隣接二項漸化式のちょっとした小手技2

札幌新川高等学校　中村文則

無理を通せば道理が引っこむ

<先　生>まずは、前回の復習です。隣接二項漸化式

$$a_{n+1} - pa_n = f(n)$$

の一般解は、平衡値を求めて両辺の項のバランスをとることで求められたね。$f(n)$ が定数とｎの一次式の場合については考えたけど、今日は、$f(n) = qr^n \ (q \neq 0)$ の形のものの一般解について、調べてみよう。

> ex}　次の漸化式を満たす数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。
>
> $a_1 = 5, a_{n+1} - 3a_n = 2^n$

では、まなぶ、解いてごらん。

<まなぶ>最初にa_n と a_{n+1} をαとおきます。

$$\alpha - 3\alpha = 2^n$$

与式との差をとって、$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$ 。ここで$\alpha = -2^{n-1}$ だから、

$$a_{n+1} + 2^{n-1} = 3(a_n + 2^{n-1}) \qquad \cdots\cdots(*)$$

そして、最後にバランスをとります。左辺の2^{n-1}を2^n に換えて、右辺を調整すると……、あれっ？

先生、どうやって調整したらいいか分かりません。

<先　生>左辺を２倍したわけだから、右辺も２倍すると考えても、どうやら、うまくいきそうにないですね。困った。誰か、アイデア下さい。

<かず子>取りあえず、変形された式を予想すればいいんではないでしょうか。

左辺は2^n で、右辺は2^{n-1} になればいいんだから、たぶん

$$a_{n+1} + \beta 2^n = 3(a_n + \beta 2^{n-1}) \qquad \cdots\cdots(\flat)$$

となれば問題は解決すると思います。

<先　生>うん。なんか良さそうだね。では、この式を満たすβはどうやったら求められるだろう。

<よしお>$(\flat)$を変形して、

$$a_{n+1} - 3a_n = -\beta 2^n + 3\beta 2^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_{n+1} - 3a_n = \beta 2^{n-1}$$

この式と与式の右辺を比較して、$\beta = 2$ を得ます。よって、

$$a_{n+1} + 2^{n+1} = 3(a_n + 2^n)$$

<先　生>その通り。どうしたんだろう。今日はみんなやけに冴えてるね。さあ、どうやら、バランスがとれたね。では、残りの解答をまなぶにまとめてもらおう。

<まなぶ>はい。

数列$\{a_n + 2^n\}$は公比３の等比数列で、初項は、$a_1 + 2 = 7$ 、よって一般項は、

$$a_n + 2^n = 7 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = 7 \cdot 3^{n-1} - 2^n$$

<先生>本当にみんな冴えてる。素晴らしいね。幸せな気分で今日は終れそうです。

<まなぶ>先生、質問なんですが。この場合、(*)は結局は使ってないことになりますが、何の意味があったんですか？

<先　生> ……。

Note)

かなり、虚構性の強い内容になってしまいましたが、この場合の(＊)は、確かに結果としては不要になってしまいます。敢えて、理由を付けるのなら式(♭)を導くためのイメージ作りということになるでしょう。値 2^{n-1} を振り分けて、$b2^{n-1}$ を作ると考えればいいわけです。ただそれ以上に実は、この解法は大きな発展性を含みもっています。

一般に $a_{n+1}-pa_n=qr^n$ 　の解法は、マニュアル的にはその両辺を p^n または q^n で割ることにより求められますが、特性方程式の概念を発展させるのであれば、特解(特性解)を理解する必要があると思います。

例えば、隣接二項漸化式

$$a_{n+1}-pa_n=f(n)$$

を解くためには、

$$t_{n+1}-pt_n=f(n) \qquad \cdots\cdots\cdots(\sharp)$$

なる式を用意します。二式の差をとると、

$$a_{n+1}-t_{n+1}=p(a_n-t_n)$$

と変形できますから、$\{a_n-t_n\}$ は公比pの等比数列となり、一般解

$$a_n=t_n+(a_1-t_1)p^{n-1}$$

が得られます。

この(♯)の式を満たす数列 $\{t_n\}$ の1つを特解といいますが、このとき $f(n)$ が定数のとき(♯)は特性方程式を意味している訳であり、特解は平衡値となります。結局、本文の小手技は、間接的に、(＊)のイメージ付けからこの(♯)を求めたことになっている訳です。

具体的に、本文のｅｘ）の問題で考えると、

$$t_{n+1}-3t_n=2^n$$

に対して、$t_n=a2^n$ とおくと、

$$a2^{n+1}-3a2^n=2^n$$

両辺を 2^n で割って、

$$2a-3a=1$$

これから、$a=-1$。よって、$t_n=-2^n$ より、

$$\therefore \quad a_n=-2^n+7\cdot 3^{n-1}$$

となります。

それでは、この特解による解法を利用して、次の問題を解いてみましょう。

> ｅｘ）次の数列の初項から第ｎ項までの和を求めよ。
>
> $$1,\ 3\cdot 2,\ 5\cdot 2^2,\ 7\cdot 2^3, \cdots\cdots\cdots, (2n-1)\cdot 2^{n-1}$$

解）和を S_n とおくと、

$$S_n=1+3\cdot 2+5\cdot 2^2+\cdots\cdots\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}$$

これから、

$$S_{n+1}-S_n=(2n+1)\cdot 2^n$$

よって、この隣接二項漸化式の一般解を求めればよいことになります。

$$t_{n+1}-t_n=(2n+1)\cdot 2^n \cdots\cdots\cdots①$$

二式の差をとって、$S_{n+1}-t_{n+1}=S_n-t_n$

これから、$S_n-t_n=S_1-t_1=a_1-t_1=1-t_1$

また、①を満たす特解を、$t_n=(an+b)\cdot 2^n$ とすると、①に代入して、

$$\{a(n+1)+b\}\cdot 2^{n+1}-(an+b)\cdot 2^n=(2n+1)\cdot 2^n$$
$$2(an+a+b)-(an+b)=2n+1$$
$$(a-2)n+(2a+b-1)=0$$

ｎの恒等式とみると、$a=2, b=-3$

よって、$t_n=(2n-3)\cdot 2^n$ ですから、

$$S_n=t_n+(1-t_1)=(2n-3)\cdot 2^n+3$$