

背理法と対偶による証明の小手技

札幌旭丘高等学校 中村文則

嘘(偽)からでたマコト(真)

<まなぶ> みんなに聞きたいんだけど、この問題の証明って、背理法を使っているんだよね。

Ex) $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて、次のことを証明せよ。
 a, b が有理数で $a + b\sqrt{2} = 0$ ならば $a = b = 0$

<かず子> 当たり前でしょ。結論を否定し、 $b \neq 0$ として矛盾を導くよね。 $b \neq 0$ だから、仮定の $a + b\sqrt{2} = 0$ を変形して、

$$\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$$

もうこれで終わり。右边が有理数だから、 $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾。

で、矛盾が起きた原因は、 $b \neq 0$ としたことだから、背理法により $b = 0$ 。これから $a = 0$ もでる。

まなぶはこんな簡単なことを聞きたかったわけ？

<まなぶ> その証明は僕も理解している。でも、背理法って、命題を否定することで、矛盾を導く証明法だろ。この命題の否定って何なのだろう。

<アリス> だから、 $b \neq 0$ ということではないのですか。

<まなぶ> それは、命題の結論部分の否定でしょ。

<よしお> なるほどね。まなぶの疑問はもっともかもしれない。

<かず子> どういうこと。

<よしお> 以前、背理法で証明した例題では「 $\sqrt{2}$ は無理数である」ことを否定して、「 $\sqrt{2}$ は無理数でない」として矛盾を導き、証明したよね。否定は「～である」に対して「～でない」ということだから、いまの問題では、命題である

$$「a, b \text{ が有理数で } a + b\sqrt{2} = 0 \text{ ならば } a = b = 0」$$

を否定するということになる。こういった「～ならば～である」の命題の否定はなにかというのがまなぶが聞きたかったことだろ。

<まなぶ> そう、そのこと。「 $\sqrt{2}$ は無理数である」の否定は「 $\sqrt{2}$ は無理数でない」だから簡単だけど、「ならば」がある命題の場合はどうなるのだろう。

<かず子> そんなに気にするようなことかしら。「 $\sqrt{2}$ は無理数である」ということは、

$$「\sqrt{2} \text{ ならば無理数である}」$$

とみなせばいいわけだから、命題はどれも「ならば」で表現できるのではないかしら。だから命題の否定は命題の仮定部分は認めて、結論部分を否定すればいいだけじゃないかしら。命題の「仮定」という用語はそういう意味もあってつけられていると思うわ。

<まなぶ> それじゃ「美人である」の結論は何なのさ。美人って誰を指しての結論が分からないだろ。

<かず子> その例え、止めてくれない。でもまあ、そう言われればそうね。たぶん命題の形が違う場合もあるということでしょうけど……先生に質問してみましようよ。

……………

<よしお> ……ということで、「～ならば～である」の否定は何になるのですか。

<先 生> ああ、その否定は教えてない、以上。

<まなぶ> えっ、それで、終わり。ちょっと～、それは先生、手抜きでない。

<先 生> 授業ではサラリと流してしまったけど、命題についてきちんと説明するのは、結構大変なことなのだ。だから、この話題は避けたかったのだけど、仕方ないから考えてみようか。

<アリス> いつもの先生にしては、随分消極的なのですね。

<先 生> 一つ例を示そう。「ダイエットすれば痩せる」という命題。まあ、必ず痩せるとは断定はできないけど、それを信じなければ誰もダイエットなんかしないから、この命題は真としてみよう。

<かず子> なんかその例の発想、まなぶみたいだけど。

<先 生> まなぶがどんな発想なのかは聞きたくもない。さて、この命題は2つの命題「ダイエットする」と「痩せる」からなっていることは分かるね。このように幾つかの命題を組み合わせて作られた命題を複合命題という。特に「～ならば～である」である命題を含意命題という。ところで、含意命題ではない複合命題はみんなは学んでいるし、その否定も分かるはずだ。

<よしお> あっ、「または」と「かつ」で結ばれている命題ですね。

<まなぶ> 「美人または痩せている」みたいな命題だ。そしてその否定は、「美人でなくかつ痩せていない」。

<かず子> まなぶ、何かこっちみてない。

<アリス> ド・モルガンの法則から否定が求められたのですよね。

<先生> さて、問題になっているのは、ダイエットする、痩せるをそれぞれ命題 p, q としたときに、複合命題「 $p \rightarrow q$ 」の否定がどうなるかということだ。これを考える前に命題「 $p \rightarrow q$ 」が真であるとはどういうことなのか、確認しようか。 p, q の真理集合は P, Q としよう。

<かず子> 集合 P が、集合 Q に含まれることでした。 $P \subset Q$ ですね。

<先生> P が Q に含まれない部分があると命題は偽であり、その含まれない部分の集合が反例を表していた。ベン図で表すと、右図のようになる。

<アリス> 色のついている反例の部分ですね。集合 P の内側で、集合 Q の外側だから、 $P \cap \bar{Q}$ です。

<先生> さて、色のついている反例の部分は偽であるわけだから、この部分がすべてなくなると、命題は真になるわけだ。すなわち、

$$P \cap \bar{Q} = \phi \quad \dots\dots$$

U を全体集合として、この両辺の補集合を考えると、

$$\overline{P \cap \bar{Q}} = U \quad \dots\dots$$

左辺は、

$$\overline{P \cap \bar{Q}} = \bar{P} \cup \bar{\bar{Q}} = \bar{P} \cup Q$$

となる。これから、

$$\bar{P} \cup Q = U \quad \dots\dots$$

これが、「 p ならば q である」が真であることの $P \subset Q$ 以外の真理集合による表現だ。

すなわち「 p ならば q である」は、左辺を p, q で表現すると、「 p でないかまたは q である」ということになる。

<生徒達> ……………

<まなぶ> そうすると「ダイエットすると痩せる」ということは、「ダイエットしないかまたは痩せる」ということですか。何か、訳が分からん日本語ですけど。

<よしお> 僕もこの表現はよく理解できません。

<先生> かず子とアリスも同様かな。それでは、この否定をいってごらん。

<よしお> 「ダイエットし、かつ痩せない」ということです。これは何となくわかるような気がする。

<かず子> そうよね。せっかく頑張ってダイエットしたのに、その結果痩せないっていったら許せないわ。

<アリス> なんがかず子、いつもより声が大きい。確かに「ダイエットするなら痩せる」を真として、その否定「ダイエットして痩せない」をみると、否定命題は明らかに偽であることは納得できるわ。

<先生> どうやら、否定の方はそれほど抵抗感はないようだね。これが含意命題「 p ならば q 」であることの否定命題ということになる。すなわち、文章で表すと「 p であり、 q でない」ということだ。

<まなぶ> 否定の方は分かったけど、肝心のもとの命題が意味不明になってしまったけど。

<先生> そうだね。では、ちょっとこの否定命題を用いて元の命題をあらわしてごらん。

<よしお> もう一度、否定すればいいわけだから、左辺ってことですね。「ダイエットすれば痩せる」は、「ダイエットして痩せない、ということはない」ということでしょうか。

<かず子> あっ、すっかりしている。

<アリス> ほんとだ。日本語って、二重否定したら、何をいいたいのか分からなくなるとか思っていたのに、この場合は違うのですね。ために、別の例で確認してもいいですか。例えば、「晴れたらピクニックに行く」は「晴れてピクニックに行かない、ということはない」、はい、よく分かります。

<かず子> 「人間ならば動物である」は「人間であり動物でない、ということはない」、身近にちょっと気になる存在がいるけど、概ね、OK ね。

<まなぶ> なに、その概ねって。では、僕もひとつ。「遊べばいろいろな経験ができる」は「遊んでいろいろな経験ができない、ということはない」、確かにそうだよね。

<先生> その辺でいいだろう。さて、本題に戻ろう。それでは、まなぶの質問の解答を考えよう。

まず、命題の結論部分の「 $a = b = 0$ 」だけど、 $b = 0$ だけが示されれば十分である。

$b = 0$ のときは、 $a + b\sqrt{2} = 0$ から $a = 0$ は自明だね。

すなわち、証明すべき命題は、

$$「a + b\sqrt{2} = 0 \text{ ならば } b = 0」$$

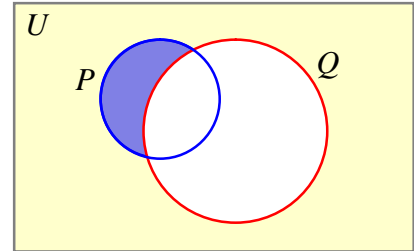
ということだ。この命題を否定してみよう。

<まなぶ> p ならば q の否定は、 p でありかつ q でないということだから、

$$a + b\sqrt{2} = 0 \text{ かつ } b \neq 0$$

ということです。そうか、それで仮定を認めて結論を否定することで矛盾を導き出しているのか。

なんだ、最初からこのことを教えてくれたら、悩むことはなかったのに。



- <先生> これだけで終わってしまったら、確かに問題はない。でもこのことでまた新たな悩みもでてくる。ほら、よしおの顔が歪んでいる。
- <よしお> はい。ちょっと気になることがあるんですけど。
命題「 p ならば q である」が真であるということは、命題「 p でないかまたは q である」が真であるということですね。そうすると、真であることは、「 p でない」または「 q である」ことが言えてればいいということになりますよね。
- <先生> そういうことです。
- <かず子> えっ、それって、「 p でない」または.....、それじゃあ、仮定が間違っている、命題は真になるってこと。「ダイエットしないと痩せる」ってことも正しいことになるじゃない。そんなの絶対おかしいわ。
- <アリス> かず子、また声が大きくなっている。同じように「ダイエットしないと痩せない」も真になるのですね。こちらはなんとなく分かりますが。
- <先生> かず子が妙に興奮しているから、別の例を示そう。みんなのお父さんがみんなに「成績が良かったらお小遣いをあげる」約束をしたとしよう。このとき「成績が良かったのにお小遣いをくれない」としたらお父さんは約束を破ったことになる。では、成績が悪かった場合はどうだろう。お父さんが約束したのは成績が良かった場合についてのことであり、悪かった場合の約束をしたわけではない。だから、成績が悪くても頑張ったのだからといってお小遣いをくれることもあり、怒ってあげないこともある。悪かったことに対してどのようにお父さんが対応しても間違っているとはいえない。命題が、真と偽のいずれかであるなら、この場合は真ということになってしまう。
- <アリス> わたしのパパは成績が悪くてもきつとお小遣いをくれるから何となく理解できる。
- <まなぶ> うーん、小遣いのこともそうだけど、僕は納得できない。仮定が間違っている、真ということは何でもありってことになるんじゃない。
- <先生> その通り。例えば、「 $1=2$ 」という仮定から「まなぶとよしおは同一人物」という結論も導き出してしまう。証明してみようか。
集合 $A = \{\text{まなぶ}, \text{よしお}\}$ とすると、
$$n(A) = 2 = 1$$

であるから、集合 A の要素の個数は 1 になる。よって、2 つの要素は等しい。
まなぶとよしおは等しい。
- <かず子> わーっ、気持ち悪い。
- <まなぶ> なにがさ。それなら $1=4$ としたら、かず子とアリスだっておなじだし、僕とアリス...
- <かず子> それ以上、言わないで。聞きたくない。.....こんな、絶対あってはいけないことが起こるのに、先生、偽であることも一緒に考える必要ってあるのですか。
- <先生> 偽であることを認めないと、逆に論理が崩れてしまうことがあるんだ。集合の説明のときに、何も無い集合というのを考えたね。
- <よしお> 空集合 ϕ ですね。
- <先生> 空集合は要素は空ではあるけど、すべての集合 Q の部分集合であり、 $\phi \subset Q$ と表した。だから、 ϕ, Q をそれぞれ p, q の真理集合とみれば、命題「 $p \rightarrow q$ 」は真の命題となる。ところが、 $n(\phi) = 0$ だから仮定 p は偽ということだ。結局、偽から導かれた結論はすべて真ということになる。
- <まなぶ> なんかにこじつけみたいですね。でもこのことがどうして論理が崩れることにつながるのですか。
- <先生> 次の命題で考えてみよう。

自然数 n において、
 $n \geq 3$ ならば $n \geq 1$ である

さて、この命題の真偽は？。

- <アリス> 真ですね。何か問題ありますか。
- <先生> 問題はまったくない。さて、ではこの命題の対偶はどうなる。
- <よしお>

自然数 n において、
 $n < 1$ ならば $n < 3$ である

命題が真なのだから、これも問題はないですね.....、あれっ！、命題とその対偶の真偽は一致しましたよね。

- <かず子> あっ、ほんと、変。対偶の仮定の $n < 1$ を満たす自然数なんてないのに真の命題になっている。
- <先生> これが先ほどの空集合をすべての集合の部分集合とみなすことの理由なんだ。
空集合の補集合は全集合 U であるから、 $\phi \subset Q$ であることは、 $\bar{\phi} \subset U$ と同じことになり、この包含関係は確かに正しい。だから、このことを認めないと対偶関係が保障されないことになってしまうんだ。
- <よしお> 場合の数のところで、異なる n 個から n 個にも選ばない場合の数は 1 (${}_n C_0 = 1$) としたことに似ていますね。
あのときも、 r 個を選ぶことと、残りの $n-r$ 個が選ばれないことは、同じこと (${}_n C_r = {}_n C_{n-r}$) だから、 ${}_n C_n = {}_n C_0$ でなければならぬということでした。
- <アリス> なるほど。組み立てた論理が壊れないようにするためには、嘘からでたことも実(まこと)にしなくちゃいけないっ

てことですね。でも、いまの説明で、ずーっと、引っかかっていた胸のつかえがとれたような気がします。
 <まなぶ> アリス、なにか悩み事があったの。僕に相談してくれれば。
 <かず子> おだまり。何が気になっていたの。

<アリス> 背理法と対偶による証明の違いです。私にはどちらも同じ証明に思っていたのです。

例えば

命題「 $a+b\sqrt{2}=0$ ならば $b=0$ 」

の証明は、その対偶を考えると、

命題「 $b \neq 0$ ならば $a+b\sqrt{2} \neq 0$ 」

を証明すればいいことになります。

対偶の証明は、

$b \neq 0$ ですから、

$$P = a + b\sqrt{2} = b \left(\frac{a}{b} + \sqrt{2} \right)$$

ここで、 $\frac{a}{b}$ は有理数です。 $\sqrt{2}$ は無理数で0でないから、有理数 無理数より、

$$\frac{a}{b} + \sqrt{2} \neq 0。$$

これから、 $P \neq 0$ になります。

対偶ではこのように証明できますが、この証明の核となっている部分は有理数 $\frac{a}{b}$ と無理数 $\sqrt{2}$ は数の範囲として異なるものであるから、その値も等しくないということです。それは背理法でも証明の核となっているわけでしょう。

そうしたらこの2つの証明法はどちらも同じではないかと思っていたのです。

<よしお> それは僕も考えたことがある。

ただ、背理法による証明は、複合命題の仮定の部分がない命題のような場合でも否定することで矛盾を導くことができることになる。対偶証明より背理法の方がより適用範囲が広いから、対偶証明は背理法の一部ではないのだろうか。

<アリス> そういった疑問が今日の説明で解消できたような気がします。

命題「 $p \rightarrow q$ 」が真であるということは、その真理集合を用いると、

$$\overline{P} \cup Q = U \quad \dots\dots$$

ということでした。ここで、 $Q = \overline{Q}$ だから、

$$\overline{P} \cup Q = \overline{Q} \cup \overline{P} \quad \text{これから、} \overline{Q} \cup \overline{P} = U$$

これは、「 q でなければ p でないことは真」を表しています。

このことを示すのが対偶ですよ。

次に、の補集合を考えて、命題を否定すると、

$$\overline{\overline{P} \cup Q} = \overline{U} \quad P \cap \overline{Q} = \phi$$

すなわち、

「 p でありかつ q でないことは偽」

このことを示すのが背理法です。このふたつの証明法って違っているでしょ。

<まなぶ> 確かにそういわれればそうだな。対偶は成り立つことを示し、背理法は成り立たないことを示すのをそれぞれ目的にしている。

<かず子> それに、対偶は、仮定を用いて結論を導いているけど、背理法の方は、 p であることと、 q でないことが、扱われ方としては同等で対偶のように主従関係になっていない。

<よしお> ということは p であることと、 q でないことを両方とも仮定していると考えられることもできる。

<アリス> だんだん背理法と対偶証明が「似て非なるもの」に思えてきました。

<先生> なんとなくまとめに入っているようだね。

よしおの言っていた「 p であることと q でないことの、両方を仮定している」ということは重要なことだ。

「 p ならば q である」の否定は「 p であり q ではない」ということであり、「 p ならば q ではない」とは違うということだ。「 p ならば q ではない」を真理集合で表してごらん。

<かず子> 言葉だと同じように聞こえるけど、今度はその違いは分かる。

「 p ならば q でない」は、真理集合で表すと、 $\overline{P} \cup \overline{Q}$ ですね。

<先生> この命題が偽であることの証明をしようとすると、 $\overline{\overline{P} \cup \overline{Q}} = \phi$ 。

$$\text{補集合を考えて、} \overline{\overline{P} \cup \overline{Q}} = \phi \quad \text{すなわち} \quad P \cap Q = U$$

このことを示してしまうことになる。

<アリス> $P \cap Q = U$ ということは、 p ならば q が真の命題なら、 $P \subset Q$ ということですから、 $P \cap Q = P$ となり、 $P = U$ 。

ありえないですね。

<先 生> 含意命題「 p ならば q である」は、命題そのものの否定と命題の結論の否定の違いが分かり難いから混乱してしまう。あるいは違っていることすら分かっていない場合もある。

対偶による証明は、対偶が考えられる含意命題にしか適用はできない。命題とその対偶の真偽が一致することから証明すべきことを証明しやすい命題に読み替え、真であることを示している。

それに対して、背理法は、含意命題に限らずどんな命題でも否定することから始まる。もとの命題が真であればその否定は偽になる。だからその否定命題が偽であることを示せば証明としては終わりである。ただ結論を分かりやすくするために、さらに否定命題の否定を考えてもとの命題が真であることをいっているわけだ。

<アリス> ここでも二重否定がでてくるのですね。日本語の二重否定って微妙な心理のヒダみたいなものを感じて抵抗感があったんです。「好きでないことはない」って言われたら、好きなのか嫌いなのか、何か煮え切らなくてはっきりしないでしょ。でも、論理で扱う二重否定は実に明快なのですね。

<まなぶ> えっ、なにに、その「好きでないことはない」っていったいどういった状況で、言われた言葉なの。で、返事はなんてしたの。

<かず子> うるさい男ね。

<まなぶ> 分かった。そうしたら紙に書くから。

「アリスは、僕の質問に対してNoという」.....(アリスに渡す).....

後で、この紙に書いたこと本当か、Yes、Noで答えてね。

<アリス> 別に後でなくてもいいですけど。

私が本当かという質問にNoといたら、紙に書いてある通りだから、正しい答えはYesになるわ。

質問にYesといたら、紙に書いてあることと違うから、正しい答えはNoになるわ。

だから、答えようがないですよ。

<まなぶ>

あとがき

小手技としては重いテーマである。

現行の教科書は、記号論理の話題は姿を消し、命題に関する学習は真理集合の包含関係に読み替えて、命題の真偽を考察することで終わっている。本文でもその方向性をなるべく維持しようと努め、背理法や対偶命題の説明は、すべて真理集合の包含・同値関係で示している。しかし、実際には論理式を使わない説明は無理がある。

例えば、命題「ダイエットすれば痩せる」は、「ダイエットする」、「痩せる」の2つの真理集合に対して包含関係を考えるわけだから、「ダイエットする人」と「痩せる人」のように補わなければならない。しかし「明日晴ればピクニックに行く」では説明のしようがない。数学で扱う命題、記号論理で扱う命題は一緒にできないものである。

昭和45年改訂の学習指導要領は、「教育内容の現代化」が求められ、クラブ活動の必修化は現場に混乱を与えた。数学は従来の濃密な教科書による「新幹線授業」の反省から、「数学的な考え方」の育成が強調され、ベクトル等の現代化教材が導入された(それも数学で)。数学の単元には「集合と論理」もあり、真理表による論理の学習は多くのページを割いて、記載されていた。「数学的な考え方」はロジカルな思考で育つという見方もできるから、論理の学習は学習指導要領に沿ったものといえるだろう。(本校のN先生が、30年以上前の当時のS研出版の教科書を大事に保存していたのでそのコピーを別添として提示する)その後、ゆとりが教育のキーワードとなり、2度の改定を経て、現行の指導要領に至っている。現行の目標は「数学的な見方や考え方のよさ」であるが、「見方や考え方のよさ」の中には論理的な思考力は排除されてしまったようで、論理の単元は消えており、次の学習指導要領でも復活はしない。

当時の「集合と論理」の内容を少し紹介する。

命題の定義のち、単一(原子)命題に対し、複合命題(合成命題)を定義する。

$$p \vee q, p \wedge q, \neg q$$

論理和(離接)、論理積(合接)、否定に続き、

$$「 p \rightarrow q 」$$

である条件命題(仮言あるいは含意ともいう)に触れ、この命題の真偽について考察する。

例として、

「あす天気がいならば、遠足に行く」

をあげ、これは否定を用いた文章

「(あす天気がよくて、しかも遠足に行かない)ことはない」

と同じ意味であると結論付ける。

$$" p \rightarrow q " = " \overline{p \wedge \bar{q}} "$$

同値性を示したあと、右の真理(値)表を作成する。

さらに、この真理表から、次を導く。

p, q の真理集合を P, Q とすると、命題が真であるとは、

(1) P の要素は、すべて、 Q に属する。

(2) \bar{P} の要素については、 Q に属しても、属しなくてもよい。

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

すなわち、(2)より、含意命題では、仮定 p が偽である場合は命題は真であることを述べる。
最後に、練習問題として、
Ex) $p \rightarrow q$ の真理集合は、 $\bar{p} \cup Q$ であることを示せ。
で単元を締めくくっている。

p	q	\bar{p}	$\bar{p} \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

記号論理学では、命題の同値は、定義として真理表で示すのが一般的である。

含意命題については、仮定が偽の場合、命題が真になることは、そうなることと約束されていることである。教科書では、その扱いで進むとあまりに乱暴であるから、

「(必ずしも) 天気がよくて、しかも遠足に行かない」ことはない」

を同等の文章とみなし、真理表を作成し、その真理表から仮定が偽の場合の真偽についてまとめている。教科書の説明に要している行数は、30行弱であるからこれも乱暴といえなくもない。しかし、論理の展開としては、妙に読んでいてじっくりと馴染んだため、本レポートでもその流れで組み立てている。

さて、現行の教科書では命題という言葉はあるが、論理などまったく触れていないわけだから、含意命題の扱いは極めて不透明である。だから誤魔化し進めて、論理を隠していた堤防が、背理法の説明のくんだり、ヒビが入り、崩壊する。

結果として、命題「 $p \rightarrow q$ 」の否定は、「 $p \rightarrow \bar{q}$ 」という誤った解釈が植えつけられる。それでも矛盾は確かに導かれるから誤りが修正されることなくそのまま終わってしまう。この命題の結論を否定しただけという誤った理解により、背理法は「 q を否定して p に辿り着き誤りに気づく」、対偶は「 q を否定して \bar{p} に向い納得する」、ということであり、両者は結論の表現の違いだけであると思ひ込み、背理法と対偶証明は同じではないかと錯覚するのである。

その原因は、命題「 $p \rightarrow q$ 」において、 p, q をそれぞれ命題の仮定、結論という用語として命名することにも問題がある。含意命題は「もし p ならば q である」といった意味合いは強いから「すべての p に対して q を満たす」という p と q の対等性が失われがちである。だから「もし p ならば」と仮定して進め、間違った結論に至った場合は、原因として出発点の誤りを正すという人間的な思考パターンに帰結するのは当然である。仮定、結論の用語は用いず、接続詞「ならば」の前にある文は前件、後ろにある文は後件、とした方が対等性は保たれると思う。

さて、背理法は「 $p \rightarrow q$ 」が「 $\bar{p} \vee q$ 」と同値であることより、その否定命題「 $p \wedge \bar{q}$ 」が、ある命題 r に矛盾することを示すものである。命題 r は、

p \bar{q} p, \bar{q} でない普遍的(数学的)事実

のいずれかであり、これは、

「 $p \wedge \bar{q} \rightarrow \bar{r}$ 」

が真であることの証明ということになる。

その多くは p の矛盾に辿り着くが、必ずしもこの矛盾に限定されるわけではない。

の「 $p \wedge \bar{q} \rightarrow \bar{r}$ 」については、 p, q, r の真理集合を P, Q, R とすると、
$$\overline{P \cap \bar{Q} \cap \bar{R}} = U$$

であるから

$$\overline{P \cap \bar{Q} \cap \bar{R}} = \bar{P} \cup Q \cup R = \bar{P} \cup Q$$
 より、
$$\bar{P} \cup Q = U$$

すなわち、 $\bar{P} \cup Q$ は、命題「 $p \rightarrow q$ 」が真であることと確かに同値である。

なお、 \bar{p} において、 \bar{q} のみから \bar{p} が導かれる場合を考えれば、背理法と対偶証明はある意味同じとみなすことができる。

背理法は、矛盾(誤謬)法という言葉の中にも含まれているように否定による屈折的な証明法であり、行き着く先の見通しは悪い。しかし対偶証明は、同値な対偶命題による肯定的な証明であり結論が保障されており、それ自体は直接証明である。

対偶の導入に関する面白い例をひとつ。

4枚のカードがある。カードの片方の面には、数字が書かれていて、もう片方の面には犬と猫の絵が描かれている。いま、4枚のうち、2枚のカードは、3と4の数字、残り2枚のカードは、犬と猫の絵が見える状態で机の上に置いてある。このとき、
「奇数のカードの裏は犬の絵である」
という仮説が正しいかどうかを調べるにはどのカードをめくればよいだろう。



まず、1枚目は、3のカードをめくる。犬の絵ができれば、仮説が成立する可能性は高くなる。さて、次はどのカードをめくればよいだろう。生徒に考えさせると大半は、犬の絵のカードをめくろうとする。もちろん、これは誤りである。仮説は「奇数ならば裏は犬の絵である」ことであり、犬の絵の裏が奇数であるとは限らない。それは仮説の逆を調べている

ことになる。この場合は、猫の絵をめくるのが正しい。奇数の裏が犬であることは、猫の絵の裏は奇数ではないことが確認できればよいのである。すなわち、仮説の対偶を調べることになる。

このように、含意命題とその対偶の真偽の一致は、感覚的には馴染めないことが多い。

それは、接続詞「ならば」が持つ

多義性 仮定と結論を結ぶ不安定さ ならばの解釈の曖昧さ

といったものに影響されている。

形式論理は、排中律・矛盾律による二値論理をルールとして形成されるため、「どちらかにはっきり決める」という論理の強制がある。含意命題において、前件が偽であれば、命題は真になることはまさにそのことを起因とする。本文では、 $1=2$ から「まなぶとよしおが等しい」結論を導出するが、両辺から1を引けば、 $0=1$ になり、両辺に適当な数 n を乗じれば、 $0=n$ となり、何でも在りの世界が生まれてしまう。ただ、このことを認めなければ、空集合 ϕ がすべての部分集合であることが否定されてしまい、対偶といった命題証明も消滅する。

例えば、分数は分母が0であることは認めないが、このことは、逆数の定義から導かれる。

数 a の逆数は $ae=1$ となる e であり、その逆数を $\frac{1}{e}$ と定義する。

0の逆数は、 $0 \times e=1$ となる e であり、したがって、 $0=1$ となり、0の逆数は存在しない。

偽である $0=1$ を認めれば $\frac{1}{0}$ は存在するから、形式論理では「 $0=1$ であれば、0の逆数は存在する」は命題として真である。

その対偶命題は「0の逆数が存在しないならば $0 \neq 1$ 」となり、問題は起きなくなってしまう。前件が偽である含意命題を真とすることで、二値論理のバランスは保たれているのである。

ただ、実際は、ものの解釈は多義的であるから、二値論理はしばしば物議を醸すことになる。

命題「ダイエットすれば痩せる」を考えると、ダイエットを決意する女性は「ダイエットしなければ痩せない」と思い詰め、意識の中に刷り込む。この「「ダイエットしなければ痩せない」ことは裏の命題を表している。「逆は真なり」と、よくいうが、実は「裏は真なり」という意識が強く働くことの方が多いのである。同様に「勉強しないと叱られる」は「勉強すると叱られない」から、叱られないように一生懸命に勉強するのである。

含意命題において、接続詞「ならば」によって結ばれる前件と後件の関係にも不安定な要素がある。

「ダイエットすれば痩せる」の対偶は、「痩せないならダイエットしない」としてしまうと、「どうせ頑張っても」とふて腐れているようにも感じる。「勉強すれば成績がよくなる」の対偶は「成績が悪いと勉強しない」、あわや家族会議に発展してしまいそうな様相である。この感覚のズレは、「 p ならば q である」であるとき、接続詞「ならば」が、原因(行動)と結論(結果)を結んでいることから生じる。「ダイエットする」ことは行動であり、その結果として「痩せる」わけであるから、その対偶は、結果から原因である過去を振り返ることになり、「痩せなかったのはダイエットしなかったからだ」となる。

同様に、「勉強すると成績が良くなる」の対偶は、「成績が悪いと勉強しない」とすると、成績が悪いことが原因で勉強しないという結果になってしまう。「成績が悪いのは勉強しなかったからである」と原因に戻ればよい。また、「ならば」を「成績を良くしたいと思うならば、勉強しなさい」の中に見ると、この場合は目的と手段を結んでいる意味を持つことにもなる。数学の論理では「正方形ならば長方形である」のように真理集合としての包含関係が明確であるから、一層、このような日本語のもつ多義性に論理は悩まされるのである。

「人間ならば動物である」は「人間は動物である」と同じだろうか。

接続詞「ならば」は助詞「は」として読み替えることができる。「人間は動物である」は、人間の集合は、動物の集合に含まれることであり、包含関係が成立している。「まなぶは人間である」とすると、ちょっと違った見方もできる。まなぶは集合ではなく、人間の集合のひとつの要素と考えられるのである。さらに、「ならば」と「は」はもっと違った意味を与えることもある。「人間は動物である」は単一命題であり、「人間ならば動物である」は複合命題と解釈できるのである。

これは、「 $\sqrt{2}$ は無理数である」ことを「 $\sqrt{2}$ ならば無理数である」とみることで、後者の命題は「 $x=\sqrt{2}$ ならば x は無理数である」と補えばよい。すなわち「人間ならば動物である」は「 x が人間ならば、 x は動物である」ことであり、 x は「すべての x 」を表している。この違いが命題の否定を考えると、大きな認識のズレとして顕れてくる。

「人間は動物である」の否定は「人間は動物でない」であり、直感的に判断できること(というか事実)である。「(すべての)人間ならば動物である」の否定は、「人間でありかつ動物ではない」であり分かり難い。そこで含意命題を「 x は人間ならば、 x は動物である」とみなすと、「人間であり動物ではない x がある」となり、 x の存在が明らかになってくる。

この存在 x は、命題が偽であれば反例であり、すべて要素がなくなったとき命題は真になる。 x を証明のどの過程でどのように求めるかで、背理法・対偶の色分けがされることになる。

論理学は難しく、排中律の上に成立するから、それを否定すると直感主義の考察となり背理法も否定されてしまうことになる。逆理(パラドクス)は論理の不安定さを示すものであり、本文の最後に触れた、Yes-No に関する問題も数多くある有名なパラドクスの1つである。

数学の歴史上、背理法が最初に用いられたのは、ユークリッドの幾何学原本に記されている「素数は無限個存在する」証明である。それほど昔から論理の体系は少しずつ積み上げられてきたのだが、依然、その有様は論理的でなく悩ましい。

哲学者カントは、「To be is to do」 存在は行為である

思想家サルトルは、「To do is to be」 行為は存在である

という。2人の偉人の言葉だから、どちらも真の命題であろう。

結局、「存在=行為」ということだろうか。認めてしまえば、そんなのかとも思ってしまう。

直接証明・対偶法・背理法の証明を、比較してみよう！

問題) n は整数とする。次を証明せよ。
 n は奇数であるならば、 $3n+1$ は偶数である。

【直接証明法】

n は奇数より、 $n = 2k + 1$ (k は整数)とおくと、
 $3n + 1 = 3(2k + 1) + 1 = 6k + 4 = 2(3k + 2)$ $3k + 2$ は整数より $3n + 1$ は偶数。
 あるいは、 $3n + 1 = n + (2n + 1)$ 。奇数と奇数の和は偶数

【対偶による証明法】

$3n + 1$ は奇数と仮定すると、 $3n + 1 = 2k + 1$ (k は整数) $k = \frac{3}{2}n$
 k は整数より、 $\frac{3}{2}n$ も整数。よって、 $n = 2m$ (m は整数)とおけるから、 n は偶数である。
 あるいは、 $n = (3n + 1) - (2n + 1)$ 。奇数と奇数の差は偶数

【背理法】

n は奇数であり、 $3n + 1$ は奇数とする。
 $n = 2k + 1$ (k は整数)とおくと、
 $3n + 1 = 3(2k + 1) + 1 = 6k + 4 = 2(3k + 2)$
 $3k + 2$ は整数より、 $3n + 1$ は偶数となり矛盾。
 あるいは、 $3n + 1$ は奇数であるから、 $n = (3n + 1) - (2n + 1)$
 n は奇数と奇数の差より偶数となり矛盾。
 この場合は、後件の否定から前件の矛盾を導いている。
 あるいは、 $n + (3n + 1) = 4n + 1 = 2 \times 2n + 1$ 奇数と奇数の和が奇数となり矛盾
 この場合は、前件と後件の否定から、数学的事実との矛盾を導いている。

含意命題の同値を用いて、証明してみよう！

Ex) x, y, z を実数とするとき、次の2つの命題を証明せよ。
 (1) $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ かつ $xyz = 0$ ならば、 $x + y + z = 0$ である。
 (2) $x + y + z \neq 0$ かつ $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ ならば、 x, y, z のどれも0でない。

(1)の証明

$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + y^3 + z^3 = 0$
 $x + y + z \neq 0$ と仮定すると、より、
 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$
 ここで、 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$
 であるから、より、 $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$
 $x - y = y - z = z - x = 0$ より、 $x = y = z$ である。
 仮定より、 $xyz = 0$ であるから、 $x = y = z = 0$ となり、これは、 $x + y + z \neq 0$ に矛盾する。
 以上より、背理法により、 $x + y + z = 0$ である。 Q.E.D

(2)の証明

$p: x + y + z = 0$ 、 $q: x^3 + y^3 + z^3 = 0$ 、 $r: xyz = 0$ 、とすると、
 命題「 $\overline{p} \wedge q \rightarrow \overline{r}$ 」
 が真であることを証明すればよい。
 p, q, r の真理集合をそれぞれ、 P, Q, R とすると、(1)は、
 $\overline{Q} \cap \overline{R} \cup P = U$ (U : 全集合)
 を証明したことになる。これより、
 $U = \overline{Q} \cap \overline{R} \cup P = \overline{Q} \cup \overline{R} \cup P = (P \cup \overline{Q}) \cup \overline{R} = \overline{P} \cap \overline{Q} \cup \overline{R}$
 よって、命題「 $\overline{p} \wedge q \rightarrow \overline{r}$ 」は真である。 Q.E.D