 3 乗の 216 であり、右のような魔法陣が作られます。歴史(思想史)に登場する 6 に対する彼なりの解釈なのでしょうか。

12	1	18
9	6	4
2	36	3

もう一つ、6 の不思議な性質を紹介しましょう。

連続する 3 つの整数で一番大きな数が 3 の倍数であるものを考えます(連続する 3 整数は必ず 3 の倍数になります)。その最小のものは 1,2,3 であり、その和は $1+2+3=6$ 。これが完全数の定義でした。
最大数が 3 の倍数である連続する 3 つの整数で次に現れるのは、4,5,6 ですが、その和は $4+5+6=15$ 。次に、15 の各位の数の和を求めると、$1+5=6$ 。また 6 になりました。ひょっとしたらと思いませんか。その予想を適当な数で調べてみましょう。
例えば、214,215,216 とします。

$$214+215+216=645 \quad \Rightarrow \quad 6+4+5=15 \quad \Rightarrow \quad 1+5=6$$

このように、各位の数の和を 1 桁になるまで計算することを続けていくと、その最終的な和は必ず 6 になるのです。
プラトン数についても計算して、同じ結論になることを確認して下さい。

このように人類が数 6 を聖数化する以前に、既に神によって数 6 には輪廻転生のシステムが組み込まれていたのです。

$\dfrac{239}{169}$

………無理数に背伸びする有理数

$\dfrac{239}{169} = 1.41420110834\cdots$　小数で表しその数の並びをみると、どこかで出会ったような気がしませんか。

「ヒトヨヒトヨニヒトミゴロ…」。そうです。無理数$\sqrt{2}$の小数点以下の位の値ですね。$\dfrac{239}{169}$は有理数による無理数の近似値として知られている数なのです。もちろん、小数第5位からは違ってしまいますが、いい線いっているのではないでしょうか。

この近似値は、次の写像により繰り返しxを代入することで求められます。

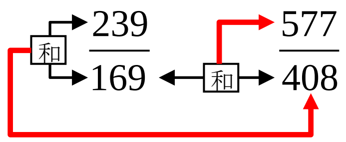
$$x \to \frac{x+2}{x+1} \qquad (x = \frac{x+1}{x+2} \text{とすると、} x(x+1) = x+2 \text{より、} x>0 \text{のとき} x=\sqrt{2})$$

最初にxに代入する値として、$\sqrt{2}$に近い整数$x=1$を考えます。計算すると次の近似値が項の値として返されます。

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}, \frac{8119}{5741}, \frac{19601}{13860}, \frac{47321}{33461}, \frac{114243}{80782}, \frac{275807}{195025}\cdots$$

これらの各項の値は簡単に求めることができます。

$x = \dfrac{b}{a}$としましょう。このとき、$\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{\frac{b}{a}+2}{\frac{b}{a}+1} = \dfrac{(a+b)+a}{a+b}$



これから、ある項からその次の項を求めるには、ある項の分子と分母の和を次の項の分母にし、その分母とある項の分子の和を分子にすればよいのです。このように求めて14番目の分数を小数にすると、

$$\frac{275807}{195025} = 1.41421356236379951288\cdots$$

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880\cdots$$

$\sqrt{2}$の値と比較すると小数第10位まで正確な値が得られています。

ではこれよりもっと速く無理数の値に近似できる式はないでしょうか。

$x=a$のとき、$\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{a+2}{a+1}$ですが、この値をまた$\dfrac{x+2}{x+1}$に代入してみましょう。

$\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{\frac{a+2}{a+1}+2}{\frac{a+2}{a+1}+1} = \dfrac{3a+4}{2a+3}$　　そこで次の写像を作ります。$x \to \dfrac{3x+4}{2x+3}$

$x=1$を初期値として順に計算していきましょう。

$$\frac{7}{5}, \frac{41}{29}, \frac{239}{169}, \frac{1393}{985}, \frac{8119}{5741}, \frac{47321}{33461}, \frac{275087}{195025}, \cdots$$

先ほどの近似の値が倍の速さで返されていることが分かりますね(倍返しです)。このように考えれば、3倍返し、10倍返しも作れそうですね。次にさらにこの近似値のスピードを速くしてみましょう。

紀元前に活躍した古代ギリシアの数学者ヘロンは次の近似値を得る写像を見つけています。

$$x \to \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

この写像は、相加相乗平均の関係$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$において、$b = \dfrac{2}{a}$として得られたものです。

$x < \sqrt{2}$とすると、$\dfrac{x}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$より、$x < \sqrt{2} < \dfrac{2}{x}$となります。これから、$x$と$\dfrac{2}{x}$の平均は$\sqrt{2}$に近づいていくわけです。

$x=1$から順次、項を求めてみましょう。

$$\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \frac{886731088897}{627013566048}, \cdots$$

この数列をヘロン数列といいます。その5番目の値は小数にすると1.4142135623730950488016896235020…。

$\sqrt{2}$に小数第23位まで一致し、さらにステップを繰り返すと近似値は速まります。こうなるともう100倍、1000倍返しの世界ですね。そして同様に$\sqrt{n}$の近似も$x + \dfrac{n}{x}$や$\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{n}{x}\right)$で求めることができます。$\dfrac{239}{169}$はこのような近似値の値の入口にある手頃な分数といっていいでしょう。

8

…無限(∞)の数

奇数の平方同士の差は８の倍数になります。奇数を平方すると、

$$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1 \quad (n\geqq 2)$$

すなわち「奇数の平方は８の倍数プラス１」です。その差を求めると、連続する２整数の積$n(n+1)$は偶数であることより８の倍数になることは明らかですが、このことを古代の人達はすでに知っており、このような数８の数学的性質や神秘性に関心と興味を持っていたようです。８の興味深い性質をもう一つ。

ナルシスト数は３桁の数では「各位の数の３乗の和が元の数に一致する数」であり、$153(1^3+5^3+3^3=153)$がよく知られています。８はナルシスト数でありませんが、３乗してから各位の数の和を求めてみると、

$$8^3=512 \rightarrow 5+1+2=8$$

すなわち、８は「３乗の各位の数の和が元の数に一致する数」なのです。なんとなくナルシスト数に似ていますね。でもナルシスト数ほど自己愛的ではなく、もっと根源的な数であり、仮にリビドー数とでも命名しましょう。
17もその仲間です。

$$17^3=4913 \rightarrow 4+9+1+3=17$$

このような「３乗の各位の数の和が元の数に一致する」リビドー数はそれほど多いわけではありません。なぜなら、数が大きくなると３乗した数の各位の和がもとの数の大きさに追いつかなくなってしまうからです。

数Nはn桁の数とします。$10^{n-1}\leqq N<10^n$ですから、$10^{3n-3}\leqq N^3<10^{3n}$。
このときN^3の各位の数の和が最大になるのは、$(3n-1)$桁の数で各位の数がすべて９の場合です(３乗してそういう数があるとすればですが)。そのとき各位の数の和は、$(3n-1)\times 9=27n-9$　になります。すなわち$N=27n-9$ということです。Nの最小数は10^{n-1}ですが、$n=3$のとき最大数Nは$N=72$であり、Nの最小数100より小さくなっています。このことより、このような数Nがある桁nは$n=1,2$の場合だけなのです。

次にN^3は最大５桁の数なので、

$$N^3=a\times 10^4+b\times 10^3+c\times 10^2+d\times 10+e \quad (0\leqq a,b,c,d,e\leqq 9)$$

とおきます。ここで$a+b+c+d+e=N$であることより、

$$N^3=a\times 10^4+b\times 10^3+c\times 10^2+d\times 10+(N-a-b-c-d) \quad \text{より} \quad (N-1)N(N+1)=9(1111a+111b+11c+d)$$

右辺は９の倍数より、$N=9k,9k\pm 1$の形の数であることがわかります。
以上よりNの候補は、1,8,9,10,17,18,19,26,27,28,…,89,90,91,98,99の33個です。
これらの数に対して実際に計算すると、残りの仲間が見つかります。

$$18^3=5832 \rightarrow 5+8+3+2=18$$

$$26^3=17576 \rightarrow 1+7+5+7+6=26$$

$$27^3=19683 \rightarrow 1+9+6+8+3=27$$

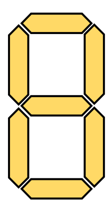
結局、リビドー数は、1,8,17,18,26,27の僅か６個しかないのです。

リビドー数は、特別な数である１を除けば、最初の数が８であり、３乗して各位の数の和を求め、その数をまた３乗し各位の数の和、これを繰り返すと無限に８が再生されていきます。８の文字は90°回転させると無限∞を表します。ミトラ神秘主義においては、７つの門の次に開かれる神の山で８つめの門は光の国でありまさに無限の果であるわけです。キリスト教においても、キリスト復活は８日目であるため８は聖数として敬い、８は人間の体と魂に永遠なる至福を保証するとしています。

また、中国では、森羅万象を４つに分類しさらにそれを２つに分けるという考え方があり、八卦、八音、八方、八徳、八仙、八紘など８をひとまとめにすることが多く、家には永遠の繁栄と発展をもたらすものとして、赤い∞の紐を幾重にも合わせた縁起物の装飾品が飾られています。北京オリンピックの開催式は2008年８月８日午後８時08分の８尽くしの時間に開催されたことは大きな話題になりました。

無数の島からなる日本は、古代は大八州と呼ばれ、日本人も８を聖数と考えました。八百万の神、八岐の大蛇、八幡様といった神を示す言葉が多く残っています。漢数字「八」は末広がりの字体であることから永遠と繁栄を示す吉数であり、八百屋、八面六臂、八百八町、八重桜で用いられる８はたくさんということを意味するのです。

そして数八は「当たるも八卦、当たらぬも八卦」、「一か八かの勝負」、「口八丁手八丁」、「七転び八起」、「傍目八目」のように庶民の間に末広がりに広がっていきます。
このように、多くの国の歴史の中で８は信仰と生活に密接に結びついているのです。



８は２の３乗ですから、リビドー数でこれをさらに３乗することは２の９乗を計算することになります。数２はパソコンの基盤となる２進法を示す数です。8bitパソコンの開発競争からコンピュータは急速に発達し、世界は情報化社会の歩みを始めました。８は時代の寵児の象徴であり、アナログ社会からデジタル社会への転換を与えた数なのです。アナログ時代に数８は無限を表しましたがデジタル時代の数８はデジタルパネルの点滅で右図のように浮かびます。デジタル数８は０から９のすべての数を含み無限の繰り返しを映します。ここにも永遠があるのです。

157

…一粒の素数の合同数

ピタゴラス数は、直角三角形で各辺の長さがすべて整数である 3 数の組ですが、そのときの直角三角形の面積はもちろん有理数です。3 辺の長さをa,b,c（c は斜辺）とすると、$(a,b,c)=(3,4,5)$ は有名なピタゴラス数ですが、このときの三角形の面積は 6 で整数になります。このように、直角三角形の 3 辺が有理数で、その面積sが整数であるとき、整数sを合同数といいます。ピタゴラス数は、$a=m^2-n^2$ 、$b=2mn$ とすると、

$$a^2+b^2=\left(m^2-n^2\right)^2+(2mn)^2=m^4+2m^2n^2+n^4=(m^2+n^2)^2 \quad \text{よって、} c=m^2+n^2 \text{ であり、} s=\frac{ab}{2}=mn(m^2-n^2)$$

このようにピタゴラス数は幾らでもに作り出すことができるので合同数も簡単に求められます。
$m=2,n=1$のときは先ほどの$(a,b,c)=(3,4,5)$ であり $s=6$。$m=3,n=2$ のときは、$(a,b,c)=(5,12,13)$ となりこれも有名なピタゴラス数で、$s=30$。すなわち 6 と 30 は合同数です。

この合同数を探す歴史はとても古くは 2000 年以上前のギリシャ時代の文献にも記録があります。そして、現代でも未解決問題として研究されているのです。ナゼ?と思いませんか。合同数はピタゴラス数から幾らでも求めることができるのですからいったいどんな問題があるのでしょうか。それは、合同数は求められても、ある整数が合同数であるかどうかの判定が難しいからなのです。6 は合同数ですが、ではその前後の数 5,7 は合同数でしょうか。

先ほどのピタゴラス数を求める式で、$m=5,n=4$ とすると、$a=9,b=40,c=41$ となります。

このとき、$s=180$。だから 180 は合同数ですが、$180=6^2\times 5$と因数分解できるので、a,b,c をそれぞれ 6 で割ると、

$$a=\frac{3}{2},b=\frac{20}{3},c=\frac{41}{6}$$

このとき$s=5$ より 5 は合同数なのです。5 が合同数であることはフィボナッチ(1170-1240)が示しています。
7 については、オイラー(1707-1783)が、

$$a=\frac{35}{12},\ b=\frac{24}{5},\ c\frac{337}{60},\ s=7$$

を見つけ、合同数であることを示しましたが、この 2 人が活躍した時代には 6 世紀以上の隔たりがあります。

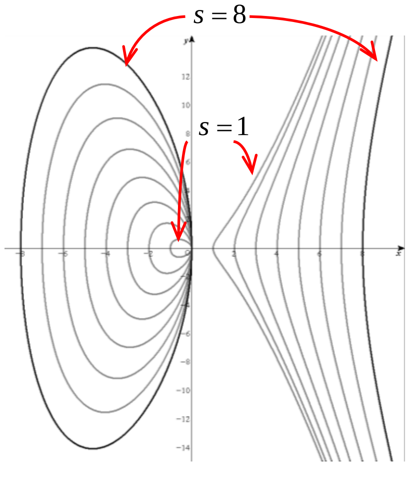
なお 1 は合同数ではないことをフェルマー(1601-1665)が証明し、その後、2,3,4 も合同数でないことも分かりました。すなわち最小の合同数は 5 ということです。このように合同数は長い年月をかけて見つけ出されているのです。

では、ある数が合同数であることをどのように調べればいいのでしょうか。a,b,c,s には次の関係が成立します。

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-2ab}{4}=\frac{c^2-2ab}{4}=\left(\frac{c}{2}\right)^2-s \qquad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+s \cdots\cdots(*)$$

ここで、$x=\left(\frac{c}{2}\right)^2$ とおくと、$x-s,\ x,\ x+s$ はすべて平方数ですからその積も平方数です。その平方数を y^2 とすると、

$$y^2=(x-s)x(x+s)=x^3-s^2x$$



(x,y) はこの関数を表す曲線(楕円曲線といいます)上の有理点になります。
有理点(α,β) が見つかれば、$\alpha-s,\alpha,\alpha+s$ は平方数ですから、(*)より、

$$a=\sqrt{\alpha+s}+\sqrt{\alpha-s},\ \ b=\sqrt{\alpha+s}-\sqrt{\alpha-s},\ c=2\sqrt{\alpha}$$

有理数a,b,c が得られます。しかし、この有理点を求めるということが大変なのです。1983 年、タンネルは合同数の判定をする次の定理を示します。

s が合同数ならば、「$s=2x^2+y^2+32z^2$ の整数解の個数」の 2 倍は、

「$s=2x^2+y^2+8z^2$ の整数解の個数」に等しい

この定理の逆も成り立つことが予想され、この 2 つの方程式の整数解を求めることで、ある整数s が合同数であるかどうかの判定ができるのです。
さらに 2 以外の素数については、素数 p を 8 で割った余りが 5,7 であれば合同数であることがいえます。これから、素数 157 は、$157=8\times 19+5$ であるため合同数です。$s=157$ は合同数であるなら面積 157 である直角三角形の 3 辺の長さは何でしょう。20 年ほど前にコンピュータ計算により初めて求められました。

$$a=\frac{6803298487826435051217540}{411340519227716149383203},\ b=\frac{411340519227716149383203}{21666555693714761309610},\ c=\frac{224403517704336969924557513090674863160948472041}{8912332268928859588025535178967163570016480830}$$

$a≒16.5,\ b≒19.0,\ c≒25.2$ という大したことのない値ですが、有理数の分子・分母は信じられない程巨大な値になってしまうのです。

この古くて新しい合同数の研究の中でフェルマー予想が生まれたのです。そして有理点を求めるために数学では非常に重要な曲線である楕円曲線が研究され、フェルマーの定理の解決に大きな貢献を果たします。そして現在では、楕円曲線の暗号理論への応用が研究されています。「直角三角形の面積で辺が有理数のものってなに」、こんな素朴で単純な疑問に端を発し、2000 年の時の流れは数学の大河となりさらに大海へといまでも滔々と流れているのです。

123

…最初の一歩を踏み出す数

2 桁以上の適当な大きな数を考えてみましょう。例えば、

31,415,926,535,897,932,384,626,433,832,795,028

35 桁の数です。この中で偶数番目の桁は 17 個あり奇数番目の桁は 18 個あり合わせて 35 桁ということです。

この偶数番目の桁の個数と奇数番目の桁の個数、そして数の桁の個数を並べて新しい数

171835

を作ります。この数についても、偶数番目の桁の個数 3 と奇数番目の桁の個数 3、そして数の桁数 6 を並べると

336

さらに同様の操作をするとその結果は、

123

となります。そして 123 の偶数番目の桁は 1 個、奇数番目の桁は 2 個、数の桁は 3 個ですからこれから作られる数は 123 でありこれ以降は不変となります。実は、どんな数を考えてもこれと同じ操作を続けると最後には 123 になり止まってしまうのです。不思議だと思いませんか。

123 は 3 桁の数とみないで「ワン、ツー、スリー」と読むと自然数を小さい順から 3 つ並べたことになります。

これは物事を最初から始めるとか基本から始めるという意味になります。「一から始める」、「イチ、ニのサン」といった掛け声がこのことを表しています。あるいは「スリー、ツー、ワン」と読みゼロまで続けると物事をリセットし、新たにまた始めるということであり、大晦日のカウントダウンはお馴染みです。

「ワン、ツー、スリー」と同じ意味を持つ言葉は日本語では「イロハ」でしょう。イロハニホヘト…の 48 音の最初の 3 文字であり、「イロハから学ぶ」は初歩から学ぶということです。

英語でもアルファベット 26 文字の最初の 3 文字「ABC」がこれにあたり非常に易しいことを「as easy as ABC」といいます。学習は読み書きするためにその言語をまず覚えます。だからどの国も文字を順番に並べたときの最初から 3 つめまでを覚えることから始めるようです。数学語ではそれが「ワン、ツー、スリー」になるのです。

さてすべての数は上述の操作で 123 に収束し不思議な現象といいましたがその理由をちょっと考えてみてください。まず、この操作では偶数番目の桁と奇数番目の桁の個数を調べるわけですから各位の数値は何でもいいということになります。1000 桁の数であれば偶数番目の桁は 50 個、奇数番目の桁は 50 個より、数 5050100 が生成され、この 7 桁の数は 347、そして 123 に収束します。1000 桁の数は全部9×10^{999}個ありますが、この天文学的な数のすべてが非常に速いスピードで桁数は縮み同じ結果になります。

結局、最初に与えられる数はなんであってもよく桁数だけの問題なのです。

その桁数は、元々の数が 2 桁の場合は、偶数番目の個数は 1 個、奇数番目の個数は 1 個ですから、数 112 が生成され、これから 123 に収束します。

元々の数が 3 桁以上の場合は、操作により急速に桁数は縮み 3 桁になります。すべての 3 桁の数は偶数番目の桁が 1 個、奇数番目の桁が 2 個ですから、123 に収束します。

どうでしょうか。実はちょっと考えてみると非常に単純な仕掛けであり、123 に収束するのは当たり前ということが分かるのです。

さて、物事を進めるときに、どう取り組んでいいか分からない、何かとても面倒な印象があり手がつかないといったことはよくあります。そこで諦めてしまうと物事は一歩も踏み出さないで終わってしまいます。でもちょっと考え、悩んでみるとその一歩は実は単純な一歩であったことに気が付くのです。だって、物事は「イロハ」、「ABC」、「123」から始まるのですから。そんな単純なことを複雑と思い諦めてしまうことが問題なのです。

「最初の一歩を頑張って踏み出す」。

ほんの少しの意欲と努力が未来を明るく照らすのです。

英語の初歩の表す「ABC」は、要素といった元(Elements)の意味もあります。数学ではこれを書名とする本があります。ギリシャ語でストイケイヤ、日本語では「原論」と訳され、BC300 年頃アレキサンドリアの数学者ユークリッドが著しました。原論は、図形の定義から始まり、5 つの公準、9 つの公理があげられ、続いて命題とその証明が全 13 巻の中にまとめられています。公準(幾何学的作図の公理)、公理(Axiom)は、命題を導くための前提とする仮定や条件であり、公理から定理が得られます。定理の元となる定理ということです。分かりやすくいうと数学の基本的ルールであり、「原論」はこのルールを元にギリシャ幾何学を体系的にまとめています。「原論」は聖書以外で現代までもっとも読まれているベストセラーであり、いまでも大学の整数論の古典としても扱われています。数学という学問は紀元前から現代の 21 世紀に至るまで「原論」のルールに従い発展し数々の定理が生み出されてきたのです。

ユークリッドの逸話を紹介しましょう。アレキサンドリアのプトレマイオス王がユークリッドから幾何学を学んでいたときその難しさにねをあげて「幾何学を勉強するのに何かよい方法はないか」と尋ねたところ、ユークリッド曰く「幾何学に王道なし」。またある人が「こんな難しいことを勉強して何の役に立つのか」と質問したところ、ユークリッドは召使いに向かって「この人にお金をおやり。この人は勉強するからには、何か得をしなくてはならないと思っているようだ」。どちらの言葉にも「原論」の精神と願いが窺えます。ユークリッドはこう続けたかったのかも知れません。

「どんな難しいことでも、ABC(123)から始まっているのだから」

1260

…不死の始祖数

1260 を構成する 4 つの数 1,2,6,0 を 2 つずつ組み合わせて 2 桁の数の組作ってみましょう。
その中の 1 つの組はは 21 と 60 ですが、その積を求めると、$21 \times 60 = 1260$ 。もとの数に一致しました。

$2n$ 桁の数で各桁の数を組み合わせて n 桁の数を 2 つ作り、その積が元の数に等しくなるような組合せが存在するとき、元の数をヴァンパイア数(Vampire number)といいます。ヴァンパイ数は数の性質としては最近のもので、1994 年に、米国のクリフォード・ピックオーバー氏(Clifford.A.Pickover)が発見しました。ヴァンパイア数の個数は、

4 桁は、1260,1395,1435,1530,1827,2187,6880　の 7 個、

6 桁は、102510,104260,105264,105750,108135,110758,…　の 148 個、

以下、8 桁は 3228 個、10 桁は 108454 個、10 桁は 108454 個、12 桁は 4390670、14 桁は 208423682 個と続き、100 桁のヴァンパイア数も見つかっています。

ヴァンパイア数の掛け合わせる 2 数をヴァンパイア数の牙(fang)といいます。1260 の牙は 21 と 60 です。なお、2 数の 1 の位がともに 0 になるときは牙ではなく、すなわち元の数もヴァンパイア数として認められません。なぜなら、ヴァンパイア数 1260 を 100 倍すると 126000 ですが、これは 1260 の牙を 10 倍した 210 と 600 の積に一致します。このように 1 つのヴァンパイア数を10^{2n}倍すると簡単に新しいヴァンパイア数が生成されることになり、由緒正しいヴァンパイアが無数に粗製乱造されてしまうからです。

ただ 126000 の中の各桁の数をちょっと入れ替えて 120600 にします。このとき各位の数より作られる 3 桁の数 201 と 600 の積は 120600 になります。これはりっぱな牙であり 120600 はヴァンパイア数です。

同じように 1206 を元にし、120000600000 のように偶数個の 0 を挿入して新たに数を作ります。そうすると、

$$200001 \times 600000 = 120000600000$$

元の数は、200001 と 600000 の 6 桁の牙をもつヴァンパイア数です。これから 1260 を用いて無限個のヴァンパイア数が生成できることになるのです。同じことはヴァンパイア数 1530 でもいえます。

このように数 1260 は数を小さい順から並べるとき、最初に現れて、新たにヴァンパイア数を生み出すヴァンパイア数ということになります。すなわちヴァンパイア数の始祖なのです。

ところでヴァンパイアの始祖といったらドラキュラ伯爵が思い浮かびます。ドラキュラはアイルランドの作家ブラム・ストーカーが 1897 年に執筆した小説に出てくる吸血鬼ですが、その本が有名になったためにヴァンパイアの固有名詞のように扱われます。しかしヴァンパイアファンにとっては、同じアイルランド人作家シェリダン・レ・ファニュが 1872 年(ドラキュラの 25 年前)に発表した怪奇小説に登場する女性吸血鬼カーミラの方が有名かも知れません。ストーカーのドラキュラはカーミラに多大なる影響を受けているようです。なおカーミラ、ドラキュラどちらもアイルランドの吸血鬼伝承を基に創作されたものであり、同様の吸血鬼伝説はヨーロッパで各地に伝えられています。最古のものは旧約聖書にあり、弟のアベルを手にかけ殺した(人類最初の殺人)アダムの長兄カインの末裔は吸血鬼になったといわれています。だから吸血鬼の始祖はカインということになります。しかしヴァンパイア数との関係ではそのアナグラムによりカーミラを始祖とした方がいいようです。

アナグラムは単語の文字を入れ替えて別の単語を作る言葉遊びです。カーミラ(Carmilla)の生前の名前はマーカラ(Mircalla)伯爵夫人であり、将軍の前ではミラーカ(Millarca)、そして語り手である少女はカーミラとして姿を現わします。これらの名前はすべてアナグラムになっています。ちなみにドラキュラ(Dracula)は偽名を使うときはアルカード(Alucard)と名乗りますがこれもドラキュラのアナグラムです。

ヴァンパイア数をみてみると、各位の数字を入れ替えて 1 組の牙が得られ、その積が元の数に一致します。すなわち数字のアナグラムを上位桁と下位桁に分けてヴァンパイア数は生成されているのです。

だから最小のヴァンパイア数にして牙により無数のヴァンパイア数を生み出す 1260 はヴァンパイア数の始祖(女王)でありこれはカーミラ数。同じように無数にヴァンパイア数を生み出すことができる 1530 は、ヴァンパイアの王であるドラキュラ数。このように命名したらどうでしょうか。

イモータル(immortal:不死者)の住人であるヴァンパイアには亜種が存在するようにヴァンパイア数にも牙が 2 組以上の亜種があります。

2 組の牙　$125,460 = 204 \times 615 = 245 \times 510$

3 組の牙　$13,078,260 = 1620 \times 8073 = 1863 \times 7020 = 2070 \times 6318$

さらには 4 組、5 組の牙をもつヴァンパイア数の亜種も見つかっています。アナグラムということではこちらの方が凄いのですが、血族を増やすことはできません。また、1 組の牙が素数である素ヴァンパイア数もみつかっていて、一番小さなものは 117067 で素数の牙 167 と 701 をもっています。

さて、ヴァンパイアは神話の頃からの不死人ですがヴァンパイア数はつい最近発見された数です。人は潜在的に不死を渇望しその象徴である不可思議な存在、ヴァンパイアに強く憧れています。ライトノベル、ロマンス小説ではヴァンパイアを主人公にした物語が量産されていて、血湧き肉踊る(というより、血すすり肉が飛ぶ)ストーリーが展開していきます。ヴァンパイアは架空の存在ですが、カーミラ、ドラキュラの物語が読者に読み継がれてきたのは心の中ではしっかりとヴァンパイアが存在し棲みついているからなのでしょう。そうしたイモータル願望の中でヴァンパイア数は生まれ、それはまだまだ鏡の中のあやふやな状態であり人により見え方も変容します。私にとっては牙はコウモリの羽に視え、羽ばたきの後にそれは突然ヴァンパイア数に姿を変えるのです。

3304

…電話をたす数

電話番号 493-7775 にある性質を見出した人がいます。市外局番と電話番号を並べてできる数 4,937,775 の各位の数の和を求めると、4937775 $\Rightarrow$ $4+9+3+7+7+7+5=42$

次に素因数分解した $4937775=3\times5\times5\times65837$ の左から現れる数字を順番に加えていくと、

$$3\times5\times5\times65837 \Rightarrow 3+5+5+6+5+8+3+7=42。$$

どちらも同じ 42 になります。あなたはこの性質を面白いと思いますか？

このような数をスミス数といい 1982 年に数学者ウィランスキーが定義しました。発端は彼の義理の兄スミス氏の電話番号が493-7775だったからでウィランスキー氏はその数字をみてこの性質を思いつき義兄の名前を拝借したのです。ところで各位の数の和を求める操作は 3 や 9 の倍数判定であり、素因数分解した数の和は完全数の判定で用いられそれぞれ数学的な意味はあります。スミス数はその 2 つの操作をいいとこどりしてさらに素因数分解の因数もまた各位の数の和にしてしまうという大胆なことをやってのけたのです。発表当時、ウィランスキーは「4937775 より大きなこの性質をもつ数を私は知らない」といい、最大のスミス数であると明言しましたが「だからどうしたの」程度で済まされるようなことが妙に関心を集め、翌年、さらに大きなスミス数があることが数学誌「マスマテック・マガジン」に掲載されました。それはすべての桁が 1 である 3 桁以上の素数に 3304 を掛けた数はスミス数になるというものです。

全ての桁の数字が 1 の数をレピュニット数といい、n 桁のレピュニット数は $R_n=111\cdots\cdots\cdots111=(10^n-1)/9$ と表されます。R_n が素数のとき $3304R_n$ はスミス数になるということです。R_n には素数はたくさん含まれるような印象を受けますが、素数の最小数は R_{19} であり、$R_{23}, R_{317}, R_{1031}$ と続きその出現は稀なのです。でもこれらはウィラクスキーの最大スミス数 4937775 を超えています。最大のスミス数を求めることは、最大のレピュニット素数を求めるということなのです。偶数桁数のレピュニット数(R_{2n})は合成数であり 11 の倍数です。(例えば、$R_6=111111=11\times10101$)。したがって奇数桁の最大レピュニット素数の個数の有限・無限性という議論に転換できることになります。

さらにその後の研究で各桁が 1 と 0 だけで作られる素数(デジタル素数)の倍数の中にはスミス数があることが証明されています。例えばデジタル素数 10111 に 3304 を掛けると、

$$3304\times10111=33406744 \Rightarrow 3+3+4+0+6+7+4+4=31$$

$$3304\times10111=2\times2\times2\times7\times59\times10111 \Rightarrow 2+2+2+7+5+9+1+0+1+1+1=31$$

このようにスミス数が生成されます。デジタル素数を小さい順に並べると次のようになります。

11, 101, 10111, 101111, 1011001, 1100101, 10011101, 10100011, 10101101, 10110011, 11000111,11100101,……

デジタル素数はレピュニット素数より出現頻度は高くスミス数が無限にあるかどうかは結局デジタル素数の個数を調べればいいのです。数字遊びから作られたスミス数は次第に素数問題へと発展しマニア達を巻き込んでいったのです。そしてのちにスミス数は無限に存在することがウェイン・マクドナルド氏により証明されるのです。

でもこれでスミス数の話題が収束してしまうことはありませんでした。ウィランスキーは義兄の電話番号を自分が知る最大スミス数として示しましたが、それに倣い「知りうる最大のスミス数は何か」を探す競争が始まるのです。

現在、インターネット上ではレピュニット素数 R_{1031} を用いて、

$$9R_{1031}\times(10^{28572}+8\times10^{14286}+1)^{1027}\times10^{272234} \quad (\text{桁数は}1031+1027\times28572+1+2722434=32,066,910\text{桁})$$

なんと桁数が三千二百万台のスミス数が報告されています。

また、スミス数のバリエーションも見つかっています。

回文スミス数(数を左から読んでも右から読んでも同じ) $\Rightarrow$ 4(最小のスミス数), 121, 3663, 17271, 832238,…

可逆スミス数(数を右から読んでもスミス数) $\Rightarrow$ 22, 58(85), 319(913), 1903(3091), 8185(5818),…

平方スミス数(平方数のスミス数) $\Rightarrow$ $4(2^2), 729(27^2), 6084(78^2), 18496(136^2), 674041(821^2), \cdots$

立法スミス数(立方数のスミス数) $\Rightarrow$ $27(3^3), 729(9^3), 19683(27^3), 474552(78^3), 7414875(195^3), \cdots$

レピュニットスミス数(すべての桁が同じスミス数) $\Rightarrow$ 22, 666(悪魔の数), 1111, 6666666, 4444444444, …

連続スミス数(連続して現れるスミス数の組) $\Rightarrow$ (728, 729), (73615, 72616, 73617), (4463535, ～, 4463538), …

※7 連続のスミス数も発見されていて、その最初の数は、164736913905

そして、フィボナッチ数列 F_n の中にもスミス数は存在します。

$$F_{31}=1346269=557\times2417, \quad F_{77}=5527939700884757=13\times89\times988681\times4832521, \quad F_{231}, \cdots$$

回文スミス数は「スミス」そのものが回文ですからニヤッとさせられます。並びの美しい回文スミス数もあります。

$$1234554321=1111\times111111=11\times101\times3\times7\times11\times13\times37 \quad (\text{両辺の数の和は}30)$$

2 連続のスミス数は発見者のウィランスキーと義兄のスミスをなぞらえているのでしょうか。数字遊びから始まったスミス数には自分も遊びたがっている数学者やマニアの姿がその背後に伺えて何とも楽しい気分になるのです。

「スミス数は数学者たちの気高い努力をどこまでも吸い取る底なしの穴」。こう評した人がいますが穴に落ちてこそ味わえる楽しさもあるのです。今回のテーマの数 3304 はスミス数でなくスミス数を生み出す数、すなわちスミス数の発見に真面目に取り組む人達のことです。また副題の「電話(番号)をたす数」は電話を掛ける(call)をもじっています。

どうでしょうか。あなたはスミス数の性質を面白いと思いますか？。

111111111

…始まりから終わりに至る数

1 が連なる 9 桁の数を瞬時に 1 から 9 までのすべての数を用いた数に変えてみましょう。

$$(111111111)^2 = 12345678987654321$$

衝撃的なマジックのように思われますが原理を知ってしまえばこれは単純な数の操作であることが分かります。

数の各桁が 1 だけである数をレピュニット数(*Repunit Number*)といいます。レピュニットは *Repeated Unit* の造語で、コピー数 1001 で紹介しています。コピー数は上位の桁に数をコピーする性質があり、例えば 345 に 1001 を掛けると 4 桁以降に 345 がコピーされて 345345 になります。レピュニット数はコピー間隔が 1 のコピー数であり 123 に 11 を掛けると 1230+123=1363。コピーされた数が元の数に重なります。111 に 111 を掛けると 111=100+10+1 ですから 1 桁ずつ上位に 2 回ずれてコピーされるため、3 桁目は 3 個重複、2 桁目と 4 桁目は 2 個、1 桁目と 5 桁目は重複なしで、3 桁めを対称に右表のようにコピーされて値 12321 になるのです。だから 9 桁のレピュニット数を平方すると、1 が最大重複する桁は 9 桁めであり、この桁を中心に上位と下位に対称に重複個数は 1 個ずつ減ってコピーされます。その結果 12345678987654321 という美しい数が浮かび上がります。では 9 桁のレピュニット数に 10 桁のレピュニット数を掛けるとどうなるでしょう。これは 10 桁に 9 桁を掛ける(大きい桁のレピュニット数に小さい桁のレピュニット数を掛けるとみる)と分かりやすくなります。10 桁のレピュニット数は 8 回左に 1 つずつずれるので 9 桁めと 10 桁めの重複が最大になります。結果は 1234567899987654321 です。同様に 20 桁のレピュニット数に 9 桁のレピュニット数を掛けると 9 桁目の最大重複が上位の桁の向きに $(20-9+1=12)$ 回連なりその数は 12345678999999999999987654321 になります。

		1	1	1
	1	1	1	
1	1	1		
1	2	3	2	1

では 10 桁のレピュニット数の平方はどうなると思いますか。9 回ずれてコピーされることから 10 桁めは 10 個重複します。だから位が繰り上がり 0 となり 11 桁目に 1 がひとつ増えます。11 桁目は 9 個の 1 に繰り上がった 1 を加えてまた繰り上がり…さて、あなたが予想した値が正しいか実際に計算してみてください。

レピュニット数の性質を利用して 3304 に n 桁のレピュニット数を掛けてみましょう。n 桁のレピュニット数を R_n とします。R_n を掛けると 3304 の各位は 1 つ上の桁に 1 回ずつ $(n-1)$ 回にずれてコピーされます。右図は R_7 の場合です。さて各桁にコピーされた数の和は元の数 3304 の各位の数の和が 10 であることから面白いことが起きます。1 桁目は 4、2 桁目は 0+4=4、3 桁目は 3+0+4=7、4 桁は 3+3+0+4=10、5 桁目も和は 10 ですが 4 桁目で繰り上がった 1 があるので 1 になり、以降これが暫く続きます。また R_n を掛けた数は、$n+4-1=n+3$ 桁であり最高位は 3 でその下の桁は 3+3、その下は 3+3+0=6、その下は 3+3+0+4 ですがこれに下位から繰り上がった 1 が加わり 3+3+0+1=7 になりその下位は 1 が続きます。連なる 1 の個数は $(n-4)$ 個であり、積の値の各位の数の和は $3+6+7+(n-4)+0+7+4+4=n+27$

						3	3	0	4
					3	3	0	4	
				3	3	0	4		
			3	3	0	4			
		3	3	0	4				
	3	3	0	4					
3	3	0	4						
3	6	7	1	1	1	0	7	4	4

$$367\underbrace{111111111\cdots\cdots11111111}_{(n-4)個}0744$$

だから何なのと思うかもしれませんが数 3304 ってどこかで見たことがありませんか。

そう、スミス数を生成する数です。スミス数は数を素因数分解したときに現れる 0 から 9 の数を桁や演算を無視してすべて足すとき、もとの数の各位の数の和に一致するというトボけた性質をもった数です。$3304R_n = 2\times2\times2\times7\times59\times1111\cdots1111$ より、もし R_n が素数ならその和は $2+2+2+7+5+9+n=n+27$。積 $3304R_n$ はスミス数になります。したがって最大のスミス数を見つけるには最大の素数のレピュニット数を探せはよいのです。

さて、$R_2=11$ は素数ですが $R_3=111$ は 3 の倍数より素数ではありません。$R_4=1111$ はどうでしょうか。その判定には 1111 に潜むコピー数が活躍します。11 を 3 桁以上にコピーするとみれば $1111=11\times101$ であり R_4 は合成数になります。同様に R_8 は 1111 をコピーしたと考えると因数 10001 が見つかります。また、11 を 4 回コピーしたと考えると 1010101 も因数です。このように桁数 n が合成数であるものはすべてコピー数で分解できるので R_n は合成数になります。したがって素数であるレピュニット数は R_n の桁数 n が素数であるものに絞られるのです。では R_5 は素数でしょうか。残念ながら $R_5=41\times271$ であり素因数分解できます。以下、桁数が素数である R_n を調べてみると、

$$R_7 == 239\times4649、R_{11}=21649\times513239、R_{13}=53\times79\times265371653、R_{17}=2071723\times5363222357$$

レピュニット素数はなかなか姿を現してくれませんが、やっと R_{19} で素数になります(デュードニーの新聞のパズル欄をみた読者が発見しました)。その後の素数は $R_{23}, R_{317}, R_{1031}$ でその出現はほんの僅か。新たな素数の発見の報告もあり R_{270343} がそうではないかということですが検証はされていません。したがって現在確認できている最大のレピュニット素数は R_{1031} であり素数は全部で 5 個しかないのです。だから最大のスミス数は R_{1031} を用いて表されています(スミス数の項を参照)。

レピュニット数で素数が少ないということは素因数が多いということでもあります。1 を並べただけのシンプルな数なのにその懐は深く多くの数を手駒にもち、カプレカ数や循環小数を演出することが知られています。

最後にちょっとした速算を紹介しましょう。12345678987654321 にこの数の各位の数の和を掛けてみましょう。

$$12345678987654321\times(1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1)$$

電卓ではオーバーフローになってしまう値ですがこの文を最後まで読まれたあなたは瞬時に計算できるはずです。

$$111111111^2\times9^2 = 999999999^2 = (10^9-1)^2 = 10^{18}-2\times10^9+1 = 999999998000000001$$

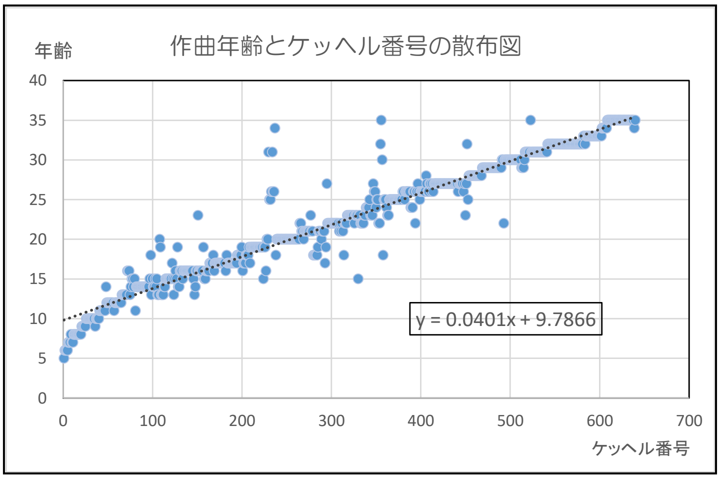
111111111^2 から始まったレピュニット数は 1 から 9 のすべての数を登場させて、最後は 999999999^2 で締めくくるのです。

626

…モーツアルトを奏でる数

稀世の天才作曲家モーツァルト(Wolfgang Amadeus Mozart)に関わりのある数字と言えばケッヘル番号でしょう。

ケッヘル番号は 1862 年にオーストリアの作曲家ルートヴィヒ・フォン・ケッヘルが編纂し出版した「モーツァルト全作品主題目録」の作品整理番号で、作曲年代順に曲を時系列に並べたものです。例えば、「交響曲第41番ハ長調K.551 ジュピター」のように表記し、K.1 番から未完の「レクイエムニ短調 K.626」までの番号が振られています。これからモーツアルトの生涯の作曲数は626 曲(実際には断片的な曲まで含めると900 曲以上)ということになります。モーツアルトは1756 年1 月 27 日に生まれ、1791 年 12 月 5 日、35 歳 10 ヶ月の若さで永眠します。晩年は自身の天才ゆえの品行の悪さや周囲の妬みなどが災いしてか不遇でありその死も毒殺との説があります。モーツァルトは 3 歳のときにはチェンバロを弾き始め、5 歳で最初の作品 K.1 番クラヴィーアのためのメヌエットを作曲しています(後にモーツァルトの姉が彼に嫉妬して破ってしまったと言われた同時期の作品アンダンテ、アレグロが見つかり、K.1 は a～f の 6 曲あります)。そして 8 歳のときは「交響曲 1 番変ホ長調 K.16」(小編成約 12 分の曲)を発表します。正に神童とはモーツァルトの代名詞といってもいいのです。モーツァルトは作曲を始めてからの 30 年間に 600 曲以上作曲しているわけですから 1 年間に平均して 20 曲以上を発表していることになり常人には考えられない多さです。モーツァルトがどれだけの期間で 1 つの作品を発表しているかを調べるために、横軸にケッヘル番号、縦軸に年齢をとって散布図を描いてみると、右表のようになります。ところどころ飛び出した点があるのは、後世に不明だった曲が見つかりケッヘル番号に狂いが生じたためですが、点の集合全体は直線で近似できるのです。その直線の方程式は $y = 0.0401x + 9.7866$ であり、



$$Y = \frac{1}{25}K + 10$$

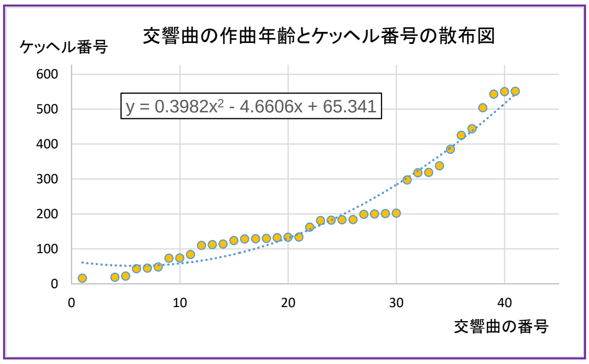
とみていいでしょう。この直線がモーツァルトの偉業を示す軌跡なのです。式の K に値を代入するとその作品を作曲したときのモーツァルトのおおよその年齢が分かります。ただ、y 切片の値から $Y > 10$ 。この式からは 10 歳以上の年齢しか得ることはできません。10 歳未満で交響曲を作曲していること自体が常識外れなのです。いくつか値を代入してみましょう。

$K = 492 \rightarrow Y = 29.68$ 　1786 年 5 月 1 日(30 歳)、オペラ「フィガロの結婚」をブルク劇場で初演

$K = 550 \rightarrow Y = 32$ 　1788 年(32 歳)、3大交響曲 39 番(K.543)、40 番(K.550)、41 番(ジュピター)(K.551)作曲

$K = 626 \rightarrow Y = 35.04$ 　1791 年(35 歳)、謎の紳士よりレクイエム作曲の依頼を受けるが作曲途中で他界。後に彼の弟子ジュースマイヤーが補筆し完成(ヴェルディ、フォーレと合わせて三大レクイエムという)。

このようにケッヘル番号からモーツァルトの年譜を辿ることができます。ここからさらに彼の41曲の交響曲だけを抜き出して同様にケッヘル番号との相関を示したのが右表です。直線ではなく二次曲線の近似になっています。作曲家にとって交響曲は主義や作風の集成であり転換・転機となりシンフォニストの立場を確立するものです。しかしモーツァルトにとっては節目のポイントに交響曲があるわけではないのです。表で横軸に平行な点が多いのは1つの時期に立て続けに作曲していることを示します。1772 年には第 15 番から第 21 番までの 7 曲、翌年の 1773 年から 2 年間にかけて 9 曲を作曲しています。この 3 年間で全体の4割近くを作曲し最後の3曲も 1 年(1788 年)での作品です。当時はまだ二管の楽器編成が主でありオーケストレーションも複雑ではなかったので交響曲も作曲しやすかったのかも知れません。しかしモーツァルトにとって音楽は天上から調べが頭の中に降りてくるものでありそれを何の楽器で奏でるかということはさほど問題ではなかったともいえます。宮廷や教会の依頼により作曲していた職業音楽家達にとって作曲は生きる糧でありモーツァルトも例外ではなかったのです。



モーツァルトが活躍した 17 世紀後半は音楽史上では古典派音楽の時代です。モーツァルト誕生の 6 年前にバッハが亡くなると同時にバロック音楽は終焉を迎えます。ルイ16世統治の元、王侯貴族は裕福であり豪奢を極める一方で庶民は貧困に喘いでいる時代でもありました。その中でローマ帝国の優雅な都市ウィーンを中心として宮廷や教会の専属音楽士による和声(ホモフォニー)豊かな音楽が育っていきます。同時代の音楽家にはハイドン、ベートーベン、シューベルトがいます。ベートーベンやシューベルトは古典音楽をより円熟したロマン派へと橋渡しをして音楽家の自由を希求しましたが、モーツァルトはレイクエムが彼を死へと誘ったように職業音楽家として古典派音楽に幽閉されてしまったのです。

1965 年公開のフランス映画「幸福」は、女性監督アニエス・ヴァルダの感性が溢れた映画でした。家族のピクニックのシーンでは美しい自然の中に家族のしあわせが舞います。そのバックに流れていたのが「クラリネット五重奏イ長調 K.581」。モーツァルト 33 歳の頃の作品です。彼が愛した楽器クラリネットが奏でる珠玉の輝きを放つ旋律。こんな小品の中にこそモーツァルトがほんとうに表現したかった音楽の幸せが涙のように滲んでいるのではないでしょうか。

23

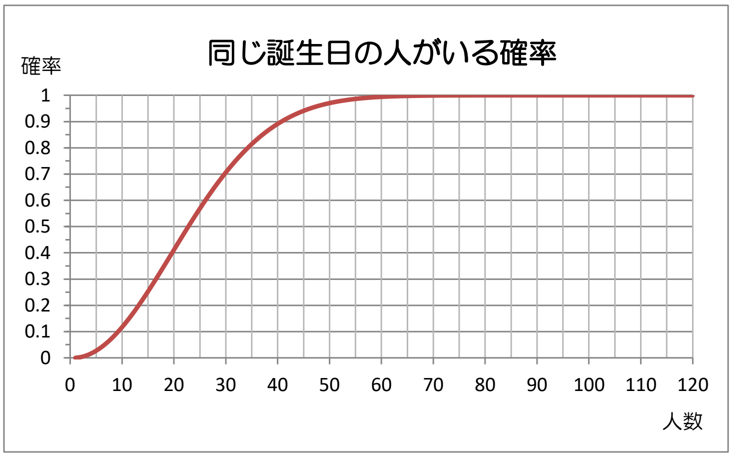
飛行機で座席が隣り合った２人が会話をしている。「私の知り合いに小樽の岡部さんという人がいるんですけど、この人が凄い人でして…」、「小樽の岡部さん、ひょっとして◯◯◯のあの岡部さん、……、やっぱりそうですか。実は私も岡部さんのことは知っているんです、偶然ですよね」。有りそうな話ですがでもこれって偶然なのでしょうか。

友達同士がたまたま同じ飛行機の隣の席に座っていたらこれはビックリすることでしょう。でも初対面同士が隣り合っている場合に２人に共通の知り合いがいる確率はそれほどビックリするようなことではないのです。マサチューセッツ工科大学での研究によると１人あたりの知り合いが 1000 人の場合、その確率は 100 分の１でありさらに自分の友だちが知っている友人(直接は知らないけど友達から噂では聞いている)まで連鎖して範囲を広げるとその確率はなんと 100 分の 99 にグンと跳ね上がるのです。これは人口３億のアメリカでの統計ですから１億ちょっとの日本ではもっと確率は高くなり「世間って狭いよね」ということになります。

恋人同士の関係は初対面からお付き合いの一歩が始まりますがではその出会いは果たして偶然だったのでしょうか。赤い糸で小指が結ばれていた２人の恋の必然、あるいはどちらかが偶然と見せかけて出会いを演出した故意の必然という可能性もあるかもしれません。またコインを投げて表裏の出る確率はどちらも 1/2 ですが、コインによっては表面の肖像のレリーフの膨らみが確率を変えてしまうことがあります。あるいはコインを投げ上げるときほんのちょっとした指の動きで確率は変わります。空中での空気の流れも表裏の出方に影響するでしょう。確率は自然の状態での推測ですが自然そのものが悪戯をすることだってあるのです。だから自然をも凌駕できるよう論理では根元事象の起こり方が同様に確からしい理想的な環境の下で数学的確率が考察されます。これに対して人は数学的確率と現実の事象の起こり方のギャップを埋めるために可能な限り単純な観察・経験など試行の繰り返しを通し統計的な確率で挑もうとします。それでも生じる僅かな違いをベルヌーイは「大数の法則」により埋められることを示しました。数学的確率は等価な事象の起こり方の組合せであり定められた結果の過去を試行錯誤(偶然)で積み上げても未来は必然なのかもしれません。統計的確率は些少である故意(必然)の積み重ねとみても変動する未来は予測できず結果は偶然なのかもしれません。しかし偶然の積み重ねは必然、必然の積み重ねは偶然であってもどこかに偶然と必然の境目はあるはずです。

「n 人の中に誕生日が同じ人がいる確率」は偶然かそれもと必然かという話題はその意外性からよく話題に取り上げられます。$n=1$ のときはもちろん確率は０です。$n=366$ のときは、鳩の巣原理により必ず同じ誕生日の２人は存在し確率は 1(うるう年は考慮しません)になります。$2 \leqq n \leqq 365$ では、余事象を利用してその確率 p を求めます。

$$p=1-\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}\times\cdots\cdots\times\frac{366-n}{365}$$



右表は人数と確率の関係を表したものです。それほど多くはない人数で確率１に近づくのが分かります。90/100 を超えるのは 41 人であり学校の１クラスの中には誕生日が同じ人がいる確率は極めて高いのです。さらに 95/100 の確率(有意水準5%)を超えるのは 47 人であり、57 人では 99/100 を超えてしまいます。

また 1/2 の確率を超える人数は 23 人です。365 の日にち(誕生日)に対してその回数の 10 分の１にも満たない人数で５割を超えてしまうのは意外として映るのです。そしてこの意外性のもうひとつの原因は錯角にもあります。確率は人の身ではなく我が身のことを考えることが多いわけですから誕生日が同じ人がいるとした場合、そのひとりを自分に置き換えてしまいます。そして自分と同じ誕生日の人がこの集団(クラス)にいるなんてことはそれほどないだろうと結論づけてしまうのです。

ちなみに「n 人の中に自分と同じ誕生日の人がいる確率」は

$$1-\left(\frac{364}{365}\right)^{n-1}$$

となります(自分を除いて同じ誕生日の人がいることは起こりえます)。これから 40 人のときの確率は 1/100 でありほとんど同じ誕生日の人がいることは期待することはできません。確率が $1/2$ を超える人数は 253 人。１学年で可能性は五分五分といったところ。そして 99/100 を超えるには 1679 人を必要とするのです。

これを誕生日ではなく星座十二宮で考えると分かりやすいかもしれません。星座が同じ人がいる確率が 1/2 を超えるのは５人、95/100 を超えるのは８人です。自分と同じ星座の人がいる確率が 1/2 を超えるのは８人、95/100 を超えるのは 35 人です。すなわち８人では同じ星座の人がいる可能性は非常に高いのですがその中の１人が自分である可能性は五分五分でしかないのです。

さて、世間が狭いということは人の話(噂)の拡散スピードが速いということでもあり、ひとつの話題に絞って話をするとあっという間に広まってしまうことになります(徐々にその話題が脚色されて伝わりますが)。これが現代ではインターネットのブログ・ラインにより瞬時に噂は電子の世界にコピーされ、さらにそこを飛び出しリアルな世界を駆け巡るのです。やっかいなのはそれが記憶だけでなく記録として残ることでしょう。諺「人の噂も七十五日」という忘れてしまえる人の美徳はそのうち忘れ去られてしまうのです。

2

…表裏一体の数

1 ではなく 2 であるといったら,「第 2 の人生」,「2 度目」,「2 部」,「2 軍」,「2 番手」のように 1 の次に来る数でありでちょっと遅れをとっているようなイメージでしょうか。

ドイツの詩人(東洋哲学者)のフリードリヒ・リュッケルト(1788-1866：東洋的な抒情詩がマーラーやシューベルトなど多くの作曲家を魅了し曲を付けたことで知られています)は，著書「婆羅門の知恵」の中で，数 2 を評して

2 は疑念，分裂，不和…，2 は分裂の双生児で，甘く苦い

としています。何とも否定的な表現であり, 1 つのものが分裂あるいは派生してできる二面的な部分を指摘しています。すなわち，表に対する裏，陽に対する陰，美に対する醜，能動に対する受動…，対立的構図を設け，善に対する悪のように，片方を引き立てるための分裂であり 2 つを対等に扱っているわけではないのです。

「婆羅門の知恵」にある言葉を幾つか拾ってみると，

・古いものはけっして古くない。新しいものが古くなっただけである。
・愚者は最後に，利口者は中間で，賢者のみが第一歩で目標をとらえる。
・真の友情は，前と後ろのどちらも同じもの。前から見ればバラ，後ろから見ればトゲなどというものではない。

どの言葉も，対比によって 2 つのうちの 1 つを強調していることが分かるでしょう。

では，数の世界では 2 の立場はどうなのでしょう。

「2 つを合わせ，2 で割る」という数の計算は演算の意味を考えてみると面白いものです。

$$1+1=2 \ \Rightarrow 2\div 2=1$$

ということであり，一見すると 2 回の操作で 1 に戻ったように見えます。しかし加減の演算は外延量，乗除の演算は内包量です。感覚的にいうなら 2 数の和は一次元であり積は 2 次元ですから，次元が違っています。「2 つを合わせ，2 で割る」ことによって，元と異なる 1 を作り出しているのです。それは「水と塩をかき混ぜて」食塩になることであり，「水と油を混ぜて」も 2 層に分かれて戻るということではないのです。$\frac{1+1}{2}=1$ は 2 数の平均であり同じ数 1 ですが，概念的には異なっています。そう考えると数 2 の人が捉えるドロドロとした排他的なイメージと異なり，対等であり融合的，発展的であると言えるかも知れません。

また，$2+2=2\times 2$ のように「足しても掛けても同じ値になる 2 つの自然数」は「2 つの 2」しかありません。

2 つの自然数 a,b に対して，$a+b=ab$ より，$(a-1)(b-1)=1$ これから，$a=b=2$ となることが分かります。

このようにみると 2 は他の数と異なり特殊な立場にもあります。

自然数 x,y,z が $x^n+y^n=z^n$ を満たすとき，$n=2$ は，ピュタゴラスの定理であり x,y,z は直角三角形の三辺を表します。しかし $n≧3$ の自然数 n に対しては「そのような 3 つの数の組は存在しない」とフェルマーは予想しました。

2 より大きいすべての偶数は，2 つの素数の和で表されることを予想したのはゴールドバッハです。

このように 2 は容易に胸襟を開いてくれるのですが，2 より大きい数は殻を閉ざすのです。

その代表的なものが素数でしょう。2 は最初の素数であり唯一の偶数の素数です。ちょっと言葉遊びをすると,「2 以外のすべての素数を英語で書くと必ず e を含む」ことが知られています。

$1\cdots one$　　$3\cdots three$　　$5\cdots five$　　$7\cdots seven$　　$9\cdots nine$

1 桁の奇数のどのスペリングにも e が含まれています。2 以外の素数は奇数より，必ず 1 桁目に e が含まれるのです。ところで e は数学では自然対数の底であり，ネイピア数とも呼ばれる超越数です。e の値は，$e=2.7182818284\cdots$ であり, 整数部分は2 です。これから奇数の素数の中にはスペリングとして2が潜むとみることはあまりに強引でしょうか。しかし，素数が 2 を用いて表現されるかどうかは素数の殻を開くために重要なことなのです。

メルセンヌは，$M_n=2^n-1$ が素数ならば，n は素数であることを証明しています。さらに，2^n+1 が素数ならば，n は2 のべき乗であることが導かれます。では，この逆の「$F_n=2^{2^n}+1$ は素数である」は言えるでしょうか。フェルマーは，$F_0=3,\ F_1=5,\ F_2=17,\ F_3=257,\ F_4=65537,\ F_5=4294967297,\ \cdots$ と計算を続けた結果，素数であると予想しました。しかし 100 年後，オイラーは，$F_5=641\times 6700417$ を示し，フェルマーの予想は潰えます。その後フェルマー素数は見つかっておらず，いまだ現在まで知られているのは $M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3, M_4$ の 5 つしかないのです。また,

「p が素数である正 p 角形のうち，定規とコンパスだけで作図可能なものは p がフェルマー素数のときのみである」

ガウスが証明したこの定理により，新しいフェルマー素数の発見は，最大の素数を見つける道であると同時に正多角形の作図可能性を調べることにもなるのです。$n>5$ であるフェルマー素数を探す研究はいまも続けられています。

さて，このように数 2 は，独立性，特殊性を内在しながらも他の数の拡張に大きく影響を与え，まさに表裏一体の面を併せ持つのです。そしていま，2 は 1(表)と 0(裏)の 2 つの数字で万物を表裏で表現する世界へと我々を誘います。

そう，2 進法で構築される電子の世界です。2 進法での数の表現可能性を最初に示したのはライプラッツでした。

「ここには光と闇が書き込まれている。空虚な深みと形なき闇はゼロと無になるが, 光を放つ神の霊は全能の 1 となる」

彼は, 1 を神，0 を無とみなし，陰陽の 2 つの数だけで表現される表裏の世界に神秘的な何かを感じていたのでしょう。

そして，情報社会の現在では，0 と 1 に変容した 2 は深く深く電子データの中に浸透し，拡散しています。新しい世界の女王となった数 2 は，唯一神として君臨しているのです。

0

…存在と非存在に揺れる泡のような数

目の前にあるのに手を伸ばすと消えてしまう。数０は淡い夢のような存在かもしれません。

エレベータで降下すると，３階，２階，１階，そして次の階は地下１階になります。０階がないのに誰もそのことを不思議議とは思いません。雪降る頃になり，1°，0°，－1°と温度が下がると，0°の存在を否応でも肌身で感じることでしょう。人は０の存在をときに意識したり，ときに意識しなかったり。その境界は何なのでしょうか。

０の概念はインドで十進位取りの空位を埋めるものとして考案されました。インド仏教では空の概念は教義の象徴であり，空であることと無であることを区別していました。器に水を注ぐとき，水がない状態が空であり器がないこととは違います。器そのものがないときが無なのです。数０は位取りの器であり，その中に様々に変容する数０(Sunya)の概念が注ぎ込まれました。やがてインドを征服したイスラム教国のアラビアに０は伝わります。神は宇宙を無から創造したとするイスラム教徒は「存在しない０」の概念についても受け入れます。9世紀になると，バグダードの数学者アル・クワリズミは算術書「Al-jabr」を著し，その中でインド数学を紹介します。従来の算盤を用いた計算とは異なり数字だけで一次方程式や二次方程式を解くことができる記数法は画期的なものであり，代数学という数学領域の基盤が確立されるのです(ちなみにAlgorithmや代数学を示すAljebraは彼の名と著書から派生した単語です)。しかしヨーロッパの国々への０の浸透は滞ります。算術書がアラビア語で書かれていたことも理由の一つですが，それ以上に，無限や無のようなあやふやな存在に対する抵抗感や，０が悪魔を呼び出す魔法陣を象る円形○に似ていることの恐れなどがキリスト教徒にはあったからです。フランスでは価値のない人間を「位取り記数法のゼロ」と呼び揶揄しました。また当時の流行歌からもそのことを読み取ることができます。

「人形が貴族になり，ロバがライオンになり，猿が王様になったら，０も数になれるだろう」

しかし12世紀に「Al-jabr」の翻訳が出版され，13世紀に入ってイタリアの数学者フィボナッチが，著書「算盤の書」でインドの計算術を紹介し，複雑で難しい計算や通貨の換算を容易に処理することができるインド式計算術の素晴らしさにイタリアの商人や銀行家は飛びつきます。さらに，活版印刷の考案により書物の大量印刷が可能となったことで０の概念は火をつけたようにヨーロッパ全土に広がっていきます。ローマ数字は追放され，０および１から９の10個の数字で表現するアラビア数字(算用数字)の時代の訪れです。エルサレム修道院の所蔵書に当時の様子が記されています。

「すべての数は１から始まる。だがいまやそれは０からである。何とも不思議なことである」

このように０は，信仰，学問，経済の発達と微妙に絡み合い見え隠れしながら根付いていったのです。

そのため０には他の数と異なり不可侵のルールがあります。

ホテルでは０階は地上階といいます。西暦では紀元０年はなく，紀元前と紀元後をまたぐとき１年分が消えてしまっています。数学では，「０の除算は認めない」という呪文が掛けられています。

さて，日本では明治になると西洋数学が伝えられ，漢数字で表された和算は次第に算用数字の数学に淘汰されます。ところで０は日本語でどう読むでしょうか。レイ，それともゼロ，どちらでしょう。それぞれ漢字で書くと，零，○となります。二種類の読み方があるのは，日本でも数の歴史は０の存在と非存在に翻弄されたからなのです。

和算は実用的な学問であり，旅人算，鶴亀算，植木算などの算法は，測量，建築，歴法などのいろいろな分野で活用され，算盤，算木，曲尺を用いて具体的な数値を求めています。その数値は極めて精度の高い小数値でした。大工が家を建てるとき，曲尺片手に職人技で小数値を計測するのです。尺貫法では，分，厘，毛，糸，忽，微，……，空，清，浄のように小数以下の桁にも名称があります。分数で表現するとスッキリするのに，これほど小さい数に拘るのは日本人以外にはいないかもしれません。和算は小数文化の学問といえるのです。さて，このような霞のような数値を漢字では「零」と書きます。すなわち存在する０(レイ)のことです。零はわずかの意味であり零細などの言葉や，澪などの単語にも使われています。これに対して○(ゼロ)は，位取りとして存在を表すこともありますが，無という意味もあります。

日本語はその違いをレイとゼロで巧みに使い分けています。さて，右下の文の９つの０は，どちらの読み方でしょう。

今日の欠席者は…，０人だね。
さて，天気予報では降水確率0%の晴天だけど，
先生の心は雨で濡れている。理由はテストの結果だ。
平均42点で標準偏差は0.7
前回のテストと比較すると一気に頂上から急直下して
海抜０メートルまで落ちた生徒がいる。
あり得ないことだけど３人が０点だ。
なんでsin0°の値は０と答えられないんだ。
頭の中の思考が絶対０度になって凍りついている。
この分野の理解度はほとんど０だ。

・欠席者は，まったくいない(存在していない)のでゼロ人です。
・天気予報の降水確率は１の位を四捨五入して示します。0%は5%未満のことだから，レイ%と読みます。
・0.7はもちろんレイです。でもこれが，0.3010である場合は，どうでしょうか。レイ.3ゼロ１ゼロと読まないでしょうか。
・海抜は温度と同じで０を基準とする高さなのでゼロです。
・０点はレイ点。どうして得点がないのにレイなのでしょう。例えば千点満点ではひょっとしたら１点ぐらいは貰えたのかもしれません。百点満点では中間点に満たなかったという意味でレイなのでしょう。白紙の答案はゼロ点というべきかもしれません。
・角度の0°と正弦の値の０はもちろんゼロです。
・絶対０度は，絶対零度と書きますね。シャルルの法則より温度の下限値の存在は証明されていますが，その下限値でも原子は僅かながら振動しているのです。そのおおよその温度が–273.15°であり，正確には分からないのでレイになります。
・ほとんど０は，ほとんど存在していないと読み替えれば，ゼロとすべきかもしれません。

どれだけ正解しましたか。存在，非存在に関わらず，少しは数０を身近に感じることができたのではないでしょうか。

197

…フェルマーに迫った女性数

数学は女性に嫌われがちな学問ですが，数学もまた女性を嫌っていた歴史があります。厚く高い聳え立つ見えない壁は女性が踏み込むことを頑なに拒み，優れた数学的才能を摘み取ってしまいました。

ヒュパティアは，西暦 400 年頃のアレキサンドリアの女性数学者です。この時代はまだ学問は女性に対して寛容であり，新プラトン主義の学園には女性学徒も多く，その中でもヒュパティアは比類なき偉大な数学者として知られていました。彼女の数学は思想を基盤とする学術的，科学的なものであり，結婚しようとしない理由を問われた彼女は「真理と結婚しているから」と答えたということです。しかしその合理主義的な思想はやがてキリスト教徒の反感を買い，聖四句節の日に狂信者の手にかかり惨殺されてしまいます。

19 世紀のロシア帝国の女性数学者ソフィア・コワレスカヤ(1850-1891)は，女性が高等教育を受けることを国が認めなかったため，偽装(契約)結婚をして国外に脱出します。ドイツそしてパリに渡った彼女は，そこでも女性差別のため権威ある役職に就くことはできず 41 歳の若さでなくなります。このように数学を学ぼうとする女性に対して数学はいつも『不遇』という冷たい運命を突きつけました。

そして，コワレスカヤの時代から 70 年程遡ったフランス。同じソフィアの名前の数学者が画期的な研究成果を発表します。彼女の名前はソフィ・ジェルマン(1776-1831)。フェルマー(1601-1665)がノートの余白に書き残したフェルマー予想「$x^n+y^n=z^n$, $xyz\neq 0$, $(n\in N,\ n\geqq 3)$ を満たす n は存在しない」の証明に大きな前進の一歩を彼女は残すのです。

「証明はできたがそれを書く余白がない」～意地悪な挑戦とも取れるフェルマーのメモに後生の数学者は奮い立ちますが，100 年の後に天才オイラー(1707-1783)でさえも $n=3$ を証明するのがやっとでした。なおオイラーは，n が素数の場合の証明をすれば十分であることは知っていました。例えば $n=6=2\cdot 3$ のときは，$(x^2)^3+(y^2)^3=(z^2)^3$ より，$n=3$ で存在しないならば $n=6$ でも存在しないことが分かるからです。これもフェルマーが $n=4$ の場合をピュタゴラスの定理を用いて証明したことがヒントになっていたからでしょう，しかし，依然，$n\geqq 5$ の素数 n の場合の証明は霧の中にあり，オイラー以降は証明の道筋は途絶えてしまうのです。

それから半世紀の後，当時の数学の巨星ガウス(1777-1855)の元に，一通の手紙が届きます。ル・ブランという紳士からの書簡には整数論の研究成果が載っておりガウスはその優れた内容に驚嘆します。彼こそが彼女，ソフィ・ジェルマンでした。ソフィは女性の論文では相手にされず破棄されてしまうことを恐れ，男性名でガウスに手紙を送ったのです。

フランスの裕福な家庭に生まれたソフィは社交界の嗜みとして会話に必要なある程度の知識を学ぶ必要があり，そのために読んだ数学史の中のアルキメデスの逸話に興味を惹かれます。アルキメデスはローマ軍が侵略の際に地面に書いていた幾何図形を兵士が踏みつけたことに憤慨し，「踏みつけるな」と怒鳴ったことで逆に兵士に槍で刺し殺されます。殺されてしまうほど夢中になれる数学を自分も学んでみたいと彼女は思ったのです。社交の嗜みを超える専門的な学問をしようとする娘に両親は困惑し，ろうそくや衣服を取り上げ，さらには部屋の暖房も切りますが，やがてはその熱心な向学心に折れます。しかし当時の高等学校は女性に門戸を開いていなかったので彼女はル・ブランという男性名で学校に潜り込むのです。結局はその非凡な才能は講師であったラグランジュの目に留まり正体を見破られてしまいますが，才能を惜しんだ彼は指導者として支え協力することになります。そして研究の成果をソフィは数論の権威であるガウスに送ったのでした。その書簡の中にはフェルマー予想の発展的な解法についても述べられていました。

素数 n に対して $2n+1$ も素数であるものを考えます。

$$n=2,3,5,11,23,29,41,53,83,89,113,131,173,179,191,\cdots$$

このような素数をソフィ・ジャルマン素数といいます。ソフィは xyz がこれらの素数で割り切れない場合にフェルマー予想は成立することを証明したのでした。すなわち，xyz がソフィ・ジェルマン素数 n で割り切れる場合の証明ができれば，フェルマー予想は証明されたことになります。ソフィはそれまでのように素数を個別に考察するのではなく，一般化した包括的な n で証明を試み，このことにより途絶えかけていたフェルマー予想の研究が再燃します。

そして，ル・ジャンドルは n が素数で，$2n+1, 4n+1, 8n+1, 10n+1, 14n+1, 16n+1$ の 6 つの奇数で一つでも素数が存在すれば xyz が n で割り切れない場合にフェルマー予想は成立することを示します。6 つの奇数がすべて素数でない最小の素数 n は，$n=197$ なのでこれより小さい素数については部分的に証明ができたことになります。そして彼は $n=5$ については完全証明を与えるのです。その研究はラメ，コーシー，クンマーなどの数学者に引き継がれていきます。

さて，こうして紳士としてガウスと親交を深めたソフィですが，あることでその正体がばれてしまいます。ナポレオンがドイツに侵攻し占領したとき，ソフィはガウスの身に危険が及ばないようにフランス軍の将軍に嘆願します。このことが将軍からガウスの耳に入り，ガウスは紳士の正体を知ることになります。ガウスはソフィへの感謝の手紙の中で，驚きと同時にあらためて彼女の知性を称えています。「崇高な勇気と優れた天才性をもつ女性」と。ところが，やがてガウスはフェルマー予想への興味を次第に失い他の研究に没頭し彼女との文通も疎遠になります。傷心のソフィもまた数学から離れ物理学者として「弾性板の振動に関する研究」の論文に着手し始めます。この研究もまた近代弾性論の基礎となる優れたものでした。ガウスはその後，ソフィに名誉学位を授けるようゲッチンゲン大学の教授会に働きかけますが，ソフィは病魔(乳がん)に侵されており，学位を受け取る直前にパリの地に没するのです。

ソフィは素数 n をひとつずつしらみつぶしに証明しようとした頑固な男性数学者に対して，女性らしい柔軟な発想で大局的な解法を図りました。もし，女性の研究がその時代に認められ，ガウスが数論への興味を失わなかったとしたらフェルマー予想の証明は 360 年の年月を要することはなく，ひょっとしたら女性が解決していたかも知れません。

89

…アルゴリズムにしつこく現れる数

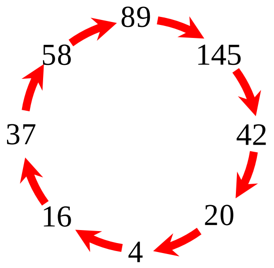
ある数の各位の数の平方の和を計算し，それが 2 桁以上の数ならばまた同様の操作を繰り返します。このような操作で最終的に得られる数(収束する数)は，1 か 4 のどちらかになります(数 4 参照)。例えば，

$$7 \Rightarrow 7^2 = 49 \Rightarrow 4^2 + 9^2 = 97 \Rightarrow 9^2 + 7^2 = 130 \Rightarrow 1^2 + 3^2 + 0^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1 \quad \cdots\cdots(\mathrm{A})$$

$$37 \Rightarrow 3^2 + 7^2 = 58 \Rightarrow 5^2 + 8^2 = 89 \Rightarrow 8^2 + 9^2 = 145 \Rightarrow 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42 \Rightarrow 4^2 + 2^2 = 20 \Rightarrow 2^2 + 0^2 = 4 \quad \cdots\cdots(\mathrm{B})$$

さて，ここで 4 に収束した後もさらにしつこく操作を続けてみましょう。

$$4 \Rightarrow 4^2 = 16 \Rightarrow 1^2 + 6^2 = 37 \Rightarrow 3^2 + 7^2 = 58 \Rightarrow 5^2 + 8^2 = 89$$



最後の 89 は，(B)の計算の中に登場しています。すなわち(A)は 1 に収束するのですが，(B)は収束ではなく振動しているのです。右図のように 8 つの数からなるループであり 4 はその中で唯一の 1 桁の数です。そしてこのループで素数は 37 と 89 の 2 つがありますが，特に 89 は非常に面白い性質をもっています。

89 の一位と十位を入れ替えた 98 との和は，89＋98＝187。このように数字を逆に並べてできる数と元の数を加える操作を続けると 2 桁の数はすべて左から読んでも右から読んでも同じ並び(回文数)になります。数 89 も当然回文数になるはずなのですが，操作を繰り返しても中々落ち着いてくれません。なんと，しつこく 24 回の操作でやっと 13 桁の次の数に到達します。

8813200023188

こういう，しつこさを見ても 89 は何かが違うと思いませんか。

89 の逆数 $\frac{1}{89}$ を小数にしてみましょう。

$$\frac{1}{89} = 0.0112359550561797752808988 76\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{89} &= 0.011235955056179\cdots \\ &= 0.01 \\ &+0.001 \\ &+0.0002 \\ &+0.00003 \\ &+0.000005 \\ &+0.0000008 \\ &+0.00000013 \\ &+0.000000021 \\ &+0.0000000034 \\ &+0.00000000055 \\ &+0.000000000089 \\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

小数点以下を右のような和に変形するとその並びはフィボナッチ数列になっていることが分かるでしょうか。フィボナッチ数列の定義は，次のように与えられます。

$$F_1 = 0,\ F_2 = 1,\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \ (n \geqq 3)$$

$$\Rightarrow\ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots$$

ある項の数に一つ前の項の数を加えると次の項が得られる数列がフィボナッチ数列ですが，それをしつこく 11 回繰り返すと，89 が顔を覗かせます。ここで，

$$p = \frac{F_1}{10} + \frac{F_2}{10^2} + \frac{F_3}{10^3} + \cdots\cdots + \frac{F_n}{10^n} + \frac{F_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots \quad \cdots①$$

として，①の両辺を 10 倍します。

$$10p = F_1 + \frac{F_2}{10} + \frac{F_3}{10^2} + \cdots\cdots + \frac{F_n}{10^{n-1}} + \frac{F_{n+1}}{10^n} + \cdots \quad \cdots②$$

②－①を計算して，

$$9p = \frac{F_2 - F_1}{10} + \frac{F_3 - F_2}{10^2} + \cdots + \frac{F_{n+1} - F_n}{10^n} + \cdots$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{F_1}{10^2} + \frac{F_2}{10^3} + \cdots + \frac{F_{n-1}}{10^n} + \cdots = \frac{1}{10} + \frac{p}{10}$$

これから， $p = \frac{1}{89}$ が得られます。$89 = 100 - 10 - 1$ がこの計算の背景にありますが，桁をずらし，しつこく加えていった数の逆数が 89 といった方がよいでしょう。また素数 p の逆数は $(p-1)$ 桁で循環します。したがって循環節の長さは $(p-1)$ の約数ですが， $p = 89$ の場合，循環節の長さは 44 にもなります。しつこい長さですね。

次に，89 を 2 倍して 1 を加えると 179 になります。179 も同様に 2 倍して 1 を加え，同じ操作を続けてみましょう。

89, 179, 359, 719, 1439, 2879

この 6 つの数に共通した性質は何だか分かりますか。

正解は，すべて素数になっています。なお，89 の前は 44，2879 の次は $5759 = 13 \times 443$ であり合成数です。このようにある素数 p に対して $2p+1$ がまた素数になるとき，素数 p のことをソフィ・ジェルマン素数といい， $2p+1$ を安全素数といいます。だから，89 はソフィ・ジェルマン素数で，179 は安全素数でまたソフィ・ジェルマン素数…しつこいですね。ソフィ・ジェルマン素数は，小さい順から，

$$n = 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, 113, 131, 173, 179, 191, \cdots$$

89 は 10 番目にありますが，6 つも連鎖するソフィ・ジェルマン素数の最少素数が 89 なのです。1825 年，フランスの女性数学者ソフィ・ジェルマンは，ソフィ・ジェルマン素数 p を用いてフェルマー予想「$x^p + y^p = z^p$ を満たす自然数解はない」の証明をしました。この小さな一歩を始めとしていったん途絶えていたフェルマー予想の証明が再燃します。そして，しつこい程に粘り強く情熱の火は燃え続け，360 年の後にワイルズにより完全に証明されるのです。

6 …日本人の生活に密着した万能数

吉田光由が著した「塵劫記」(寛永８年)にこんな問題があります。

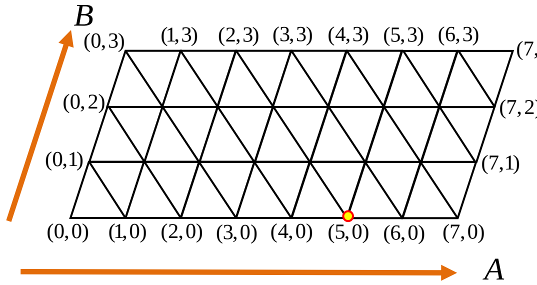
> １斗桶に油が１斗(10 升)入っています。この油を７升枡と３升枡を使って，５升ずつに分けて下さい。

和算の多くは生活に密着したパズル的要素が強い問題ですが，この「油分け算」はその代表的なものです。

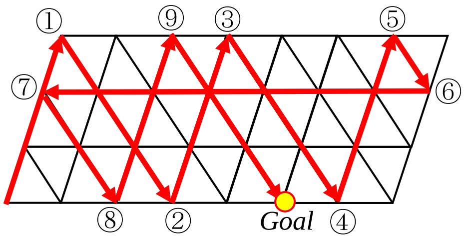
10 升，７升，３升の３つの容器を用いて５升と５升に分けるわけるから，５升は 10 升と７升の容器に等分することになります。7 升，３升，10 升の容器をそれぞれ A, B, C としましょう。容器間で油の移動は元の容器が空になるか，または入れる容器が一杯になるということです。まず最初に C の油を A または B のどちらに移すのですが，ここでは B にしましょう。したがって１回目の操作で，A には 0，B には 3，そして C には 7 の油が入っていることになります。これを $(A,B,C)=(0,3,7)$ と表すことにします。そして２回目以降は試行錯誤しながら，$(A,B,C)=(5,0,5)$ の状態にすればいいのです。その推移を右表に示しました。計 10 回の操作で移し終えることができました。江戸時代の庶民は余暇をこのようなパズルで頭をひねり過ごしていたのです。

容器(量)/回		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	(7)	0	0	3	3	6	6	7	0	2	2	5
B	(3)	0	3	0	3	0	3	2	2	0	3	0
C	(10)	10	7	7	4	4	1	1	8	8	5	5

ところで，油分け算は和算だけのものではありません。西洋では油をワインに変えて等分する問題は知られており，17 世紀の G.G.バシューが著した「数学遊戯問題集」にも掲載されています。その解法もいろいろと考えられており，中でも 1939 年に M.C.K.トゥイーディーが考案した巧妙な方法は秀逸です。

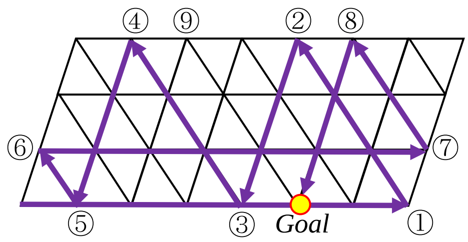


三角形の格子を使う方法で，右のように作られた座標を三線座標といいます。横軸と縦(斜め)軸に書かれた数字の組は，A と B の容器の油の量を示しています。例えば，$(5,3)$ は，７升の A の容器には 5，３升の B の容器には 3 の油が入っているということです。さてここで容器間の油の移動は，「元が空か，先が一杯」ということでした。$(A,B)=(0,0)$ から１回目の移動は，$(0,3)$ か $(7,0)$ のどちらかということになります。$(0,3)$ を選択した場合は，次の操作は $(0,0)$，$(7,3)$，$(3,0)$ のいずれかです。$(0,0)$ は最初の状態に戻ってしまいます。$(7,3)$ は次の操作を考えれば $(0,3)$ または $(7,0)$ となり，意味がないことが分かるでしょう。結局 $(3,0)$，すなわち３升の A の油をすべて７升の B に移して A を空にするしかないのです。次の３回目の操作も同様に考えると，$(3,3)$，すなわち，10 升の C から３升を A に移し，A を一杯にする移動をすればいいことが分かります。

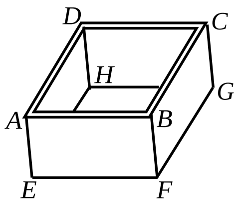


だから結局，その移動は $(0,0)$ から出発し，横あるいは縦(斜め)の方向に，外側の大きな平行四辺形の辺または頂点に突き当たるまで進み，この平行四辺形の中を，ビリヤードのボールのように跳ね回ればいいのです。そしてその終着点が $(5,0)$ になります。

さて，このような油の移動は，結局は 10 升の C から３升ずつ計４回，油を汲んで A に入れ，その途中で A が７升で満杯になったら C に戻しています。したがって，A の油の量の移動を考えると，$3\times4+7\times(-1)=5$ となります。これは不定方程式 $3x+7y=5$ の解の一つです。これから油分け算は不定方程式の問題とみることもできるのです。なお，不定方程式の解としては，$x=-3,\ y=2$ も考えられます。これは最初の移動で $(7,0)$ に向かった場合の解になり，右図がその結果です。この場合は，先ほどより１回少ない９回の操作で移し終えることができ，最小のものとなります。



でも実はちょっと工夫をするとさらに回数を少なくすることが可能です。それは，容器が図のような直方体 $ABCD-EFGH$ (または円柱)である場合です。このような形のときは，油を入れるときに，水面が斜面の $ABGH$ になるようにすると，体積は直方体の半分になります。10 升の容器 C では５升になります。すなわち，C を傾けてながら A に５升入れていけば１回の操作で移動ができます。



日本には昔から六合枡というのがあり，酒屋では枡を使って量り売りをしていました。でも，なぜ一升(十合)枡でなく六という中途半端な数量なのでしょう。六合枡を図 $ABCD-EFGH$ とすると，半分の三合は量れました。では今度は $AEFH$ が水面になるようにしてみましょう。容量は元の六分の一，すなわち一合になります。これで一合も量れます。五合は樽から六合を汲んで，$AEFH$ を水面にして一合残すように客の持ってきた器に五合を移します。同様に二合は樽から三合汲んで一合残せばいいのです。四合は樽から六合汲んでお客の器に三合移し，残った三合から一合が残るまで樽に戻し，最後に一合を客の器に移します。このように六合枡は一から六までのすべての整数値を量れるのです。これから七合から十合までも簡単に量れることが分かるでしょう。目盛がないのに量ることができる万能枡は日本人の知恵の結晶です。また，枡を持つちょっとした手の動きで微妙に量が狂うのも味があると思いませんか。そういう機微を大切に育ててきたのが日本人なのです。

19

…ＩＴ社会の先頭を行く(19)数

日本人が計算に秀でているのは掛算の九九の表の暗記に因るところが大きいでしょう。でも世界には19×19 の掛算表を暗記している国民もいます。「インド式数学」で注目を浴びている IT 先進国のインドの人達です。

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\ \ 32 \\ \hline 42 \\ 63\ \ \\ \hline 672 \end{array}$$

21×32 の計算は紙と鉛筆だけで求めるのなら縦書き計算で右のようにするでしょう。これをインド式の計算方法で求めてみましょう。まず，下右図のように，右斜め下に平行に 2 本と少し離して 1 本を引きます。これが数 21 に対応します。次に数 32 を左斜め下の直線で表現します(時計回りに線を引いていきます)。そして左側，真ん中，右側の交点の個数をそれぞれ求めて並べた数 672 が掛算の結果になります。

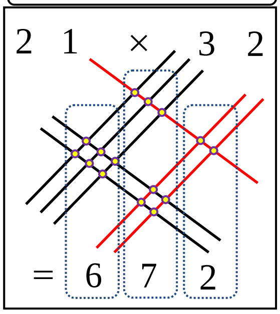
面白いと思いますか。でももっと数の値が大きくなると線を引くだけでも大変ですし，交点の個数が 2 桁になる場合もあります。3 桁同士の掛算ではどうするのといった疑問もでてくるでしょう。結局，インパクトだけ？ということになります。しかし，この考え方はインド式計算の原理を示すものであり，幼い子が図形に変換して数えることで掛算を学んでいくなら動機づけとしてこれ以上のものはないでしょう(なお交点の個数が 2 桁の場合はケタが上がるということです)。その原理を「繰り上げ分かち書き法」といいます。特に，直線で求める方法を図式化したものは「マス目算」といいます。これは 2 桁の数を十の位，一の位の 2 つの数に分解し，各々の積を斜線で区切った 1 マスに書き入れるものです(下中央図)。簡単に言えば展開公式

a	b	×
ac	bc	c
ad	bd	d

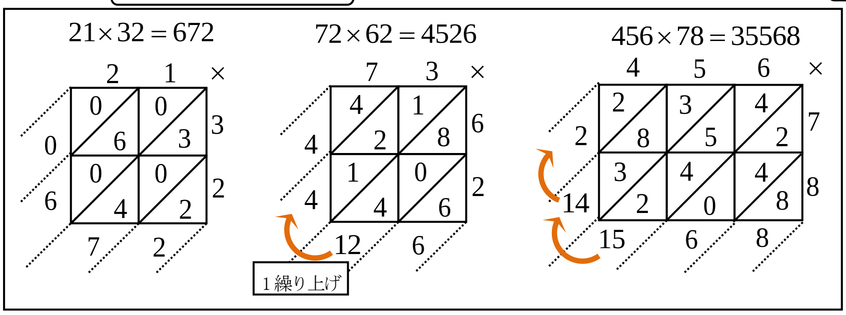
$$(10a+b)(10c+d)=100ac+10(ad+bc)+bd$$

を利用した掛算法であり，もっと桁数が多い場合も応用できます。このマス目算を縦書きで示したものが繰り上げ分かち書き法です。マス目算に現れる数を横にみるとこの方法の原理が理解できます。

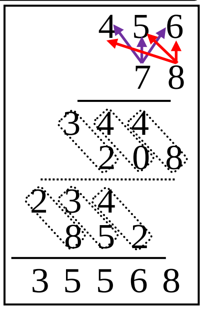
線分の交点による掛算



マス目算による掛算



繰り上げ分かち書き法



このように，インド数学による掛算は暗記の強要ではなく，幼児，児童の発達段階に応じ，極めて理にかなった学びになっているのです。ところで，インドの人たち19×19 までの掛算も暗記しているといいます。でもこれは正確には暗記したということではないのです。暗算でできる計算方法を考案しているのです。12×16 は次のように計算します。

① 片方の数ともう片方の一の位の和を計算して 10 を掛ける
② 2 数の一の位の積を計算する
③ ①と②の和を求める

$$\overset{②\ 6\times2=12}{\underset{①\ (16+2)\times10=180}{16\times12}} = 180 + 12 = 192$$

この計算原理もまた展開(乗法)公式を応用したものです。

$$(10+a)(10+b)=100+10(a+b)+ab=(10+a+b)\times10+ab$$

この方法で計算すると，　$16\times13=190+18=208$，$14\times17=210+28=238$，$15\times15=200+25=225$

どうでしょう。ワンクッション思考すると，暗算で計算ができてしまいます。インドの人たちは，この計算を繰り返し繰り返し計算することで，十九×十九の 162 通りを自然に覚えてしまっているということです。

では，十の位が一より大きい場合はどのように計算すればいいでしょう。十の位が n の場合は

$$(10n+a)(10n+b)=100n^2+(a+b)\times10n+ab=(10n+a+b)\times10n+ab$$

となります。例えば，$34\times37=41\times30+28=1258$　このように計算できます。さらにこれを一般して，2桁の数同士の掛算を横書きで計算する方法もあります。その原理は，やはり展開公式で，右図のように応用します。例えば，

$$(10m+a)(10n+b)=100mn+10(an+bm)+ab$$

$$\Rightarrow [mn]\ \ [an+bm]\ \ [ab]$$

②　①　十位の数の繰り上げ

$12\times21=[2][4+1][2]=252$，$76\times43=[28][21+24][18]=3268$

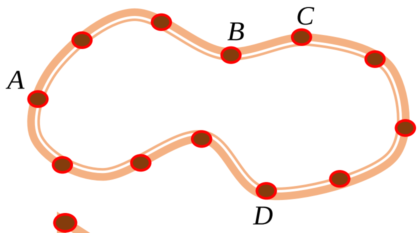
縦書きの計算と比較してみて下さい。計算のスペース，そして簡潔さともに優れた計算方法であることが分かるでしょう。

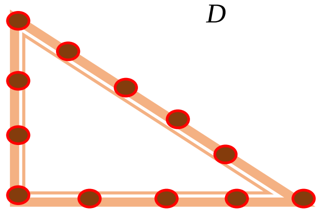
西洋では，ネイピアが 1614 年に考案した計算棒(ネイピアの骨ともいいます)により掛算や割り算が簡単に処理できました。いわゆる簡易電卓です。計算はラクにできますが計算棒に依存しがちともいえます。これに対してインドは人の頭の中にアルゴリズムを組み込み人間計算機にしました。その大きな違いは，計算の柔軟さです。例えば，28×32 の計算は，$28\times32=(30-2)(30+2)=900-4=896$　とします。このように，数の特徴，性質からよりラクな計算方法に切り替えができるのです。中国では紀元前から算木という計算用具があり，やがてそろばんが普及して日本に伝わります。日本では商人の間でそろばんが流行します。掛け算の縦書きはそろばんの繰り上がりのアルゴリズムであり，それが日本人の計算力を支えてきました。インド式計算と算木の中間にある計算法といえます。現代はすべてパソコンが計算処理する IT 時代です。だからこそインド数学が教えてくれたようにイクイクである柔軟なアルゴリズムが必要なのです。

12

人間の生活サイクルは1日を午前と午後12時間ずつ過ごし，1ヶ月毎に季節の移ろいを感じながら12ヶ月を過ごします。年が明け，その年が自分の干支なら齢を重ねたことを感じて想いを新たにすることでしょう。若者が飲料水を飲みながらヘッドホンで音楽を聴いているよく見る光景。飲料水は12本を1ダースとし，音楽は12音の音符の組合せで作られています。十進法で区画された世界で生活しているのに，なぜか12や60の数の方が体に馴染んでいるのです。

ダースはもともと「かなり大きな数」という意味で正確に12ということではありません。12の扱いは少し曖昧なところがあり，ギリシアの十二神といってもその人数は12を超えています。12は人数や個数に制限，制約をかけている数なのです。なお，$12^2=144$を1グロスといいますが，こちらはもうほとんど使われていません。このように1単位の基準を12しているものは他にもあります。長さの単位である1フィートは12インチです(ヘンリー1世の足の長さが1フィートという説もあります)。1ヤードは3フィートで12の約数になっています。宝石・貴金属の質量単位は，1トロイポンドが12トロイオンスになります。このように12を基準単位とするのは，10の約数が1,2,5,10に対して12の約数は1,2,3,4,6,12と多く，分割を整数で表すのに便利だからです。そのため古代ローマでは12進法が普及していました。また，古代エジプトでは，雨季にナイル川が氾濫する度に土地を区画整理する必要から縄張り師と呼ばれる測量士がいました。彼らはエジプトひもという右図のように等間隔に12個の結び目がある輪の縄を用いて土地の計測をしていました。A, C, Dを押えてピンと引っ張ると$AC=CD=DA=4$より正三角形になります。同様に，A, B, Dを押えると，$AB=4,\ BD=5,\ DA=4$ですから$AB^2+AD^2=BD^2$。三平方の定理より三角形ABDは$A=90°$の直角三角形になります。すなわち直角を測れるのです。エジプトひもは長さを測るだけでなく，分度器も兼ねた優れグッズだったのです。





音楽は12音階とそのオクターブの音の組合せで調べが作られます。これに音の長さを加えます。全音符の長さを4とすると，二分音符，四分音符，八分音符の長さはそれぞれ$2, 1, \frac{1}{2}$であり，$\frac{1}{2}$の指数乗で短くなっていきます。四分音符と八分音符の長さを合わせた付点四分音符の長さは$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，付点八分音符の長さは$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$。ここにも12の約数が見えてきます。

さらに，テンポは曲に感情を加えます。アンダンテ(歩くような速さ)は84～96，アレグロ(陽気，快速)は132～144。このように6や12の倍数の速度で曲想は決められることが多く，これは聴く側の体内リズムでもあります。約数の多い12は，感情の細やかな変化に対応できるのです。そして，これらの組合せが一つの音楽を奏でるのです。音楽は数12とその約数たちの競作といっていいでしょう。ところで，曲の中の3連符のリズムはなぜか等間隔に音が取れずに音を引きずってしまいます。12に対して3は割り切れるはずなのに割り切れない。それは基準1の小数0.3333…を意識してしまうからで，ここで十進法が顔を覗かせるのです。自然界に暮らす人間は，自然のリズムである12の遺伝子を持ちますが，手足の数の10から技術的に作り出したリズムも持ち，その微妙なバランスを保っているのです。

空間内での図形にも12は姿を現します。5つある正多面体(プラトンの立体)で，立方体と正八面体の辺の本数は12，正十二面体は面の数が12，正二十面体は頂点の個数が12個です。17世紀の天文学者ケプラーは6個の惑星と正多面体が美しい配置で結ばれると仮説を立てました。それは水星と金星の間に正八面体，金星と地球の間に正二十面体，地球と火星の間に正十二面体，火星と木星の間に正四面体，木星と土星の間に立方体が入るように惑星が並んでいるというもので，これをケプラーの天体といいます。十二宮のように天体の仕組みもまた数12が関わっていると考えられるのです。また空間内では1つの球に接触する同じ半径の球の最大個数は12個です。このとき接触する12個の球は中心にある球のほかに4つの球と接触します。この12を3次元(空間)の接触数といいます。なお，2次元(平面)の接触数は，円に外接する同じ半径の円の個数6です。また4次元の接触数は24になります。

さて，数12そのものの性質をみてみましょう。ある数nの約数で数nを除く約数の和がnと等しくなるとき，数nを完全数といいます。また，その和がnより小さいときを不足数，大きいときを過剰数といいます。数6は最小の完全数です($1+2+3=6$)。数12のそれ自身を除く約数は1,2,3,4,6ですからその和は16。数12は過剰数でさらに最小の数です。すなわち最小完全数の2倍が最小過剰数なのです。数12のそれ自身も含めた約数の個数は6，約数の和は28ですが，この個数6と和28は数としてみれば完全数です。このように約数の個数と約数の和がともに完全数であるとき，もとの数を極致数といいます。12はその最小の極致数です。では2番目の極致数は何かというと，次の巨大数です。

608655567023837898967037173424316962265783077335188597052832486051279169 1264

個数と和が完全数であるような数は珍しくないと感じますが，極致数は現在までこの両極の2数しか見つかっていないのです。極致とは「きわみ」のことですが，極まっているのはこの巨大数でしょうか，それとも12の方でしょうか。

「十二夜」はシェイクスピアの喜歌劇の代表作ですが，十二夜とはクリスマスから公現祭(1月6日)までのことをいいます。十二夜にみた夢はその月の出来事を暗示し，また，十二夜の間は真夜中の12時になると，動物も精霊も口がきけるようになるそうです。数12で構築されていた現実と想像の世界が一瞬綻びて数達が溢れ出すのです。

月光がカーテンの隙間からねめるように射て，光が泡立つ……そして十二時の鐘がゴーンと鳴り響く

17

…17 段目の帰結数

面白い数字遊びを紹介しましょう。縦 20 段，横 3 列の表を作り，1 段目と 2 段目にそれぞれ 3 つの適当な数を入れます。そして 3 段目以降は同じ列の 1 つ前と 2 つ前の段の和を計算し，1 の位の数を書きます。

例えば右表では，1 段目 314 で 2 段目 555，3 段目は，

1 列目：3＋5＝8　2 列目：1＋5＝6　3 列目：4＋5＝9

となります。この操作を続けて表のマス目に数を埋めてみましょう。

No.	A	B	C	D	E
1	3	1	4	a	0
2	5	5	5	0	b
3	8	6	9	a	b
4	3	1	4	a	$2b$
5	1	7	3	$2a$	$3b$
6	4	8	7	$3a$	$5b$
7	5	5	0	$5a$	$8b$
8	9	3	7	$8a$	$13b$
9	4	8	7	$13a$	$21b$
10	3	1	4	$21a$	$34b$
11	7	9	1	$34a$	$55b$
12	0	0	5	$55a$	$89b$
13	7	9	6	$89a$	$144b$
14	7	9	1	$144a$	$233b$
15	4	8	7	$233a$	$377b$
16	1	7	8	$377a$	$610b$
17	5	5	5	$610a$	$987b$
18	6	2	3	$987a$	$1597b$
19	1	7	8	$1597a$	$2584b$
20	7	9	1	$2584a$	$4181b$

さて，できた表の中の数字を見て何か気が付くことがありませんか。そうです。2 段目と 17 段目が同じ数の並びになっています。実は 1 段目にどんな数でも 2 段目が 555 であれば17段目も 555 になる不思議な現象が起きます。その理由を調べてみましょう。

前の 2 数の和から次の数を作る操作はフィボナッチ数列と同じです。違っているのは最初の 2 項が任意であり項の値が 1 の位だけであることです。だから 1 段目と 2 段目の数をどちらも 1 にすると各段の並びはフィボナッチ数列の 1 の位になります。

右表の D と E 列は，1 段目を a, 0，2 段目を 0, b とし，前の 2 数を加えたものです。a,b の係数をみる D と E は 1 段ずれてフィボナッチ数列になっていることが分かります。そしてこの D,E 列の各段の 2 数を加えて，1 の位の数字を取り出したものが A,B,C の各段の数になります。

1 段目⇒a　2 段目⇒b　3 段目⇒$a+b$　4 段目⇒$a+2b$　5 段目⇒$2a+3b$

そうすると 17 段目は，$p=610a+987b$ になりますね。a,b に任意の一桁の数を入れて 1 の位の数だけを取り出すということは，この p を 10 で割ったときの余りを求めるということです。

$p=10(61a+98b)+7b$（ここで $7b$ が 2 桁の数ならばまた 10 で割る）

すなわち，17 段目は $7b$ より 2 段目 b の 7 倍になっています。これがこの数字遊びの仕組みです。だから表のように 2 段目が 5 であれば 17 段目は $5\times7=35=30+5$，また 5 になります。

では今度は 17 段目の数 p を 3 倍してみましょう。

$$3p=30(61a+98b)+21b=30(61a+98b)+20b+b$$

$3p$ の 1 の位は b を 10 で割った余りになります。すなわちこれは 2 段目の数に一致するということです。

ところで D と E は 1 段ずれたフィボナッチ数列になっていましたね。そこで 16 段目の数をみると，

$q=377a+610a=10(37+61b)+7a$

16 段目の数は 1 段目の数を 7 倍したときの 1 の位の数になります。また 16 段目の数も 3 倍すると，$21a=10a+a$ より，その 1 の位は 1 段目の数に一致します。1 段目－16 段目，2 段目－17 段目のように，15 段の間隔で，小さい方の段の数を 7 倍すると大きい方の段の数になり，大きい方の段の数を 3 番すると小さい方の段の数になります。なお，ひと桁の数とその数を 3 倍および 7 倍した 1 の位の数の対応関係は，右表のようになっています。$3n,7n$ のどちらも 1 の位の数はすべて異なっているのが分かりますか(1 対 1 対応になっています)。また，それぞれの数字の並びは横にみていくと逆順になっています。数 1 が出現するもとの数をみると，7 倍と 3 倍の関係が読み取れます。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3n$ の一位	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
$7n$ の一位	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3

さて，そしてこれらの性質で一番特徴的なのは，17 段目の一位の数は 2 段目の数だけで決まり(その逆も同様です)，1 段目の数の影響を受けないということです。同様に，1 段目と 16 段目は 2 段目の影響を受けません。このことがこの数字遊びをパズル的なものにして，例えば数当てマジック等に応用できるのです。

あなたは相手にこちらに見えないよう 3 桁の数を縦に 2 数並べて書かせます。次にその下に 2 つの数の各位の数の和の一位だけを抜き出して作った新しい 3 桁の数を書かせます。この数と 1 つ前の数について同様の操作をし，15 回繰り返し計算をさせます。。最後にあなたは 16 番目と 17 番目に書いた 3 桁の数を相手から聞きます。そして，瞬時に最初の 2 数を言い当てるのです。右例であれば，聞いた 2 つの数を 3 倍することで，2 数は123 と 456 になります。最初の 2 数の桁数を多くするともっと相手は驚くことでしょう。

***
***
579
925
⋮
741
852

さて，この数字遊びの根本にあるのはフィボナッチ数列です。初項の異なる 2 つの疑似フィボナッチ数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ において，2 つの各項の和から新しい数列 $\{c_n\}$ を作るとき，

$$c_{2n+14}\equiv7a_{2n-1}\pmod{10}\qquad c_{2n+15}\equiv7b_{2n}\pmod{10}$$

ということです。ちなみに $\{c_n\}$ は周期関数であり，その最小周期は 60 になります。

数 17 は，7 番目の素数であり数学的にも多くの面白い性質があります。ガウスは正十七角形の作図可能であることを示しました。$\dfrac{1}{17}$ を小数で表したとき循環節の長さは 16 にもなります。17 年毎に大量発生するセミのように自然界にも 17 は影響を与えています。キリスト教では，数 17 は十戒と精霊の七つの賜の和として「奇跡の秘蹟」と呼んでいます。数 17 はその長さを 1 つの締め括りとして，そこからまた新たな一歩を踏み出しているのです。

49

…デジタル化した日本を表す数

図A

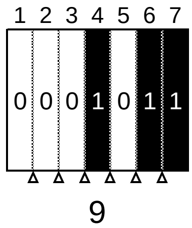
4 9 9 8 7 6 5 9 1 2 3 4 7

国code　商品メーカーcode　商品アイテムcode　Check Digit

商品管理にバーコードはなくてはならない時代になりました。

図Aのようなバーコードをスキャナーで読み込むと商品情報が一瞬で把握できるのですがその仕組みはどうなっているのでしょう。

バーコードにある情報は基本的には 13 桁の数字だけです。図 A をみると，ちょっと長めのダブルバー(ガードバー)の仕切りが 3 箇所あります。左のガードバーの両側にある数字は国コードで 49 は日本を表す番号です(45 を用いることもあります)。中央のガードバーを挟んで左側 5 桁の数字はメーカー名，右側 5 桁の数字は商品名を表し，右のガードバーで読み取り終了になります。右のガードバーの左の数字(図 A では 7)はチェックデジットといい，バーコードの誤読を防ぐためのものです。これらの 13 桁の数字は，それぞれ 2 本の黒いバーに変換されます。具体的には，1 つの数字はモジュールと呼ばれる 7 つの矩形を並べたものを白黒白黒の縞模様になるように塗り分けて表します。例えば数字 9 は，白を 0，黒を 1 とすると，0001011 になります。その組み合わせで 2 本の幅の異なる縞模様ができるのです。



このような白黒白黒のバーは何種類作ることができるか計算してみましょう。7 つのモジュール間の 6 つの仕切り Δ から 3 つを選び，その前後で白黒白黒になるように塗ればいいので，その総数は，${}_6C_3 = \dfrac{6\times5\times4}{3!} = 20$ 。全部で 20 通りの表現が可能です。これを 0 から 9 までの 10 個の数字に対応させます。でも，図 A をよく見ると，9 は左のガードバーの右側に 2 つ，中央のガードバーの右側に 1 つあり，3 つとも縞模様は異なっています。実は 1 つの数字には複数の縞模様を割り当てるのです。そのため組合せは 20 通りが必要になります。その方法はモジュールの 1 の個数が偶数(Even)個と奇数(Odd)個の 2 つのグループに分けて，対応関係を作ります。

① Odd グループの 0 と 1 の並びを反転(0⇔1)

② 逆順から書き並べる（左右反転）

この操作により Odd グループの 1 つの並びは Even グループの 1 つの並びに対応します。例えば,「0001011 ⇒ 1110100 ⇒ 0010111」です。そしてさらにこれを 0～9 の数字に対応させてコードとして用います(右表の企業コードは左と中央のガードバーの間の 6 桁の数を示します)。では，1 つの数字は Odd と Even のどちらを用いればいいのでしょうか。それは国 code 番号により決められます。

Code	企業コード(左側)		商品(右側)	国別(左端)
番号	Odd	Even	Even	偶奇列
0	0001101	0100111	1110010	OOOOOO
1	0011001	0110011	1100110	OOEOEE
2	0010011	0011011	1101100	OOEEOE
3	0111101	0100001	1000010	OOEEEO
4	0100011	0011101	1011100	OEOOEE
5	0110001	0111001	1001110	OEEOOE
6	0101111	0000101	1010000	OEEEOO
7	0111011	0010001	1000100	OEOEOE
8	0110111	0001001	1001000	OEOEEO
9	0001011	0010111	1110100	OEEOEO

図 A の国 code の 1 つめの数字 4 には縞模様がありません。この数字は 6 桁の企業コードの各桁を Odd(O),Even(E)の使い方で表現しているのです。O と E は 3 個ずつ用います。場合の数は，$\dfrac{6!}{3!3!} = 20$(通り)で，さらに 6 桁の左端を O に固定すると半分の 10 通りになります(なお，OOOEEE については OOOOOO とします)。これから表の偶奇列のように 0～9 の数字が O と E の並びで表現できるのです。例えば，4 は OEOOEE より，この順番に Odd,Even を選ぶことになるので，図 A の最初の 9 は Odd，2 つ目の 9 は Even になります。残りの 3 つめの 9 は商品コード(チェックデジットを含む)領域の数字です。この領域の数字は企業コードの 0～9 に対応する Odd のモジュール列の並びを反転させたものを用いているので，黒白黒白の並びの Even になります。

でもなぜこんな面倒な対応を作らなければならないのでしょう。白黒白黒のコード対応をすべて Odd にして国 code の 1 つめの数も縞模様で表せばシンプルになります。しかし，そうしないのは，商品を上下逆さまになった状態で読み込んでもバーコードを認識できるようにするためです。スキャナーが読み取るのは黒の位置と幅だけで長さは読めません(多くのバーコードはガードバーの長さはモジュールの黒バーと同じ長さになっています)。だから右から読み取ってしまうとまったく違ったコードになってしまいます。これを企業コードに国コードの情報を含めることで右から読み取っている場合でも認識できるようにしているのです。そしてさらに二重に誤読を防いでいるのがチェックデジットです。

バーコードの 13 桁の数を $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{11}a_{12}a_{13}$ とします。このとき，

$$n = (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}) + 3(a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12})$$

n を 10 で割った余りを 10 から引いた数がチェックデジット a_{13} です。図 A のチェックデジットは，

$$n = (4+9+7+5+1+3) + 3\times(9+8+6+9+2+4) = 29 + 3\times38 = 143 \Rightarrow 3 \Rightarrow 10-3 = 7$$

これがバーコードの右端の数字に一致しない場合はエラーが表示されます。一致している場合は，バーコードによりサーバーに送られた信号は商品データを検索し，その商品の情報(価格など)を引き出すことができるのです。

数学のいずみ QR-code

ところで近頃はバーコードに変わり，日本のデンソーウェーブが開発した 2 次元的な QR コードを採用する企業が増えています。英数字，漢字を扱えるのでバーコードの数百倍の情報量を記憶することができます。そしてさらに QR コードに色を加えた無限大の情報量を持つカラーコードも開発されています。そのうちマイナンバーもカラーコードで情報がデータベース化されて，嫌な表現ですが，色で人を識別する時代がやってくるのかもしれません。

123456790

…混沌と秩序が交叉する数

数列$\{a_n\}$の漸化式が

$$a_1=1,\ \ a_{n+1}=10a_n+(n+1)$$

で与えられるとき，その一般項はどうなるでしょう。式の意味を考えればa_nを10倍することは桁を1つ上げることであり，その数に自然数を小さい順に加えるということになります。したがって，

1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1234567, 12345678, 123456789, …

綺麗な並びですが，$a_{10}=1234567890+10=1234567900$ でバランスが崩れます。でもa_{11}以降を書き抜いていくと，

12345679011, 123456790122, 1234567901233, …, 1234567901234567899, 12345679012345679010, …

a_{20}で123456790がリフレインしました。第100項めを求めてみると，

$a_{100}=123456790123456790123456790\cdots\cdots123456790123456789012345679 0$（123456790が11個連なる）

数列の規則が崩れたバランスを修正するようにもがいてまたバランスをとります。

数列$\{a_n\}$の漸化式は次のように変形できます。

$$a_{n+1}+\frac{1}{9}(n+1)+\frac{10}{81}=10\left(a_n+\frac{1}{9}n+\frac{10}{81}\right)$$

これから，$\left\{a_n+\dfrac{1}{9}n+\dfrac{10}{81}\right\}$は公比10の等比数列よりその一般項は，

$$a_n=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}=\frac{10^n+10^{n-1}+\cdots\cdots+1-(n+1)}{9}=\frac{11111\cdots11111}{9}-\frac{n+1}{9}$$

どうやら数列$\{a_n\}$の規則性はレピュニット数が関係しているようです。

レピュニット数を9で割った値を小数で表すと，123456790を繰り返したあと，小数点以下は1～9の途中で止まりその値が繰り返しの循環小数になります(ただし桁数が9の倍数のときは割り切れ小数以下は0になります)。例えば，

$$\frac{1111111111111111111111111}{9}=1234567901234567901234 56.77777777777777\cdots\cdots$$ （25桁レピュニット数）

ところで小数点以下に現れる数は何だかわかりますか。レピュニット数の桁数を考えると予想できますね。

そして$\dfrac{n+1}{9}$の小数点以下の部分を減じることで数列$\{a_n\}$の値は整数になるのです。

このように数列$\{a_n\}$は循環小数から整数が生成されていると考えられるユニークな数列なのです。

さらに，この数列の項は信じられないような配列を生み出します。a_9の平方根を計算してみましょう。

$$\sqrt{a_9}=\sqrt{123456789}=11111.1110605555554405416661433534692458784098\cdots$$

11111.111
060
555555
440541
666
143353469

$123456789=3^2\times3607\times3803$よりその平方根は無理数であり，まあ上のような値かな？，という印象でしょうか。でもこの小数を右のように行にして並べてみると，奇数行は同じ数字が出現しています。さらに行の桁数を見ると，1行目は1が8個，3行目は5が6個，5行目は6が3個と減っていき，対照的に偶数行の桁数は増えていきます。実はa_nのnが奇数の場合に必ずこのように配列になります。

右図は，$\sqrt{a_{59}}$を計算し並べたものです。奇数行にある同じ数字の並びはだんだん3～5の割合で少なくなり，逆に偶数行の桁数は同じ割合で増えていきます。じーっと図をみると，2つの直角三角形が重なり合い，美しい模様を描いています。そして，さらに驚くべきことがあります。奇数行に現れる数字を順番に取り出してみましょう。

1, 5, 6, 2, 4, 9, 6, 3, 9, 2, 1, 3, 7, 5, …

最後の5だけ連続していないのになぜ5なのかと思うかもしれませんが，この数の並びは$\sqrt{a_n}$の奇数項nがなんであっても変わらないのです。さらにこのあと, 9が4つ続いたあと, 6, 3, …と続いていきます。

まだあります。偶数行の並びの最後の数字を抜き出してみましょう。

0, 1, 7, 9, 4, 1, 8, 4, 7, 6, 8, 2, 0, …

これもやはり奇数nの値に関係なく不変です。これらの数字は再び数に秩序を与えるkey-numberなのです。そしてやがて奇数行に複数の数字の並びが消えると，混沌に呑み込まれ数は無秩序に拡散していきます。123456790というorder数であるa_nも，$\sqrt{a_n}$の平方と見ると，混沌との葛藤の産物であり，人間社会と同じように秩序の保つことの難しさをちょっと感じてしまうのです。

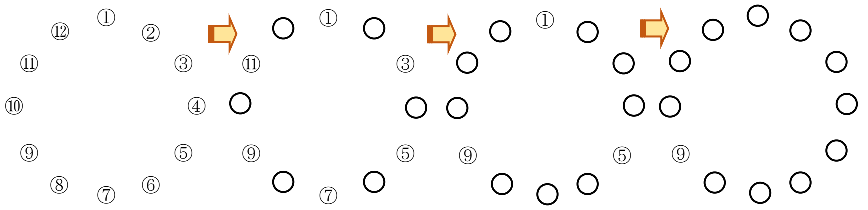
111111111111111111111111111111.111111111111111111111111111
0810
5555555555555555555555555555555555555555555555555555555
1490541
66666666666666666666666666666666666666666666666666
55670804097
2222222222222222222222222222222222222222222222
18504246190928819
44444444444444444444444444444444444444444
303644692139363281 24
99999999999999999999999999999999999999
42870500502213318033 8541
666666666666666666666666666666666
4238254870157177063948567708
33333333333333333333333333333
226589457303013080983855895996 09374
99999999999999999999999
5187630255633061956577725533379448 7847
2222222222222222222
000925399527508576295448930874676174587 6736
11111111111111
0077152001802492217255973537583190282185872 3958
3333333333
2843882939964365864454657584464553810940848456488 7152
77777
5435381145204676925755715338095384086574051115247938 3680
5
4424094325000155947569898609244685031500898301601409912108 8…

16

誰か先生を呼びにいった方がいいと思うんだけど。

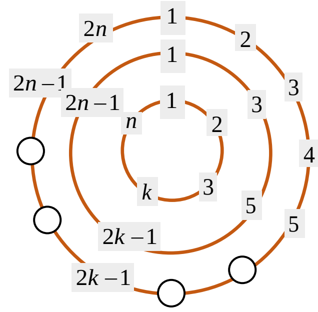
授業が始まったのに先生はまだ来ていない。呼びに行くのが遅くなると「君たちが呼びに来るかどうかを確認するために待っていたんだ」。どう考えてもそれは屁理屈だろうってことで呼びにいった生徒が叱られる。だから誰も行こうとせず時間は過ぎていく。それじゃあ、こうしたらと誰かが言う。在籍 41 人を 1 番目から数えて隣の生徒を除き、その次から数えてまた隣の生徒を除く。そうして最後に残った生徒が呼びに行くことにしようよ。ちょっとまてよ。そうすると最初は 2 番、次が 4 番のように偶数番目が消えていく。奇数番目の生徒の誰かが呼びに行くことになり不公平だと思うな。うーん。それじゃ 1 番と 2 番の生徒がジャンケンをして勝った方を最初にして始めることにすればいいだろ。ジャンケンホイ…決まりだ、1 番目から始めよう。さあ、それじゃ消していくよ……誰も行きたくないときはこのようなルールで無駄に時間は費やされしまい先生の怒りは増すばかり。矢面に立たされるのは何番めの生徒になるでしょう。

人数が 12 人の場合でこのルールを確認してみましょう。図のように円形に並べて一巡後は偶数番目がすべて消えます。同じように残った奇数 6 つを交互に消し続けていくと 9 番目が最後に残ります。これを $n(1 \leqq n \leqq 20)$ 人に対して最後に残る番号を調べたものが右表です。表中の数の並びには規則性があることが分かるでしょうか。最後に残る番号が 1 のときの人数は、



人数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
番号	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	7	9

$n=1,4,8,16,\cdots$。2 の累乗です。そして累乗と次の累乗の間は奇数番号が小さい順に並んでいます。その仕組みを考えてみましょう。$2n(n \geqq 1)$(偶数)人のときに最後の残る番号を $J(2n)$ とします。$2n$ 人を円形に並べ一つ置きに消していくと一巡後は奇数番号だけの n 人が残ります。このとき、$2n$ 人と n 人の番号の対応関係は右下図になります。一番外側の円の数字はもともとの配置の数で、その内側は一巡後の奇数の配置です。さらにその内側の数字は奇数 1 を 1 番目として数えた番号です。すなわち一巡後の k 番目に位置する奇数 $2k-1$ は、最初の並びでは $2k-1$ 番目であったということです。これは $J(2n)$ と $J(n)$ についても同じ対応になるので、



$$J(2n)=2J(n)-1 \qquad \cdots\cdots①$$

が成立します。これから、$J(2)=2J(1)-1=2\times1-1=1$、$J(4)=2J(2)-1=2\times1-1=1$

このように求められるのです。また、$J(2^n)=2J(2^{n-1})-1$ であることから、

$$J(2^n)-1=2\left(J(2^{n-1})-1\right)=2\left(J(2^{n-2})-1\right)=\cdots=2\left(2J(2)-1\right)=2(1-1)=0$$

すなわち、$J(2^n)=1$ となるわけです。人数が奇数 $2n+1(n \geqq 1)$ の場合も同じように考えます。一巡する手前では $2n$、一巡後の最初は 1 が消えて、3 以上の奇数が残るため今度は次の関係式が成立します。

$$J(2n+1)=2J(n)+1 \qquad \cdots\cdots②$$

これから、$J(3)=J(2\times1+1)=2J(1)+1=3$ $J(7)=J(2\times3+1)=2J(3)+1=7$、これでどんな人数に対しても求めることができますが、ちょっと計算は大変です。でも、①と②は次の簡単な式にをまとめられます(数学的帰納法を用います)。

$$J(2^n+p)=2p+1 \qquad (n \text{ と } p \text{ は、} 0 \leqq n,\ 0 \leqq p \leqq 2^n-1 \text{ である整数})$$

例えば、$J(12)=J(2^3+4)=2\times4+1=9$、100 人であっても、$J(100)=J(2^6+36)=2\times36+1=73$。簡単に求めることができます。だから、41 人の場合は、$J(41)=J(2^5+8)=2\times8+1=17$。先生から有り難いお言葉を戴くのは 17 番目の生徒ということになります。では、ジャンケンの勝敗の結果、2 番の生徒から始めた場合はどうなるでしょう。一巡して消えるのは 1 を除いた奇数番目の生徒です。人数が 2^n-1 のときには 1 番が残り、それより多い人数では 2 から始まる偶数の番号が残ります。$41=(2^5-1)+10$ なので、10×2 で 20 番目の生徒が先生を呼びに行くことになります。

このようなサバイバルゲームは昔からよく知られていて、特にユダヤ戦記の中の「ヨセフスの問題」は有名です。

著者でもあるヨセフスは 1 世紀に活躍したユダヤの歴史家です。ヨセフスは、ローマとの戦いで追われて同胞のユダヤ人 40 人とともに洞窟に立てこもります。逃げ場を失った 41 人は、捕虜となり辱めを受けるより死を選ぶことにし、次のようなルールを決めます。41 人が円形に並び、1 番目から始めて 3 人目ごとにその人を隣の仲間が殺していきます。そして最後に残った一人は自殺するというものです。ヨセフスとひとりの友人はこんなことは意味がないと考えて生き残る道を選びます。数学が得意であったヨセフスはすばやく計算をして最後の 2 人が自分たちになるような位置に並んだということです。同じような話は日本では数学遊戯「継子建て」で取り上げられ、徒然草や塵劫記にもその記述があります。現代ではトランプのハート 13 枚を重ねて、上の札を下に回し次の札を机上に置くという操作を続けていき最後に残るカードを当てる、といったマジックにも応用されています。さて、ヨセフスと彼の友人は何番目に並んだかわかりますか。最後から 1 つ前の番号は 31 です。そして最後の番号は 16 です。ヨセフスが 16 番目に並んで助かったことでこの面白い話題が今でもサバイバルゲームとして私たちを楽しませてくれているのです。

3045

…100 の不思議数との縁を結ぶ数

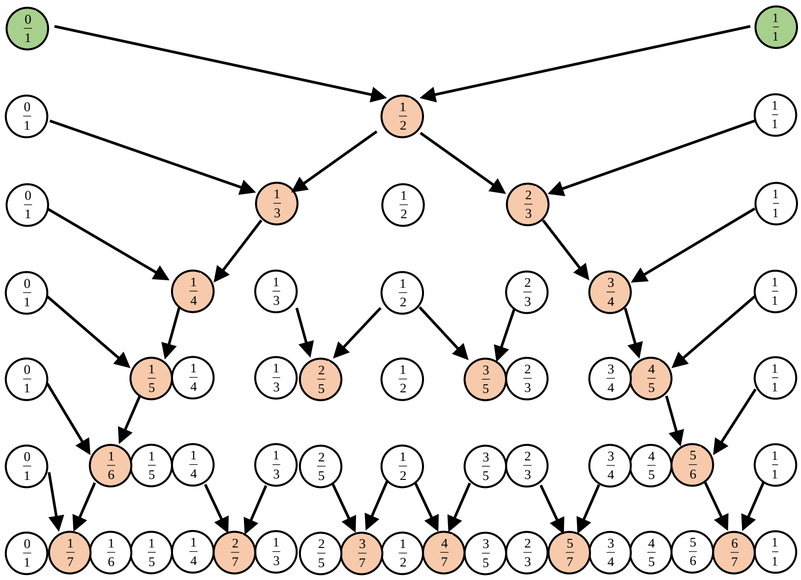
２つの既約分数$\dfrac{b}{a}$と$\dfrac{d}{c}$の足し算を、分母、分子同士をそれぞれ加えて計算する。絶対してはいけないことですね。でも得られた$\dfrac{b+d}{a+c}$にはどんな意味が…？、英国の地質学者ファレイ(Jhon Farey 1766-1826)はこんな不遜なことを思いつき、「好奇心をそそる特性」(curious property)を見つけました。$\dfrac{b}{a}<\dfrac{d}{c}$とすると、$\dfrac{d}{c}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{ad-bc}{ca}>0$より、$ad-bc>0$。これから、$\dfrac{b+d}{a+c}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{ad-bc}{a(a+c)}>0$、$\dfrac{d}{c}-\dfrac{b+d}{a+c}=\dfrac{ad-bc}{c(a+c)}>0$。すなわち$\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+d}{a+c}<\dfrac{d}{c}$となります。$\dfrac{b+d}{a+c}$は数直線上でもとの２数の間にありこのような数を元の２数の中間分数といいます。例えれば、中間分数はもとの２数の子どもみたいなものです。さらに、親と子である$\dfrac{b}{a},\dfrac{b+d}{a+c},\dfrac{d}{c}$は、どの２数の差をとってもその分子は$ad-bc$であり、遺伝子は引き継がれているのです。特に$ad-bc=1$の場合、元の２数は既約分数になります。なぜなら、$\dfrac{b}{a}$が既約分数でなければ、$a=ga',\ b=gb'$と表すことができ、$ad-bc=g(a'd-b'c)$となり矛盾するからです。同様に$\dfrac{d}{c}$についても同じことが言えます。そこでファレイは、親である２数を$0=\dfrac{0}{1},\ 1=\dfrac{1}{1}$として、分子と分母を加えて$\dfrac{0+1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$を作り、さらにこの数と$\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{1}$についても同じ操作をし、$\dfrac{0+1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{1+1}{2+1}=\dfrac{2}{3}$。このように続けていくと数直線上に既約分数が並ぶことを見つけたのです。ファレイは０と１の間の既約分数で分母が自然数nを超えないものを小さい順に並べてできる分数の列を第n世代のファレイ数列と名付けました。次は、第８世代のファレイ数列で、その項数は23です。

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{8}\quad\frac{1}{7}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{5}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{2}{7}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{3}{8}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{3}{7}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{4}{7}\quad\frac{3}{5}\quad\frac{5}{8}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{5}{7}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{4}{5}\quad\frac{5}{6}\quad\frac{6}{7}\quad\frac{7}{8}\quad\frac{1}{1}$$

第９世代のファレイ数列は、第８世代の数列の項で分母同士の和が９となる次の６項が加わります。

$$\frac{0+1}{1+8}=\frac{1}{9}、\frac{1+1}{5+4}=\frac{2}{9}、\frac{3+1}{7+2}=\frac{4}{9}、\frac{1+4}{2+7}=\frac{5}{9}、\frac{3+4}{4+5}=\frac{7}{9}、\frac{7+1}{8+1}=\frac{8}{9}$$

その分子は、９と互いに素で９より小さい正の整数1,2,4,5,7,8のすべてが現れています。すなわち、分母が９以下のすべての既約分数が数直線上に並ぶのです。ファレイ数列の生成の過程を第７世代まで書き抜いたのが下図です。世代が深まると、枝葉が広がるように中間分数が育っていくのです。このような図をスターン・ブロコット木(Stern-Brocot Tree)といいます。



では、枝葉を広げていくと第100世代ではどれほどの項数になるのか調べてみましょう。

第n世代のファレイ数列を$F(n)$とし、$F(n)$の項数を$f(n)$とします。第n世代で新たに加わるのは、分母がnで、分子がnより小さい既約分数です。その数を$\varphi(n)$（ただし$\varphi(1)=1$）とします。スターン・ブロコット木では$n=7$までの項数が読み取れます。$n=8$のとき、１から８の整数で２の倍数2,4,6,8は全体の$\dfrac{1}{2}$の割合でありこれを除いたものが分子になるので$\varphi(8)=8\times\dfrac{1}{2}=4$。$n=9$のとき、３の倍数3,6,9は全体の$\dfrac{1}{3}$の割合でありこれを除いたものが分子です。$\varphi(9)=9\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=6$。$n=10$のとき、$10=2\times5$より、10個の数で２の倍数は$\dfrac{1}{2}$の割合でありこれを除いた数は1,3,5,7,9。この中で5の倍数は$\dfrac{1}{5}$の割合であり、これを除くと$\varphi(10)=10\times\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{5}\right)=4$となります。一般に、数$n$を素因数分解したとき、異なる素因数が$a_1,a_2,a_3,\cdots a_m$であれば、$\varphi(n)=n\left(1-\dfrac{1}{a_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{a_2}\right)\left(1-\dfrac{1}{a_3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{a_m}\right)$となります。この性質はオイラーによって証明され、$\varphi(n)$をオイラー関数

といいます。これを用いると、11 は素数より $\varphi(11)=11\times\frac{10}{11}=10$ 。$12=2^2\cdot 3$ の素因数は、2,3 より、$\varphi(12)=12\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=4$ 。
$n=300$ のような深い世代も $300=2^2\cdot 3\cdot 5^2$ より $\varphi(300)=300\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=80$ 。このように計算することができます。
これから、第 n 世代のファレイ数列 $F(n)$ の項数 $f(n)$ は、その前の世代の項数 $f(n-1)$ に新たに誕生する $\varphi(n)$ を加えると得られます。

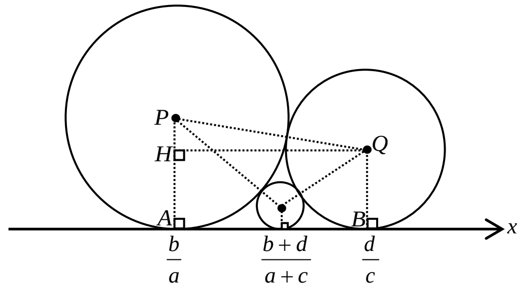
$f(n)=f(n-1)+\varphi(n)$ （$n\geqq 2$）であり、 $f(1)=2$ より

$$f(n)=f(1)+\sum_{k=2}^{n}f(k)=1+\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(n)$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4
$f(n)$	2	3	5	7	11	13	19	23	29	33	43	47

第 100 世代の項数を計算すると、 $f(100)=3045$ となります。

このように、ファレイ数列の項は、0 と 1 の区間をしだいに埋め尽くしていきますが、区間上にプロットされる隣り合う２つの項の間隔にも面白い関係が潜んでいます。



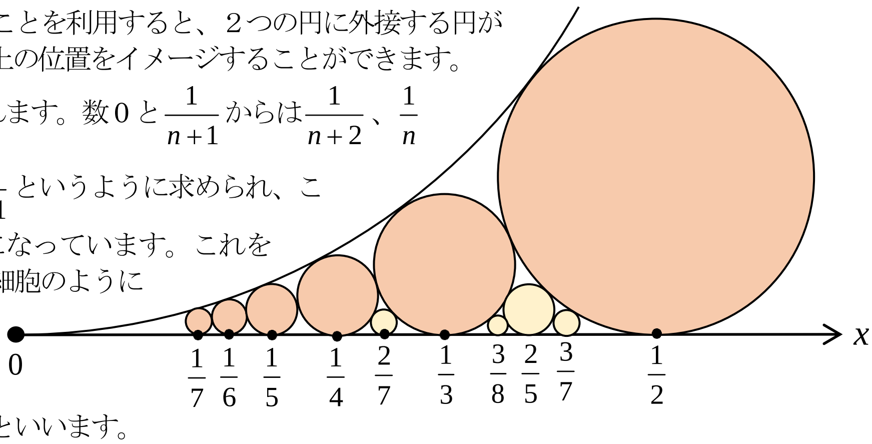
数直線（x 軸）上の２点 $A\left(\frac{b}{a},0\right)$, $B\left(\frac{d}{c},0\right)$ $\left(ただし、\frac{a}{b}<\frac{d}{c}\right)$ を接点し、中心が $P\left(\frac{b}{a},\frac{1}{2a^2}\right)$, $Q\left(\frac{d}{c},\frac{1}{2c^2}\right)$ である円を考えます。すなわち２つの円の半径はそれぞれ、$r_p=\frac{1}{2a^2}$, $r_q=\frac{1}{2c^2}$ となります。２円の位置関係を調べてみましょう。点 Q から線分 PA から下した垂線の足を H とします。$ad-bc=1$ であることから、$HQ=AB=\frac{d}{c}-\frac{b}{a}=\frac{ad-bc}{ca}=\frac{1}{ca}$ 　$PH=PA-HA=PA-QB=\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2c^2}$

ここで直角三角形 PHQ において、三平方の定理を用いると、

$$PQ^2=PH^2+HQ^2=\left(\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2c^2}\right)^2+\left(\frac{1}{ca}\right)^2=\frac{a^4+2a^2c^2+c^4}{4a^4c^4}=\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2c^2}\right)^2=\left(r_p+r_q\right)^2$$

よって、$PQ=r_p+r_q$ 　これから２つの円は外接していることが分かります。さらに、$\frac{b}{a}$ と $\frac{d}{c}$ の中間分数 $\frac{b+d}{a+c}=\frac{f}{e}$ に対して、$\frac{b}{a}$ と $\frac{f}{e}$ 、$\frac{f}{e}$ と $\frac{d}{c}$ も同様に中間分数が求められることから、$R\left(\frac{f}{e},\frac{1}{2e^2}\right)$ を中心として x 軸に接する円は先ほどの２つの円のどちらにも外接しています。このことを利用すると、２つの円に外接する円が x 軸と接するときの接点から中間分数の数直線上の位置をイメージすることができます。

数 0 と分数 $\frac{1}{n}$ から２数の中間分数 $\frac{1}{n+1}$ が得られます。数 0 と $\frac{1}{n+1}$ からは $\frac{1}{n+2}$ 、$\frac{1}{n}$ と $\frac{1}{n+1}$ からは $\frac{2}{2n+1}$ 、$\frac{1}{n}$ と $\frac{2}{2n+1}$ からは $\frac{3}{3n+1}$ というように求められ、これらの分数は円と x 軸との接点の x 座標の値になっています。これを次々に求めていくと右図のように外接する円が細胞のように増殖していきます。アメリカの数学者レスター・フォードは、1938 年に数学雑誌にこの性質の研究成果を発表しています。



このように中間分数を表現する円はフォード円といいます。

ファイレは思いました。「もし、２つの分数の分子と分母同士を足したら……？」

ファレイのちょっと遊び心のある好奇心がファレイ数列を生み出しました。でも、ファレイは自身の名を冠する数列の性質を定理として証明はしてはいません。地質学者としても名を残しているわけではなく彼の功績を示す書物は何もないのです。ファレイの面白い発想が数学者の探究心を掻き立てて定理として証明され、今でもフォードのように数学者によって研究は続けられているのです。

フォード円は、小さな好奇心の萌芽が円として描かれているように思えます。0 と 1 の区間に生み出される既約分数は、お互いのアイデンティティを尊重しながらも接することで有機的なつながりを保ちながら新たな中間分数の世代に引き継いでします。0 と 1 から始まった好奇心の円（縁）という輪は、連鎖して広まっていくのです。そして、第 100 世代では 3045 個の多くの輪で結ばれ、第 n 世代では $f(n)=\frac{3n^2}{\pi^2}$ に近似できることも知られています。

フォード円のように協働で成り立っている数の世界は、私たちの社会の仕組みとなんとなく似ているもしれません。
自分にはできなくても、こうであればとアイデアを語る。そのアイデアは面白いねと感じ、相乗りして調べる。
そんな単純で大切なことを思い出させてくれたファレイは、ちっとも有名ではない有名人なのかもしれません。