

# 出会いの確率の小手技

札幌旭丘高校 中村文則

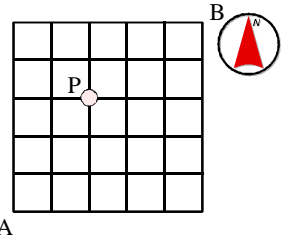
## 確からしさの不確かさ

- <まなぶ> その考え方はおかしいだろ。  
 <かず子> まなぶの解法だって、中途半端なやりかたよ。ほんと、性格と一緒にね。  
 <よしお> まあまあ二人とも落ち着いて

< 授業開始のベル >

- <先 生> どうしたの。ずいぶん騒がしいけれど。  
 <アリス> あおう、最短経路の確率についてかず子に教えて貰っていたんです。そしたらまなぶがそれはおかしいといひだして。  
 <先 生> どんな問題なの。  
 <アリス> はい、これです。

図のような碁盤状の街路で、AからBへ最短経路で進む甲と、BからAへ最短経路で進む乙が点Pで出会う確率を求めよ。



- <先 生> おやっ、ずいぶんシンプルな条件設定だね。で、二人はどう考えたの。  
 <かず子> はい、私はまず乙がAからPを通ってBに行く確率を考えました。  
 AからBへの最短経路の場合の数は東に5本、北に5本ずつ道があることより、10本から北に行く5本を選び、  
 ${}_{10}C_5 = 252$  (通り)  
 次に、AからPまでの最短経路数は ${}_5C_2$  通り、PからBは ${}_5C_3$  通りだから、 $A \rightarrow P \rightarrow B$  は、  
 ${}_5C_2 \times {}_5C_3 = 100$  (通り)

以上より、甲が点Pを通る確率は

$$\frac{100}{252} = \frac{25}{63}$$

乙がBからAへ進む場合も、全体の経路数は ${}_{10}C_5$  で、 $B \rightarrow P \rightarrow A$  は、 ${}_5C_3 \times {}_5C_2 = 100$  と同じだから、

二人が出会う確率は

$$\frac{25}{63} \times \frac{25}{63} = \frac{625}{3969}$$

となります。

間違っていないですよ。それなのにまなぶったら.....。

- <まなぶ> 確率ってプロバビリティ、予測のことだろ。碁盤の目をした道を歩くときには交差点でどの方向に進むか考えながら歩かない。普通は公平な僕のように半々に選ぶとしたらどの交差点も $\frac{1}{2}$ の確率で道を選ぶわけでしょ。だから甲がAからPまで歩くときは、反復試行の考え方で、東に2つ、北に3つ進めばいいから、

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

で、乙の場合は、西に3つ、南に2つ進むわけだから、

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

したがって、出会う確率は

$$\frac{5}{16} \times \frac{5}{16} = \frac{25}{256}$$

やっぱり確率はこういうように主観的に考えなければ

- <先 生> なるほどね。で、アリスとよしおはどう思うの。  
 <アリス> かず子に教えて貰ったときはなるほどと思ったのですが、あとからまなぶの説明を聞いたならこれもそうだなと思ってしまっ.....。  
 <よしお> ちょっといくつか引っかかる点があってどちらも正しいか結論が出せないんです。  
 <かず子> 何が引っかかるのよ。  
 <よしお> 二人の「出会う」ということの解釈の違いなんだ。かず子の場合は、甲はAからBへ、乙はBからAや進んだものを全事象と考えているだろ。ということは「出会う」というよりは「出会った」確率のような気がするんだ。それに対してまなぶの考え方は交差点で道を選びながら二人が「出会う」ときの確率を考えているじゃないだろうか。

<まなぶ> だからプロバビリティといったら。予測、予測だよ。かず子の考え方は「会った」というより「すれ違った」だけじゃない。出会いの喜びってものがないだろ。

<かず子> 何、訳分かんないこといってるのよ。問題ではAからBへ進んで書いてあるのよ。だからこの問題は実際に通った経路の中で出会っていたものがどうなのかってことだよ。まなぶのような現実主義者が、出会ってからあとの肝心なことを推測しないでどうするのよ。

<よしお> 僕には、まなぶの考え方にも気になることがあるんだ。それはね。点Pで本当に出会えるかってことなんだ。二人の歩く速さが同じであればいいけど、違ってたら点Pでは出会えなくなるだろ。

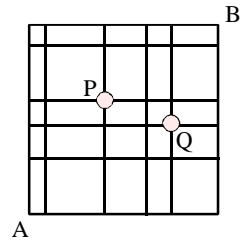
<アリス> あっ、わたしも何か引っかかっていたんだけど、それだったんだわ。かず子の考え方だと道幅が違っていても会えることはできるけど、まなぶの場合は会えないわよね。

<まなぶ> そんなことないよ。交差点での道の選び方だけを考えれば、時間や道幅なんか気にしなくていいじゃないか。

<かず子> でも図のQの位置で出会うことはまなぶの考え方だと出来ないわよ。

<まなぶ> あね、もっと現実的に考えようよ。点Qは、甲も乙も通ることはあるかもしれないけど、それは出会うってことではないだろ。ふつう出会うっていったら、甲、乙がばったり出会うような位置を公平に決めるだろ。

<先生> ストップ。白熱してきたね。みんなの考え方それぞれに一理あると思う。面白い話題だから少し掘り下げてみようか。まず考え方を整理するために次の問題を解いてごらん。



Ex1) 図のAからBまでの最短経路でPを通るものの確率を求めよ。

まなぶとかず子が解くとまた言い争いになるから、これは、アリスとよしおにお願いしよう。

<アリス> かず子流に解きます。AからBまでの最短経路数は、 ${}^9C_4$ 、AからPまでは ${}^6C_3$ 、PからBまでは ${}^3C_1$  通りだから、確率は、

$$\frac{{}^6C_3 \times {}^3C_1}{{}^9C_4} = \frac{10}{21}$$

<よしお> では僕はまなぶ流ですね。AからPまでは各交差点で道を選ぶ確率は $\frac{1}{2}$ で等しく、右に3、上に3だけ進めばいいから、

$${}^6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

あれっ、でも、これでいいんだらうか。

<まなぶ> この場合はAからBへいく途中で点Pを通るだろ。家をでてコンビニによってから学校へいくようなものだ。だから、先ほどの出会いの確率と違い、PからBへ進む確率も考える必要があると思うな。その確率は、右に2上に1だけ進めばいいから、

$${}^3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$$

だから、点Pを通る確率は、

$$\frac{5}{16} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{128}$$

<かず子> それおかしいと思うわ。だってね。点Pを通ったあと、図の点Qの位置にきたら、道を選ぶ必要はもうないじゃない。あとはQからBへまっすぐ行くだけだわ。

<まなぶ> それは進める道を制限して考えるからそうなるわけで、道ってどこまでもずーっ延びているものだろ。そう考えれば、どの交差点でも右か上を $\frac{1}{2}$ の確率で選べるだろ。

<かず子> でも図の碁盤状の道路でAからBまでの経路でしょ。図をちゃんと見なさいよ。

<先生> ストップ。先生の話聴こう。二人の考え方はどちらも間違っていない。これは問題の設定がちょっと曖昧なことに原因がある。

<アリス> やっぱりそうですね。この場合は図に描かれている経路の中で考えるとしないとおかしいですよ。

<よしお> それと、各交差点で右上の道を選ぶ確率は等しいということが入っていないとまずいと思います。

<かず子> でも私の考え方だと何も問題は起きないわよ。

<先生> みんなの指摘はすべて当たっている。問題では最短経路をどのように選ぶかということが実は抜けているんだ。

「どの最短経路の道の選び方も等確率」

と考えれば、かず子流の確率が正しいことになる。それに対して、

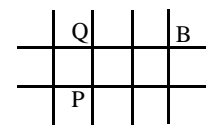
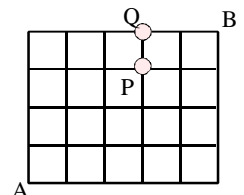
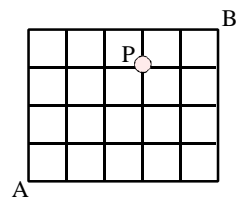
「どの交差点での道の選び方も等確率」

と考えれば、まなぶ流の確率になってしまう。本当はこのことは問題文の中にはっきりと明示されていなければいけない。

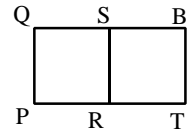
<よしお> 先生が出会いの確率の問題を見たときにシンプルな条件設定っていついていたことが気にはなっていたんです。そのことだったんですね。

<まなぶ> ということは僕の考え方は間違いじゃないってことだ。

<かず子> でも、まだ解決できてない点もあるわ。アリスがいったように、図の範囲の中で考えるならば点Qから先は交差点で等しい確率でと考えれば道は右方向しかないことになるから選ぶ必要はないじゃない。



<先生> P から B までの最短経路の確率がどうなっているかは実際に道を選んで確率を求めてみればよい。例えば、右図のように交差点に名前をつけよう。



点 Q を通る場合、 $P \rightarrow Q$  の道は  $\frac{1}{2}$  の確率で選ばれ、それ以降は  $Q \rightarrow S \rightarrow B$  と進むから、確率は

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

では点 R を通る場合はどうなるだろう。

<アリス>  $P \rightarrow R$  は  $\frac{1}{2}$  です。ここで S または T に分かれます。

$R \rightarrow S$  の場合は  $\frac{1}{2}$  で、後は  $S \rightarrow B$  へいくしかないから、

$$P \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow B \text{ は } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$$

同様に考えて、

$$P \rightarrow R \rightarrow T \rightarrow B \text{ は } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$$

だから、

$$P \rightarrow R \rightarrow B \text{ は } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

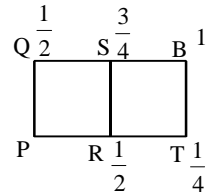
<まなぶ> ということは、

$$P \rightarrow B \text{ は } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

なんだ、確率は 1 だ。考えてみれば P を通ったあとは B に到着するのは当たり前だよな。

<先生> そう当たり前。でもその当たり前のことが大事なんだ。

必要なのは A から B までの経路であって、それ以降は経路が閉じていけば自然に行き着く先は決まってしまうんだ。ちなみに先ほどみんなが計算した確率は、各交差点での確率を右図のように書き込むことで求められる。それとこのことから交差点で等確率に道を選んだ場合、各々の最短経路の通る確率は違ってくる。



$$A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow B \text{ では } \frac{5}{16} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{5}{32}$$

$$A \rightarrow P \rightarrow R \rightarrow T \rightarrow B \text{ では } \frac{5}{16} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{5}{64}$$

これに対して、かず子流の場合は、どの道を通る場合でもその確率は、 $\frac{1}{9C_4} = \frac{1}{126}$  になっており、同様に確からしい。

だから 2 人の確率が一致しないのは当たり前なんだ。

<よしお> ということはまなぶ流での確率は、 $A \rightarrow P$  までは  $\frac{5}{16}$  で、 $P \rightarrow B$  は 1 の確率だから、

$$\frac{5}{16} \times 1 = \frac{5}{16}$$

と考えればいいんですね。

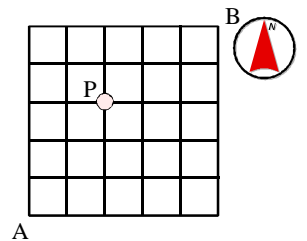
<アリス> そうか、そうすると、「出会いの確率」の場合でまなぶが出会う地点までの確率を考えたことも納得できるわ。甲の  $P \rightarrow B$  の最短経路と乙の  $P \rightarrow A$  の最短経路はどちらも 1 になるってことだから、「出会う」でも「出会った」でも同じなのね。

<先生> その通り。それではそろそろ「出会いの確率」に決着をつけようか。まずは条件整備を兼ねてもう一度問題を示そう。

図のように東西に 5 本、南北に 5 本の道が等間隔に走っている碁盤状の道路がある。いま、甲は A から B へ、乙は B から A へ最短の道を選んで同じ速さで進む。次の各場合について、甲と乙が点 P で出会う確率を求めよ。

(1) どの最短の道順も同じ確率で選ぶとき

(2) どの交差点においても同じ確率で、甲は東または北、乙は西または南方向の道を選ぶとき



<アリス> わぁー、ずいぶん問題が長くなったわ。

<よしお> 条件を明確に提示しないと、何の確率を要求しているのか伝わらないってことですね。

<かず子> わたしが先ほど解答したのは(1)の場合についてですね。

<まなぶ> 僕のは(2)だ。でも僕は、出会うまでの確率を考えていたけど、出会った後はかならず甲は B へ、乙は A へ到着するから、正確に書くと、

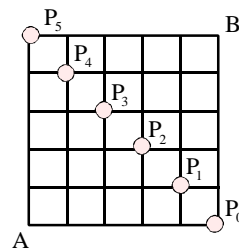
$$\left(\frac{5}{16} \times 1\right) \times \left(\frac{5}{16} \times 1\right) = \frac{25}{256}$$

ということなんだろうな。

<先生> 確率計算で大事なことは「同様に確からしい」ということと、「確率の和は 1」であるということだ。だから計算上では省

略しても、考察上では「どうでもいい」という意味の確率1を省略してはいけない。  
 せっかくだからこの問題をもう少し発展させてみよう。

(1) (2)のそれぞれの場合について、甲と乙がどこかで出会う確率を求めよ。



<かず子> 出会う場所は必ずしもPだけじゃないってことですね。東西、南北合わせて10本の道を通るんでしょ。だから甲乙それぞれが5本を通ったときに会える。したがって出会う場所は図のP<sub>0</sub>からP<sub>5</sub>の6箇所ね。あとはそれぞれの確率ね。

P<sub>3</sub>の場合は先ほどのケースだから、

$$\frac{{}_5C_2 \cdot {}_5C_3}{{}_{10}C_5} \times \frac{{}_5C_3 \cdot {}_5C_2}{{}_{10}C_5} = \frac{({}_5C_2)^4}{({}_{10}C_5)^2}$$

他も同様にできるけど、大変そうね。

<よしお> 線分ABに関しての対称性を考えればP<sub>2</sub>も同じ確率だよ。

<かず子> ということは、P<sub>0</sub>とP<sub>5</sub>、P<sub>1</sub>とP<sub>4</sub>も同じってことね。少しラクになったわ。

$$P_0 \text{ は } \frac{{}_5C_0 \cdot {}_5C_5}{{}_{10}C_5} \times \frac{{}_5C_5 \cdot {}_5C_0}{{}_{10}C_5} = \frac{({}_5C_0)^4}{({}_{10}C_5)^2}$$

$$P_1 \text{ は } \frac{{}_5C_1 \cdot {}_5C_4}{{}_{10}C_5} \times \frac{{}_5C_4 \cdot {}_5C_1}{{}_{10}C_5} = \frac{({}_5C_1)^4}{({}_{10}C_5)^2}$$

だから、確率は、

$$2 \left( \frac{({}_5C_0)^4}{({}_{10}C_5)^2} + \frac{({}_5C_1)^4}{({}_{10}C_5)^2} + \frac{({}_5C_2)^4}{({}_{10}C_5)^2} \right) = 2 \times \frac{({}_5C_0)^4 + ({}_5C_1)^4 + ({}_5C_2)^4}{({}_{10}C_5)^2} = \frac{253}{756}$$

できました。

<先生> 対称性を利用したのはうまい手だね。それでは、次はまなぶの番だ。

<まなぶ> 僕の場合はかず子と違って計算は簡単だ。AからP<sub>0</sub>, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, ..., P<sub>5</sub>までの各交差点での道の選び方はすべて $\frac{1}{2}$ だし、Bにつ

いても同様。それとさきほどよしおがいていた対称性を使うと

$$2 \left\{ {}_5C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times {}_5C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_5C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) \times {}_5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) + {}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\}$$

$$= \frac{2 \left\{ ({}_5C_0)^2 + ({}_5C_1)^2 + ({}_5C_2)^2 \right\}}{2^{10}} = \frac{63}{256}$$

ほら、楽勝だ。

<先生> 実は対称性を利用しなくてもまなぶ流の確率をもっと手際よく計算することもできるんだ。

P<sub>0</sub>, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, ..., P<sub>5</sub>を通る場合の数Sは

$$S = ({}_5C_0)^2 + ({}_5C_1)^2 + \dots + ({}_5C_5)^2$$

のことだね。ここで、たとえば $({}_5C_2)^2 = {}_5C_2 \times {}_5C_3$ であるから、これはA→P<sub>2</sub>→Bの最短経路の場合の数とみることもできる。一般に、同じように考えると、 $({}_5C_k)^2$  (k=0,1,2,3,4,5)は、A→P<sub>k</sub>→Bの最短経路数だ。ところが、AからBへいくためには、必ずP<sub>0</sub>, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, ..., P<sub>5</sub>を通り、かつこれらは互いに排反であるから、結局SはA→Bの最短経路数に等しい。したがって

$$S = {}_{10}C_5 \text{ (通り)}$$

であるから、確率は、

$$\frac{{}_{10}C_5}{2^{10}}$$

となる。

<まなぶ> うわっ、すごい綺麗な式でまとめられてしまった。それに比べ、かず子の式の見苦しいこと。

<かず子> 失礼ね。大体あんたが考えついたことではないでしょ。わたしはそういう鳥に油揚げというか、謙虚とは程遠い極楽トンボの発想が許せないのよ。

<まなぶ> 俺はトンビやトンボかよ。

<よしお> また始まった。

<先生> ストップ、はい、離れて。先生はK1のレフリーではないぞ。しょうがない、まなぶ流、かず子流、2つの流派の仲裁をしてみよう。二人の確率が違ってしまふ原因はなんだったかな。

<アリス> 同様に確からしいものの対象が違うことです。

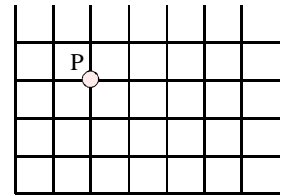
<先生> そう。例えばまなぶ流の場合は交差点の道の選び方が等確率と考えるわけだけど、これが曲者だ。甲はまっすぐ東に進んでいくとやがて東は行き止まり壁となって北方向だけの道となる。

<まなぶ> それがどうかしたんですか。さらに東にいってしまつたら目的のBに辿り着けないじゃないですか。

<先生> その壁をぶち破るんだ。Ex1の問題を次のように変えてみよう。

Ex2) 図において、Aから右または上の方向に9回進むとき、Pを通るものの確率を求めよ。

こうするとどうなる。



<よしお> 経路が閉じてないから、どの交差点でも $\frac{1}{2}$ の確率で右または上を選ぶことになりますね。

<かず子> 辿り着く点はたくさんでてるわ。

<先生> ではそれを書いてごらん。

<アリス> はい、わたしが書きます……、直角二等辺三角形ができるのね。

辿り着く点も、図の $B_0$ から $B_9$ の10個の点が考えられるわ。

<先生> ではその最短経路の場合の数はどうなる。

<よしお>  $A \rightarrow B_0$ は1通り。 $A \rightarrow B_1$ は ${}_9C_1$ 通り、 $A \rightarrow B_2$ は ${}_9C_2$ 通り……、だから、

$${}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + \dots + {}_9C_9$$

通りです。

<まなぶ> これって二項係数の和だ。

$${}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + \dots + {}_9C_9 = 2^9$$

になる。

<先生> では、次に点Pを通る場合の確率をかず子流の「最短経路を通る確率が等しい」と考えて求めてごらん。

<かず子>  $A \rightarrow P$ までは、 ${}_6C_3 = 20$

Pからは、3回進んで、 $B_3, B_4, B_5, B_6$ のいずれからに止まるから、

$${}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_3C_3 = 2^3 = 8$$

だから、確率は

$$\frac{20 \times 8}{2^9} = \frac{5}{16}$$

あれ、この確率は、Ex1でよしおが求めたものと同じだね。

<先生> まなぶ流の「交差点を通る確率が等しい」では $A \rightarrow P$ までの確率が問題であり、それ以降は残り3回でどう進もうと関係ない。だからP以後の進み方の確率は1だから、

$${}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 1 = \frac{5}{16}$$

ということだったね。どうだい、まなぶとかず子の抗争の和議できる道筋が見えてきたね。

では、二人の火種となった問題で、まなぶ流と、かず流の確率が等しくなるようにするためにはどう問題を変えればいゝ。

<まなぶ> どの交差点も $\frac{1}{2}$ の確率で道を選んで、

<かず子> 経路を閉じないようにして、あっ、分かった。

<まなぶ> 僕も分かった、甲と乙が出会った時点で移動を止めればいゝんだ。

<よしお> 試行を

「甲はAからB、乙はBからA」

とするのではなく、

「甲はAから、東、北に合せて5回、乙はBから、西、南に合せて5回進む」

とすればいゝのですね。

<アリス> この試行だと、図の対角線 $\ell$ 上で止まり、最短経路、交差点どちらを等確率で考えても、全体の場合の数は等しくなるわ。

<かず子> 甲が5回進む場合の数は $2^5$ 、乙についても同じだから、全体の場合の数は、

$$2^5 \times 2^5 = 2^{10} \text{ (通り)}$$

点Pに行く場合の数は、Aは ${}_5C_2$ 通り、Bは ${}_5C_3$ 通りより、出会う場合の数は、

$${}_5C_2 \times {}_5C_3 \text{ (通り)}$$

$$\text{だから、確率は } \frac{{}_5C_2 \times {}_5C_3}{2^{10}} = \frac{25}{256}$$

<まなぶ> 僕の場合も

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{25}{256}$$

で、「掛ける1」は必要なくなる。

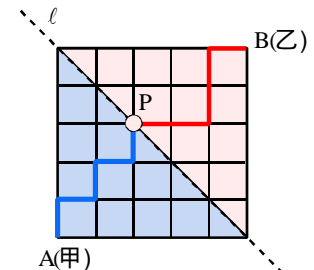
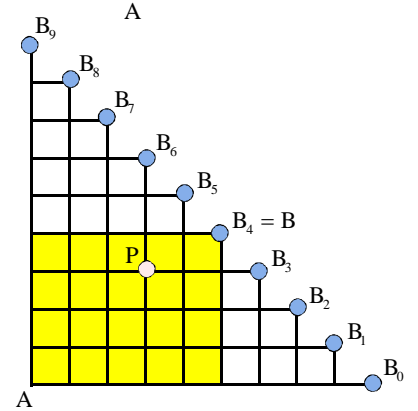
<先生> かず子流の閉じた経路を開き、まなぶ流の道の壁を崩すことでお互い歩み寄ってみる。甲はまなぶで乙はかず子と考えるとごらん。違う道を歩いていた二人がばったり出会う。その先どうするかはふたりが話し合って決めればいゝってことだ。

<かず子> 先生、何ひとりでもとめてるんですか。どうして私がまなぶと同じ道を歩かなければならないよ。

<まなぶ> 違った考え方をするから救われているんじゃないですか。

<アリス> Y(>\_<)Y ヒヒ!

<よしお> ( ) ヲヤ



## あとがき

「同様に確からしい」ことは、確率を論じる上での考察に不可欠なことである。  
何を同様に確からしいと見るかで本文のようにその確率が異なってくる場合がある。  
また、確率の和が1、柔らかくいうと「どうでもいいことの起こる確率は1」であることも計算上では省略しても、考察上は認識していなければならない。  
例えば次の問題、

箱の中に3本の当たりくじを含む12本のくじがある。A, B, C 3人がこの順にくじを引くとき、A, B, C のそれぞれが当たりくじを引く確率を求めよ。ただし、引いたくじは箱の中に戻さないとする。

もちろん A, B, C いずれも当たりくじを引く確率は  $\frac{1}{4}$  となる。だが A が当たる確率を、12本中3本のくじがあるから、 $\frac{3}{12}$  としてしまうのは乱暴な考え方である。

この場合の試行は「A, B, C 3人がこの順にくじを引く」わけだから、A が当たりを引いて喜んでそれで終わりというわけではない。その後も引き続き B, C がくじを引いているわけだから、その当たり外れも考える必要がある。

くじの当たりを、外れを  $\times$  とすると、A が当たったあとの B, C については、

、  $\times$ 、  $\times$ 、  $\times \times$

したがって、その確率 P は、

$$P = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{9}{10} + \frac{3}{12} \times \frac{9}{11} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{12} \times \frac{9}{11} \times \frac{8}{10}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} P &= \frac{3}{12} \left( \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} + \frac{2}{11} \times \frac{9}{10} + \frac{9}{11} \times \frac{2}{10} + \frac{9}{11} \times \frac{8}{10} \right) \\ &= \frac{3}{12} \left\{ \frac{2}{11} \left( \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \right) + \frac{9}{11} \left( \frac{2}{10} + \frac{8}{10} \right) \right\} \\ &= \frac{3}{12} \left( \frac{2}{11} + \frac{9}{11} \right) \left( \frac{2}{10} + \frac{8}{10} \right) \\ &= \frac{3}{12} \times 1 \times 1 \end{aligned}$$

となる。ところが、こんな面倒な計算はしてられないから、B と C については「どうでもいい」と考えることで「掛ける1」倍をし、さらに計算上はそれも省略してしまう。本文ではまなぶ流の「交差点を等確率で選ぶ」場合も点 A から点 P に辿り着いてしまえばあとはどうでもいいわけで、けってして  $P \rightarrow B$  への道を放棄したわけではない。

また、何を全事象とするかで確率の与え方も異なってくる。

くじ引きで C が当たる確率を次のように考えてみよう。

C がくじを引く前に、A, B はすでにくじを引いているわけだから、その引き方は、12本から2本のくじをいっぺんに引いたものとみなすと、場合の数は、

$${}_{12}C_2 \quad (\text{通り})$$

このあと、C が残りの10本の中から1本引く場合の数は、

$${}_{10}C_1 \quad (\text{通り})$$

これから、全体の引き方の場合の数は、

$${}_{12}C_2 \cdot {}_{10}C_1 \quad (\text{通り})$$

次に、C が当たりくじを引く場合の数を求める。

まず C が引くであろう当たりくじを A, B が引くことのないように、よけて確保しておく。その場合の数は、

$${}_3C_1 \quad (\text{通り})$$

A, B はよけた当たりくじ1本を除いた11本から好きなように2本引けばよく、これを2人いっぺんに引くと、その場合の数は、

$${}_{11}C_2 \quad (\text{通り})$$

したがって、C が当たりくじを引く場合の数は、

$${}_{11}C_2 \times {}_3C_1 \quad (\text{通り})$$

よって、その確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_{11}C_2 \times {}_3C_1}{{}_{12}C_2 \times {}_{10}C_1} &= \frac{{}_{11}C_2}{{}_{12}C_2} \times \frac{{}_3C_1}{{}_{10}C_1} \\ &= \frac{11 \times 10}{12 \times 11} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

この考え方は、乗法定理による確率計算を全事象に対する当たりくじを引く事象の比として読み替えたもので、本文の最短経路の確率の扱いと同じである。ただ、このくじ引きの場合は「一本ずつ引く」と「同時に引く」試行の違いはあっても、結果として、その確率は一致してしまう。さらに、くじを引くメンバーも何人でも同じように考えられ、次のように一般化することもできる。

箱の中に  $r$  本の当たりくじを含む  $n$  本のくじがある ( $r \leq n$ )。  $m$  人が順にくじを引くとき、  $k$  番目 ( $1 \leq k \leq m$ ) の人が当たりくじを引く確率は  $\frac{r}{n}$  である。

証明)

1 人目から  $(k-1)$  人目までは同時に  $(k-1)$  本のくじを引き、  $k$  番めが残りの  $(n-k+1)$  本の中から 1 本引くと考え、

$${}_n C_{k-1} \times {}_{n-k+1} C_1 \text{ (通り)}$$

次に、  $k$  番めの人引く当たりくじ 1 本を  $r$  本の中から予めよけて置いて、 その当たりくじ以外を 1 人目から  $(k-1)$  人までが同時に  $(k-1)$  本引くと考え、

$${}_{n-1} C_{k-1} \times {}_r C_1 \text{ (通り)}$$

以上より確率は、

$$\begin{aligned} \frac{{}_{n-1} C_{k-1} \times {}_r C_1}{{}_n C_{k-1} \times {}_{n-k+1} C_1} &= \frac{{}_{n-1} C_{k-1} \times r}{{}_n C_{k-1} \times (n-k+1)} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+2)} \times \frac{r}{n-k+1} \\ &= \frac{r}{n} \end{aligned}$$

試行が異なるのに確率が一致することは、本文では閉じていない経路での「最短経路の選び方」、「交差点での道の選び方」の一致にみてとれ、同様の一般化がなされる。

$$({}_n C_0)^2 + ({}_n C_1)^2 + ({}_n C_2)^2 + \cdots + ({}_n C_n)^2 = {}_{2n} C_n \quad \dots\dots(*)$$

この性質は、本文のように最短経路の場合の数に対応させて求めることができる。

右図の縦横それぞれ  $n$  本の道の最短経路において、点 A から点 B までの最短経路は対角線  $P_0 P_n$  上の格子点を必ず通り、かつ互いに排反である。

$A \rightarrow P_k \rightarrow B$  である最短経路の場合の数は、

$${}_n C_k \times {}_n C_{n-k} = ({}_n C_k)^2 \quad (k=0,1,2,\dots,n)$$

であり、  $A \rightarrow B$  の全体の最短経路数は、  ${}_{2n} C_n$  であることより結論を得る。

このことより、「格子点で等確率に道を選ぶ」場合、点 A から B へ進む甲と、点 B から点 A へ進む乙とが交わる確率は、

$$\sum_{k=0}^n {}_n C_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \times {}_n C_{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{\sum_{k=0}^n ({}_n C_k)^2}{2^{2n}} = \frac{{}_{2n} C_n}{2^{2n}}$$

となり、その確率は、全事象  $2^n \times 2^n = 2^{2n}$  に対して対角線  $P_0 P_n$  を通る場合の数  ${}_{2n} C_n$  の比に変わるのである。

ところで、(\*)は一般には二項定理を用いて証明する。

$$(1+x)^{2n} = {}_{2n} C_0 + {}_{2n} C_1 x + {}_{2n} C_2 x^2 + \cdots + {}_{2n} C_n x^n + \cdots + {}_{2n} C_{2n} x^{2n}$$

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$$

$$= ({}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \cdots + {}_n C_n x^n) ({}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \cdots + {}_n C_n x^n)$$

$$= {}_n C_0 \cdot {}_n C_0 + ({}_n C_0 \cdot {}_n C_1 + {}_n C_1 \cdot {}_n C_0)x + \cdots + ({}_n C_0 \cdot {}_n C_n x^n + {}_n C_1 \cdot {}_n C_{n-1} + \cdots + {}_n C_k \cdot {}_n C_{n-k} + \cdots + {}_n C_n \cdot {}_n C_n)x^n$$

$x^n$  の係数を比較すると、

$${}_{2n} C_n = {}_n C_0 \cdot {}_n C_n x^n + {}_n C_1 \cdot {}_n C_{n-1} + \cdots + {}_n C_k \cdot {}_n C_{n-k} + \cdots + {}_n C_n \cdot {}_n C_n$$

ここで、  ${}_n C_r = {}_n C_{n-r}$  であることより、

$${}_{2n} C_n = ({}_n C_0)^2 + ({}_n C_1)^2 + ({}_n C_2)^2 + \cdots + ({}_n C_n)^2$$

