

不等式の拡張のちょっとした小手技

札幌藻岩高等学校 中村文則

神経衰弱しましょ

<先生> 今日は、みんなの苦手な不等式の証明にチャレンジしてみよう。

ex) 次の不等式を証明せよ。

$$(1) (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$$

$$(2) (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$$

<よしお> 僕が(1)をやります。

(左辺) - (右辺)

$$= (a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2) - (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2)$$

$$= (ay)^2 - 2ay \cdot bx + (bx)^2$$

$$= (ay - bx)^2 \geq 0$$

でいいですね。

<先生> うん。では最後に等号成立の条件を考えよう。

<まなぶ> 簡単だ。平方完成した式が0の場合だから、 $ay = bx$ のときですね。

<先生> これは、比で表すと、 $a:b = x:y$ と同じだね。では、次に(2)を証明してみよう。

<かず子> 私の番だわ。

(左辺) - (右辺)

$$= (a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2)$$

$$- (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2axby + 2bycz + 2czax)$$

$$= a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 - 2axby - 2bycz - 2czax$$

うーん。なんか文字がゴチャゴチャたくさんあって分かりません。

<先生> 確かにどうまとめているかこの式だけでは見当が付きにくいかもしれない。それをどう方向性を見つけていくかというのが不等式の証明のキーポイントになるんだ。具体的にみてみよう。

まず、大事なことは(2)の不等式は(1)の拡張であるということだ。ということは、(1)の証明法は当然拡張した(2)の証明にも保存されていると考えられないだろうか。そこでだ。(1)の展開の結果と(2)の展開の結果を比較してみよう。なにか気がつくことがないだろうか。

<まなぶ> ええーっと、(2)の展開した項の中に(1)の展開した項が含まれているということですか。

<先生> その通り。ということは、その部分は平方完成されて、

$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = (ay - bx)^2$$

となるわけだ。では、それ以外の項はどうだろうか。

<よしお> 同じように平方完成できるということではないでしょうか。そうすると.....

<まなぶ> 分かった!!。さっきの平方完成した式は、 a と b それと x と y についてですよね。じゃ、今度は b と c 、 y と z について考えればいゝのではないですか。

<先生> どうだろうか。ちょっと確認してみよう。

$(ay - bx)^2$ を b と c および y と z の関係に変えると $(bz - cy)^2$ となるね。ではこの式を展開した項が、先ほどの(*)に含まれているかどうか調べてごらん。

<かず子> $(bz - cy)^2 = b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2$ ですから...先生、全部含まれてます。

<まなぶ> そうするとあとは、 a と c 、 x と z の関係を考えればいゝってことですね。

$$(cx - az)^2 = c^2x^2 - 2cazx + a^2z^2$$

あつ、これは、(*)の残りの項に一致している。

<先生> まとめよう。したがって、

$$(左辺) - (右辺) = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \geq 0$$

となって証明ができた。では、最後に等号成立の条件を考えてみよう。

<かず子> はい。 $ay = bx, bz = cy, cx = az$ ですね。

<先生> 比の形にして見やすくしてごらん。

<よしお> $a:b = x:y, b:c = y:z, c:a = z:x$ ですから、 $a:b:c = x:y:z$ となりますね。

<先生> この方がずっと見やすいことが分かるね。では、いまの考え方を使って、次の問題を解いてみよう。

ex) 次の不等式を証明せよ。

(1) $a \geq b, x \geq y$ とするとき、 $(a+b)(x+y) \geq 2(ax+by)$

(2) $a \geq b \geq c, x \geq y \geq z$ とするとき、 $(a+b+c)(x+y+z) \geq 3(ax+by+cz)$

<かず子> (1)は、私がやってみます。この場合、一次式だから、一般には因数分解する方向で考えるんですけどよね。

(左辺) - (右辺)
 $= (ax + ay + bx + by) - 2(ax + by)$
 $= -ax + ay + bx - by$
 $= -(a-b)(x-y) \geq 0$

できました。等号成立は $a = b$ または $x = y$ のときです。

<まなぶ> じゃあ、(2)だ。

(左辺) - (右辺)
 $= (ax + ay + az + bx + by + bz + cx + cy + cz) - 3ax - 3by - 3cz$
 $= ay + az + bx + bz + cx + cy - 2ax - 2by - 2cz$
うーんと、じっと式を睨めっこすると.....あつ、やっぱり(1)の展開式が含まれてる。だから、
 $ay + bx - ax - by = -(a-b)(x-y)$

となります。同様に、 b, c, y, z と c, a, z, x についても考えると、

$bz + cy - by - cz = -(b-c)(y-z)$
 $cx + az - cz - ax = -(c-a)(z-x)$

となって、これを合わせると、展開式の項にすべての項に一致します。

ここで、 $a \geq b \geq c, x \geq y \geq z$ だから、

(左辺) - (右辺)
 $= -(a-b)(x-y) - (b-c)(y-z) - (c-a)(z-x)$
 ≥ 0
となります。

<先生> では、最後に、等号成立のケースを考えてみよう。因数分解された3つの式がすべて0になればいいから、
 $(a = b \text{ または } x = y)$ かつ $(b = c \text{ または } y = z)$ かつ $(c = a \text{ または } z = x)$

となるけど、これは整理して簡単にするとどうなるだろう。

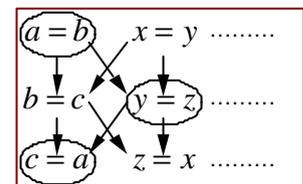
<まなぶ> (1)の等号成立のケースが単純に拡張できると考えると、 $a = b = c$ または $x = y = z$ だと思うんですけど。

<先生> だいぶ不等式の証明の扱い方に慣れてきたね。確認してみよう。

右図を見てごらん。 $a = b, b = c, c = a$ のそれぞれにある2つの等式から1つの等式を選べばいい。たとえば $a = b$ から $a = b$ 、 $b = c$ から $y = z$ 、 $c = a$ から $c = a$ 。するとこれから、 $a = b = c$ が得られるね。他の選び方も考えてごらん。

<かず子> $a = b$ から $x = y$ 、 $b = c$ から $y = z$ 、 $c = a$ を選ぶと、 $x = y = z$ となるわ。

<先生> どういう選び方をしても、必ず $a = b = c$ か $x = y = z$ のどちらかの式がでてくるね。これからまなぶが予想した等号成立のケースが正しかったことがわかったね。さて、本時のまとめだ。



今日の不等式の証明は、もっとも単純な絶対不等式を、変数を増やして拡張していく場合には、もともとの変形式が保存されていることを利用したものだ。左辺から右辺を引いて、多項式をバラバラに分解して、単項式を組み合わせたわけだけど、例えるならば、トランプゲームで神経衰弱をするようなもの。組み合わせるペアさえ分かれば簡単に拾い出してまとめていけるということだ。

<まなぶ> なるほど。分かったような気がする。僕たち3人がまとまらないのはペアが作れないからなんですね。

<かず子> そういう問題じゃないでしょ。

あとがき

本文の不等式は、前半はコーシーの不等式、後半はチェビシェフの不等式であり、どちらも有名絶対不等式です。変数の個数(次元)で拡張していけば、それぞれ次の不等式が得られます。

$$(1) \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \quad \text{等号成立は、} a_k = t b_k \quad (k=1,2,\dots,n)$$

$$(2) a_k, b_k \quad (k=1,2,3,\dots,n) \text{ のとき} \quad \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n b_k}{n} \geq \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_k}{n} \quad \text{等号成立は、} a_k = a_j \text{ または } b_k = b_j$$

なお、コーシーの不等式は、 n 次元空間でのベクトルの内積から定積分の不等式に拡張することでシュワルツの不等式と呼ばれることもあります。

さて、これらの不等式の証明ですが、チェビシェフの不等式は、次の証明法が一般的です。

$$(a+b)(x+y) \quad 2(ax+by)$$

$$(b+c)(y+z) \quad 2(by+cz)$$

$$(c+a)(z+x) \quad 2(cz+ax)$$

3式を辺々加えて、

$$(a+b)x + (a+b)y + (b+c)y + (b+c)z + (c+a)z + (c+a)x$$

$$4(ax+by+cz)$$

よって、

$$(a+b+c)x + (a+b+c)y + (a+b+c)z + (ax+by+cz)$$

$$4(ax+by+cz)$$

$$(a+b+c)(x+y+z) \geq 3(ax+by+cz)$$

これも、変数拡張の証明の一方ですが、シュワルツの不等式の拡張にも応用できます。

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$$

$$(b^2+c^2)(y^2+z^2) \geq (by+cz)^2$$

$$(c^2+a^2)(z^2+x^2) \geq (cz+ax)^2$$

3式を辺々加えて、

$$(a^2+b^2)x^2 + (a^2+b^2)y^2 + (b^2+c^2)y^2 + (b^2+c^2)z^2 + (c^2+a^2)z^2 + (c^2+a^2)x^2$$

$$2(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) + 2(abxy + bcyz + cazx)$$

よって、

$$(a^2+b^2+c^2)x^2 + (b^2+c^2+a^2)y^2 + (c^2+a^2+b^2)z^2 + (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)$$

$$2(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) + 2(abxy + bcyz + cazx)$$

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$$

本文の中での証明法が、証明すべき式を展開(分解)し、拡張前の式に咀嚼することで組合わせを求めるのに対して、上述の方法は、変数を積み上げて証明すべき形を構築していく方法といえるでしょう。ただ、証明の印象で言えば、この解法は巧過ぎるように思えます。結果と方法どちらを踏襲して拡張するかという選択であれば、後者の方が組みし易いのではないのでしょうか。もう一例。

ex) 次の不等式を証明せよ。

$$(1) |a| < 1, |b| < 1 \text{ のとき、} ab + 1 > a + b$$

$$(2) |a| < 1, |b| < 1, |c| < 1 \text{ のとき、} abc + 2 > a + b + c$$

(1)の証明

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = ab + 1 - (a + b)$$

$$= a(b-1) + (1-b)$$

$$= (1-a)(1-b) > 0$$

(2)の証明

$|a| < 1, |b| < 1$ より、 $|ab| < 1$ 。(*)

よって、

$$(左辺) = abc + 2$$

$$= (ab)c + 1 + 1$$

$$> ab + c + 1$$

$$= (ab + 1) + c$$

$$> a + b + c = (右辺)$$

この解法は、(*)の予測ができなければ不可能です。(1)の結果を利用した解法ですが、生徒にとっては「上手い」というだけであって、思いつくのは難しいでしょう。

これに対して、(1)の方法を踏襲した解答を以下、示しましょう。

(2)の別証明

$$(左辺) - (右辺) = abc + 2 - a - b - c$$

$$= (1-a)(1-b) + 1 + abc - ab - c$$

$$= (1-a)(1-b) + c(ab-1) + (1-ab)$$

$$= (1-a)(1-b) + (1-ab)(1-c)$$

ここで、 $|a| < 1, |b| < 1$ より、 $|ab| < 1$ 。よって、 $1 - ab > 0$

以上より(左辺)-(右辺) > 0 が示される。

(1)から自然と式変形が導かれ、(*)も必然的に要求されることが分かるでしょう。

この証明法を三角不等式に適用してみましょう。

ex) 次の不等式を証明せよ。

$$(1) \quad |a+b| \leq |a| + |b|$$

$$(2) \quad |a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$$

(1)の証明

$$(左辺) - (右辺) = |a+b|^2 - (|a| + |b|)^2$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 + 2|a||b| + b^2)$$

$$= 2(ab - |ab|) \leq 0$$

等号成立は $ab \geq 0$ 、すなわち a と b が同符号のときである。

(2)の証明

$$(左辺) - (右辺) = |a+b+c|^2 - (|a| + |b| + |c|)^2$$

$$= 2(ab+bc+ca - |a||b| - |b||c| - |c||a|)$$

$$= 2(ab - |ab|) + 2(bc - |bc|) + 2(ca - |ca|) \leq 0$$

等号成立は、 $ab \geq 0, bc \geq 0, ca \geq 0$ より、 a, b, c が同符号の場合である。

この証明は、(1)の結果を利用すると、

$$|a+b+c| \leq |a+b| + |c|$$

$$\leq |a| + |b| + |c|$$

で終わってしまうわけですが、ではここから等号成立の条件を求めようすると、

$$ab \geq 0 \text{ より、} a, b \text{ は同符号。また、} (a+b)c \geq 0$$

$$a \geq 0, b \geq 0 \text{ のとき、} a+b \geq 0 \text{ より、} c \geq 0$$

$$a \leq 0, b \leq 0 \text{ のとき、} a+b \leq 0 \text{ より、} c \leq 0$$

よって、 a, b, c は同符号となります。

エレガントな解答の裏にはしつぺ返しがあったりするので。(なお、この場合の等号成立の条件は、値が0となる場合も

考慮するともっと面倒になります。)

最後に、 n 変数におけるコーシーの不等式、チェビシェフの不等式の証明を示しておきましょう。

コーシーの不等式の証明は、 $\sum_{k=1}^n (a_k t + b_k)^2 \geq 0$ から導かれます。

$\sum_{k=1}^n a_k^2 t^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k t + \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq 0$ から、この2次方程式の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq 0 \text{ より得られます。}$$

これを、本文の方法を利用して証明します。下記の式を証明すればいいことが予想されます。

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ i < j}}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

この式は、コーシー・ラグランジェの恒等式といえます。

数学的帰納法で証明しましょう。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \sum_{k=1}^{n+1} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k \right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + a_{n+1}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 + b_{n+1}^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k + a_{n+1} b_{n+1} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 b_{n+1}^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k a_{n+1} b_{n+1} + \sum_{k=1}^n b_k^2 a_{n+1}^2 \\ &= \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ i < j}}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2 + \sum_{k=1}^n (a_k b_{n+1} - b_k a_{n+1})^2 \\ &= \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ i < j}}^{n+1} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \end{aligned}$$

同様に、チェビシェフの不等式は、

$$n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ i < j}}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

を証明することから得られます。

$$\begin{aligned} (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n+1} a_k \sum_{k=1}^{n+1} b_k &= (n+1) \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k + a_{n+1} b_{n+1} \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k + b_{n+1} \right) \\ &= \left(n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k \right) + \left(n a_{n+1} b_{n+1} + \sum_{k=1}^n a_k b_k - a_{n+1} \sum_{k=1}^n b_k - b_{n+1} \sum_{k=1}^n a_k \right) \\ &= \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ i < j}}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j) + \sum_{k=1}^n (a_k b_k - a_{n+1} b_k - a_k b_{n+1} + a_{n+1} b_{n+1}) \\ &= \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ i < j}}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j) + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{n+1})(b_k - b_{n+1}) \\ &= \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ i < j}}^{n+1} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \end{aligned}$$