

事象の排反と独立の小手技

札幌旭丘高等学校 中村文則

そんなの関係ねえ関係

- <かず子> みんなに聞きたいんだけど、排反と独立の違いって分る。
- <アリス> 2つの事象が同時に起こらないのが排反で、2つの事象がお互いに影響を与えないのが独立ではないですか。
- <かず子> そうなんだけど、同時に起こらないってことはお互いに影響を与えないことだから、排反ってことは独立ってことでもあるような気がするの。どちらも片方がどうであってもしいのだから、人間に例えれば2人は赤の他人ってことよね。
- <まなぶ> その視線、僕の方を見てない？。でも、かず子のいっていることは分るな。排反、独立どちらも相手が何をしようとして、そんなの関係ねえってことだもんな。よしおはどう思う。
- <よしお> 排反はある試行において一方が起こったときに他方は決して起こらないこと。独立はお互いの起こり方が他方に影響を与えないということで、どちらも起こっている。その違いと思うけど。
- <かず子> さいころを1個振ったとき、奇数の目がでること、偶数の目がでることは排反でしょ。でも、この場合は奇数の目も偶数の目も試行の結果起こっているよね。
- <よしお> 偶数と奇数の2つの目を考えるのではなく、1つの目に対して、それがどういう事象を表すかということだよ。例えば、3の目がでた場合、事象を奇数・素数とすると、両方の事象を表しているだろ。でも、事象を奇数・偶数とすると、片方だけの事象しか表さない。
- <まなぶ> 奇数・偶数のように排反は、男女のようにお互い相容れるものがないということだな。
- <かず子> でもお互い相容れるものがないから独立するわけだし、2つの意味を持ち関係があるときに独立ということになるのかやっぱりピンとこない。先生に聞いて見ましようよ。

.....

- <先生> 排反と独立を同じものと考え混同している人は多い。その違いを考える前に、まず、排反事象の定義をもう一度確認してみようか。
- <よしお> 事象 A, B に対して、 $A \cap B = \phi$ であるとき、 A と B は排反でした。
- <アリス> ベン図で示すと分かりやすかったわよね。右図の関係にあるときです。
- <先生> そうだね。この位置関係が排反であることを示す。次に独立だけど、排反と独立が異なるものであるなら、この排反の位置関係ではないことになる。
- <まなぶ> ということは、排反は $A \cap B = \phi$ なんだから、独立は、事象 A と B の共通部分があるということですね。なあんだ、ぱっちり A と B は関係しているじゃない。なのにお互いに影響を与えないってどういうことだろ。
- <先生> まなぶのいう通り、独立であるということは、「排反でない」ということが前提条件になっている。今度は、事象 A と B が独立である定義を確認してみようか。
- <かず子> 独立であるかどうかは、条件付確率で定義できます。事象 A が起こったという条件で、事象 B が起こる確率を条件付確率といい $P_A(B)$ と表したのよね。 A と B が独立であるとは、事象 A の起こり方に関係なく事象 B が起こることだから、

$$P_A(B) = P(B)$$

ということでした。

- <アリス> そして、独立かどうかを調べるためには、乗法定理を用いたわ。事象 A, B がともに起こる確率は

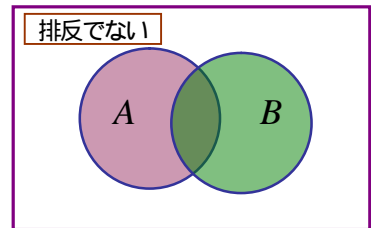
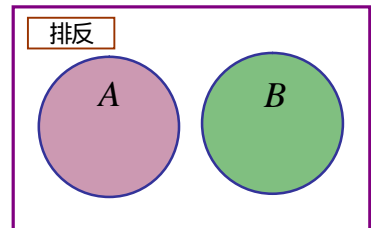
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

で与えられるから、独立であるときは、

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \dots\dots(*)$$

となります。だから、独立であることを調べるためには、左辺の $P(A \cap B)$ を計算し、次に右辺の $P(A)$ と $P(B)$ を計算し、その積を求めて左辺に一致することを確認する。もし、一致すれば独立だし、しなければ従属ということになります。

- <まなぶ> そう、それぞれ。結局、「計算してみないことには独立かどうか分からない」って結論だね。独立であるかどうかってことは僕らの日常の感覚だとお互い関与しないってことだから、普通は見てすぐわかっていれいはずだよな。
- <かず子> 私とまなぶみたいにいね。
- <先生> 2人に例えることは別問題として、確かにこの方法だと分かり難い。一つ例を示そう。



Ex) ジョーカーを除いたトランプ 52 枚の中から 1 枚を出すとき、次の事象 A, B は独立か、従属か。

- (1) A : エースを出す B : 絵札を出す
- (2) A : ハートを出す B : エースを出す
- (3) A : 赤色の種類のトランプを出す B : ハートの絵札を出す

<まなぶ> まず(1)。事象 A については、エースは 4 枚だから、 $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

次に、絵札は、えーと、 $4 \times 3 = 12$ 枚あるから、 $P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

これから、 $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{169}$

次に、 $A \cap B$ は、エースの絵札だから、.....、あれ、そんなカードないじゃん。

<よしお> ということは、 $A \cap B = \phi$ となるから、事象 A と B は排反なんですね。先生が、独立は排反でないことを前提にするってしていたのはこのことですね。

<先生> この場合は、 $P(A \cap B) = 0$ となるから、(*)は成立しない。だから、独立と従属という 2 つの分け方をするならば従属ということになるけど、原則は、 $A \cap B \neq \phi$ として独立・従属は考えよう。例えば、事象 A, B の少なくとも一方が空事象の場合は、その積事象は空事象となり (*)は成立してしまう。なにも起こらないことも独立といってしまうことになる。また、 $A \cap B \neq \phi$ であっても、片方が全事象の場合、 $P(A) = 1$ とすると、事象 B がなんであっても(*)は成立する。だからこの場合も除外しよう。では(2)をやってみよう。

<かず子> ハートのエースはあるし、エースのハートもあるし、この場合は排反でないから独立・従属を考えられるわ。たぶん、この問題、「ハートのエースは出でこない」のつもりなんでしょうけど先生もずいぶん古いですね。

<アリス> えっ、ハートのエースはでるんじゃないですか？、何のことが分からない。

<先生> おほん。そのことは終ってからかず子に聞いて。でもいまかず子がいったハートのエースがあるということが独立を理解する上で大事な考え方なんだ。例えば、事象 A をハートとし、事象 B をスペードとした場合は、ハートのスペードはないし、スペードのハートもない。だからこの 2 つの事象は排反だ。でも事象 A をハートとし、事象 B を絵札とすれば、ハートの絵札、絵札のハートはある。すなわち、お互い因果関係は持っていることになる。そういう状態においても 2 つの事象の起こり方が関係ないことが独立ということになる。

<アリス> うーん。最後の部分がよく分からないけど、とりあえず(2)を解きます。

事象 A については、ハートは 13 枚あるから、 $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

事象 B については、エースは 4 枚あるから、 $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

これから、 $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{52}$

次に、 $A \cap B$ は、ハートのエースのことだから、1 枚。だから、 $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

あっ、 $P(A) \cdot P(B)$ の値と同じだわ。うーん、これは独立なのね。

<まなぶ> 計算してやっと独立が分かった感じ。すっきりしないなあ。計算したくないけど(3)は

赤色の種類は、ハートとダイヤだから $2 \times 13 = 26$ 枚。 $P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

ハートの絵札は 3 枚。 $P(B) = \frac{3}{52}$ より、 $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{104}$

次に、 $A \cap B$ は.....、なんだ、ハートの絵札か。だから、 $P(A \cap B) = P(B) = \frac{3}{52}$ 。

一致するわけないから、従属だ。

<先生> まあ、とにかく独立か、従属かの判断はできたね。でもこのように乗法定理の計算結果で判断してしまうから独立・従属の意味が曖昧になっているのはまなぶのいうとおりだ。そこで、「独立である」ことの意味をもう少し掘り下げて考えてみよう。

排反の関係は、事象をベン図のように図で表現すると分かりやすかったね。独立・従属の関係についてもそれを表現する最良の図があるのだけれど分かるかな。

<かず子> ベン図ではないということですよ。ということは...

<まなぶ> 分かった、分かった、アレ、よく分かるのう、カルノー図っていったっけ。

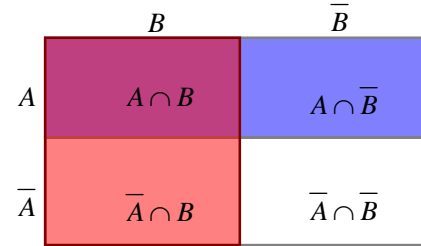
<かず子> ああ、軽い脳ね。

<先生> そう、それ。

<まなぶ> そう、それって、かず子が思っている意味ではないですね。長方形で表された全集合を、縦線と横線で切りパーテーションに分けた図のことでしたよね。

<よしお> カルノー図では、集合とその補集合の関係が並列して示され、位置関係が見やすくなりました。

<先生> これは、集合を事象として考えてもまったく同じように表現できる。右図で示している例は、 A と B が独立である場合だ。



<まなぶ> なんと、いきなり結論ですか。

<アリス> どうしてこの図が独立を表すのですか。

<先生> 乗法定理に当てはめると結果論として終わってしまったことがこの図では明快に示すことができる。説明しよう。独立であるということは、事象 B の起こり方が事象 A に起こり方に影響を受けないということであり、

$$P(B) = P_A(B)$$

で示されることが重要なのだ。ところで、条件付確率 $P_A(B)$ はどのように計算されたらう。

<かず子> はい。次の式です。

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

<先生> 確率は、割合を表すから、全事象 U に対して、

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)}$$

となる。ところが条件付確率は、根元事象をセレクトしたものを全事象に制限し新たな標本空間を考えている。事象 A という条件では、 A を全事象とし、 $n(A)$ に対して A に含まれている事象 B すなわち $A \cap B$ の割合になるわけだ。こうした割合という観点で、先ほどのカルノー図を眺めてごらん。

<アリス> 図は縦横の線で長方形を均等に4分割しているように見えるわ。ということは、どの長方形も同じ面積ですね。

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

このとき、事象 A を全事象としても、 $A \cap B$ はその半分の面積だから、

$$P_A(B) = \frac{1}{2}$$

$P(B)$ と同じになる。だから、独立なのね。

<よしお> そうすると、長方形を各辺に平行な縦横の直線で切った場合は、面積の割合は等しくなるわけだから、必ず独立ということですね。

<先生> その通り。これに対して、右下の図のように平行でない直線で切ってパーテーションに分けるとどうなるだろう。

<かず子> 横斜め線の分け方は長方形を等面積に分けていますね。だから、

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

同様に、 $P(B) = \frac{1}{2}$ だ。

でも、事象 B に対して事象 $A \cap B$ の割合はずいぶん大きい。

<先生> だから、この場合は

$$P(B) = \frac{1}{2} < P_A(B)$$

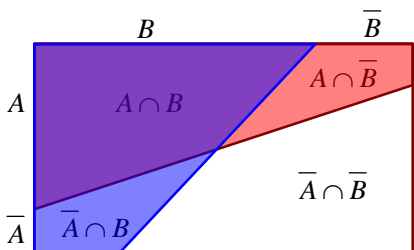
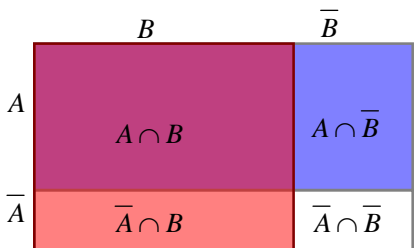
となり従属となる。

<まなぶ> なに、なに、そうすると独立であるということは、ただ単にその「割合」が等しいかどうかということだけなの。

<先生> 独立であるとは、事象 A の起こり方がどうであろうと、事象 A が起こったとき事象 B の起こる確率は、単純に事象 B の起こる確率に等しい状態であることを示している。分かりやすくいうと、パソコンで、Windows の画面をキャプチャーしたある部分の割合は、その一部分を含むように画面をトリミングしても、その割合は変わらないということだ。

<アリス> うーん。何となく分かったようなそうでないような。

<かず子> パソコンの例をそこで出したらだめですよ、先生。でもそのように考えると先ほどの問題も解き方が違ってくるってことですか。



<先生> やってみようか。たとえば(2)について、エースである確率は $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ だ。

これに対して、ハート全体で考えたときのエースの枚数は1枚だから確率は $P_A(B) = \frac{1}{13}$ 。

だから独立ということになる。

<まなぶ> ずいぶん簡単にわかってしまうんですね。ということは僕が解いた(3)は、

ハートの絵札の確率は、 $P(B) = \frac{3}{52}$ 。次に、赤色のカードは26枚で、その中にあるハートの絵札はやっぱり3

枚だから独立のはずはない。問題として馬鹿げているじゃないか。

<ありす> でも、先生。(2)で示したのはハートであってもエースの割合は同じということですけど、ハートでなくてもエースの割合はやはり同じなのですか。

<先生> そうだね。調べてみようか。

右図のように、各パーテーションの中の個数を a, b, c, d とする。

$P(B) = P_A(B)$ であるとき、

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} = \frac{a}{a+c} \quad \text{これから、}$$

$$(a+b)(a+c) = a(a+b+c+d)$$

整理すると、 $bc = ad$ となる。すなわち、 $a:b = c:d$ であるから、

$$c = ka, d = kb \quad (k > 0) \quad \dots\dots$$

と表される。実際

$$P(B) = P_A(B) = \frac{a}{a(k+1)} = \frac{1}{k+1}$$

となる。同様に、を用いると、

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{b}{b+bk} = \frac{1}{k+1} = P(B)$$

ハートでなくてもエースの割合は変わらず独立になる。

それでは、エースを出すこととハートを出す関係はどうだろうか。

<かず子> $P_B(A)$ と $P(A)$ ですね。

$$P(A) = \frac{a+ka}{a+b+ka+kb} = \frac{a(k+1)}{(a+b)(k+1)} = \frac{a}{a+b} = P_B(A)$$

これも独立なんですね。

<まなぶ> ということは、

$$P_{\bar{B}}(A) = \frac{ka}{ka+kb} = \frac{a}{a+b} = P(A)$$

やっぱり、 $P(A)$ と $P_{\bar{B}}(A)$ も独立だから、エースを出さないこともハートの出方とは関係ない。

<先生> 以上のことから、

$$P_A(B) = P(B) = P_{\bar{A}}(B)$$

$$P_B(A) = P(A) = P_{\bar{B}}(A)$$

すなわち、

「事象 A あるいは B が起こる起こらないに関わらず、他方の事象の起こる確率は影響を受けない」

ことが分かる。このことが、2つの事象が独立であるということの意味なのだ。

<アリス> なるほど。一方が起こる確率は、他方が起こる場合だけでなく起こらない場合についても影響を受けないこと考えなくては行けないんですね。

<よしお> ということは、一方が起こる起こらないに関わらず他方が起こらない確率も影響を受けないのでしょうか。

<先生> そうだね。そのことも同様に計算で示すことができるし、余事象を調べても明らかだね。

<まなぶ> これで何をしようと関係ねえということで、2つの事象は完全に独立になったということか。

<かず子> 結局、人間関係と同じなのね。私とよしおやアリスとの関係は、相手が何かしてもしなくても気になるものね。だからそれは従属ということか。

<アリス> その説明、今回一番すっきり理解できました。

<まなぶ> おいおい、そうすると、僕とかず子との関係は独立ということかよ。

<かず子> 違うわよ。独立でなくて、排反よ。

	B	\bar{B}
A	a	$c (ka)$
\bar{A}	b	$d (kb)$

あとがき

「そんなの関係ねえ」関係が今回の小手技の副題ですが、本レポートを書こうと思っていた頃は、「そんなの関係ねえ」フレーズが、毎日のお茶の間のテレビから流れ、笑いを誘っていました。流行の移り変わりは速いもので、こちらが執筆にもたついているうちに、いまではすっかり「右から左に受け流され」記憶からも忘れられようとしています。

「排反と独立」の関係も、昔は、確率の単元で一連の流れとして説明されていました。その後、数学Aの指導内容の中から条件付確率が排除され、数学Cに移行したことに伴い、従属と独立の指導は、確率計算の方法として参考程度にしか触れられないようになり、いつしか排反状態になってしまいます(次期指導要領ではまた復活するようですが)。

理系の生徒がそれもオプションでしか学ばない条件付確率とそれに続く従属・独立は、直感的な理解の指導に留まり、その結果、「排反」と「独立」はどちらもお互い「関係ない」関係になってしまったのです。

独立事象であることは、

$$P_A(B) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

この 2 つのどちらかを定義とするかということも教科書によっては異なっており、同値であることの確認を現場に委ねながら最終的には、計算で確認しやすいというスタンスをどの教科書も採ることになり、乗法定理に落ち着いていきます。次の例で考えて見ましょう。

まなぶとかず子を含む 7 人から 3 人を選ぶとき、まなぶが選ばれることと、かず子が選ばれることは従属か独立か。

「まなぶが選ばれれば残り 2 人を選ぶわけだから、かず子が選ばれる確率は低くなり影響を受けて従属」と考えることができますし、「まなぶとかず子の選ばれ方は同等であるべきだから独立」と考えることもできます。結局、よく分からないから乗法定理で確認しようということになります。

まなぶ、かず子それぞれが選ばれる事象を A, B とすると、

2 人とも選ばれる事象 $A \cap B$ の起こる確率は、

$$P(A \cap B) = \frac{{}_5C_1}{{}_7C_3} = \frac{1}{7}$$

また、事象 A の起こる確率は、

$$P(A) = \frac{{}_6C_2}{{}_7C_3} = \frac{3}{7} \quad \text{同様に、} P(B) = \frac{3}{7} \text{ となります。}$$

$$\text{従って、} P(A) \cdot P(B) = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \neq P(A \cap B)$$

これより従属であることが分かりました。ただ、この結果論は、まなぶが選ばれる選ばれないことが、かず子にどのような影響を与えているかの説明にはなっていません。では、 $P_A(B)$ が求めてみましょう。

かず子が選ばれたという条件でまなぶが選ばれる確率を求めるわけですから、その全事象はかず子を除いた 6 人から 2 人を選ぶということになります。したがって、

$$P_A(B) = \frac{1 \cdot {}_5C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって、} P(B) = \frac{9}{21} > \frac{7}{21} = P_A(B)。$$

まなぶが選ばれることで、和子の選ばれる確率はやや低くなり、その影響の受け方はより明確になります。本来、因果関係は条件付確率から直感的に理解していくべきものなのに、乗法定理による結果だけの判断は、そこが抜け落ちて、思考の楽しさを味わう数学的なよさの部分が損なわれてはいないでしょうか。その理解の手助けとして本文ではカルノー図を用いています。

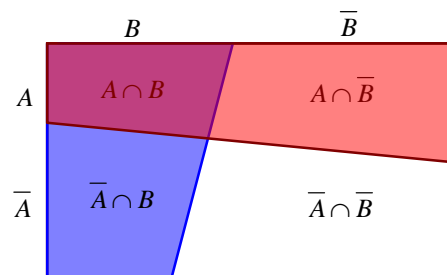
乗法定理もまた、カルノー図をみると「確率の絞込み」の過程が明らかになります。

全事象 U の確率 $P(U) = 1$ を図の長方形全体の面積とします。積事象 $A \cap B$ の確率は、 $P(A)$ により、長方形を斜め横線で切った上部の面積に絞り込まれます。次に、 $P_A(B)$ によりさらに、事象 B を含む部分 $A \cap B$ に絞り込まれ、その面積は、

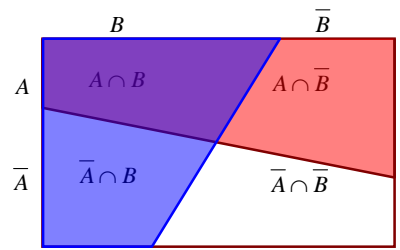
$$P(A) \cdot P_A(B)$$

となるわけです。ここで、全事象 U の面積に対する事象 B の面積の割合と、事象 A を新たな標本空間としその中に含まれている B の面積の割合が等しいときが独立となります。

本文では、全事象を表す長方形の各辺に平行な直線で切ったパーテーションで独立を示していますが、もちろん斜めに切



った場合でも独立は起こります。右図は $P(B) = P_A(B) = \frac{1}{2}$ になるように切っています。したが、長方形の等面積分割と絡めて指導しても面白い話題かもしれません。



一般に、事象 A と B およびその余事象の間の独立の証明は次のように示されます。

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(B)} = P(A)$$

$$P_A(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A) \cdot P(B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B)(1 - P(A))}{P(\bar{A})} = P(B)$$

これを本文では、各パーテーションの確率を a, b, c, d として、 $ad = bc$ を導いています。比例式の性質、

$$\text{合比の理 } a:b=c:d \Rightarrow (a+b):b=(c+d):d$$

$$\text{加比の理 } a:b=c:d \Rightarrow a:b=(a+c):(b+d)$$

から、事象とその余事象の間の独立については保証されていることが分かるのです。

さらに、カルノー図を用いると、3つの事象およびその余事象の独立についても示すことができます。

事象 A, B, C が独立であるとは、

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

より、

3つのうちの2つの事象も互いに独立であり、

さらにどの2つの事象の積事象も残りの1つの事象と独立

ということになります。

まず、各パーテーションの確率を右図のようにそれぞれ

$$a, b, c, d, e, f, g, h$$

とします(このとき、 $a+b+c+d+e+f+g+h=1$)。

図の事象 A を表す長方形は4つの事象を表すパーテーションに分けられ、それぞれ、

$$P(A \cap B \cap C) = a, P(A \cap B \cap \bar{C}) = b, P(A \cap \bar{B} \cap C) = c, P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = d$$

を表しています。ここで、 A と $B \cap C$ が独立であれば、

$$ad = bc$$

なる関係が成立します。同様に他のパーテーションについても、

$$fg = eh, ah = bg, cf = de, ae = cg, bf = dh$$

が成立します。これから、

$$a:g=c:e=d:f=b:h$$

より、 $a = kg, b = kh, c = ke, d = kf$ ($k > 0$)

このことを用いると、合比の理・加比の理から、3つの事象とその余事象の独立について示すことができます。

最後に、3つの独立な事象に関する簡単な問題をひとつ。

Ex) 3つの互いに独立な事象 A, B, C があり、 A の起こる確率は $\frac{1}{2}$ 、 B の起こる確率は $\frac{1}{3}$ 、
 また、 A, B, C のいずれも起こらない確率は $\frac{1}{4}$ である。
 (1) C の起こる確率を求めよ。 (2) A, B, C の1つだけ起こる確率を求めよ。

解) (1) A, B, C のいずれも起こらない事象 $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ は図の より、

$P(C) = x$ とすると、

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1-x) = \frac{1-x}{3}$$

$$\frac{1-x}{3} = \frac{1}{4} \text{ より、 } x = \frac{1}{4}$$

(2) A, B, C の1つだけ起こる事象は、
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{24}$

