必要十分条件の小手技

札幌旭丘高等学校　中村文則

○彼は彼等の何条件

<アリス> ふーっ、日本語ってほんと、難しいですね。
<かず子> どうしたの。まなぶがまた変なこといったの。
<まなぶ> 日本語が難しいっていってるのにどうしてそこで僕が登場するの。
<アリス> はい、今回に関してはまなぶさんは関係ありません。悩んでいるのは、必要・十分条件のことなんです。会話で使う言葉の意味と数学での使い方とがしっくりしないんです。
<まなぶ> 「今回に関しては」ってとこ、ちょっと、気になるけど。でもアリスの悩みは分るな。僕もそのことは考えたことある。でも最後には面倒だから、

根　⇒　先

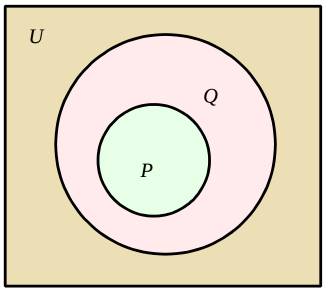
と書いて、根っこを「じゅうよう」、先っぽを「ひつよう」って無理やりルビ振っちゃって覚えたな。
<かず子> 矢印に対して、根が十分条件で、先が必要条件ね。私はまなぶほどこじつけじゃないけど矢印を書いて、

十　⇒　要

として、「この矢印はすごく重要だぞ」って覚えたわ。
<まなぶ> 重要の重が十分の十で、要が必要ってこと？。それなら僕と対して変わらんじゃん。で、よしおはどうよ。
<よしお> 僕はそのままだけど。命題「$p \Rightarrow q$」が真の命題であるとき、

p は q であるための十分条件、q は p であるための必要条件

ということ。



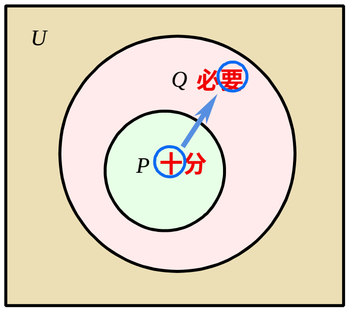
<かず子> さすが数学人よしおね。でも必要十分の意味って確かに分りにくいわよね。「努力するならば成功する」ことを真の命題と考えるとき、努力は成功するための十分条件といわれてもピンとこないわ。成功するためには努力だけで十分っていうのは分らないことはないけど、成功するためには努力は必要っていってもいいような気がするし。だから結局は、無理やりこじつけるか、重要性を納得するか、定義として理解するしかないわよね。
<まなぶ> いま、3つ、3つに分けたよね。何で、何か違ってない。
<アリス> うーん、結局、3人の考えを聞いても、何かよく分んないってことは分ったわ。
<かず子> その言葉の使い方、アリスは十分、日本語を理解していると思うよ。でもなんかうまい方法はないのかしら。
<よしお> うまい方法がどうかは何とも言えないけど、集合としてみるとどうだろうか。
命題「$p \Rightarrow q$」が真ということは、p, q を表す集合を P, Q とすれば、

「$P \subset Q$」

すなわち、集合 P が集合 Q に含まれているということだよね。
だから、P は Q の部分集合とみることで、必要・十分を考えられないだろうか。
具体的にいうと、$P \subset Q$ であるとき、

P は Q であるための必要条件
Q は P であるための十分条件

となるだろう。
<かず子> なるほどね。P は十分条件、Q は必要条件という集合とみてしまうということね。なんかいいかもしれない。
<アリス> それなら私も理解できるわ。日本語の単語を覚えるようにそういう集合の名称と考え、割り切ってしまえばいいのね。
<かず子> あとはそれを覚えやすくするために、含まれる方の集合から含む方の集合に向かって、「じゅうよう」と唱えれば完璧だと思うわ。3人寄れば文殊の知恵っていうけど、みんなで考えればいいアイデアがでるものね。



<まなぶ> あれっ、3人？、それなんか違ってない。僕のアイデアはどこいっちゃったの。僕だけ、いつも集合の外にはじき出されているように思えるんだけど。
<かず子> さっきはまなぶを含めて3つっていったら駄目っていうし、今度はまなぶを含めなかったらまたすねるし。ちょっと被害妄想じゃないかな。
でもまなぶを含めなかったら、まなぶは、十分でも必要でもないってことになることは何となく頷けるんだけどね。

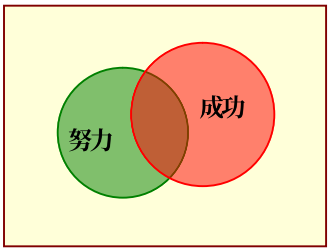
あとがき

命題に対する必要条件(Necessary Condition)と十分条件(Sufficient Condition)は、「必要・十分」という言葉の意味に過度に反応してしまうと分りにくい。必要十分条件(if and only if ⇒iff)については、同値をいえばいいだけだから、必要・十分を別に意識しなくても結論がでてしまうので問題はないが、「A は B を必要とする」「A は B で十分である」という文章の意味とは感覚的にマッチングしないのである。

その原因のひとつは、命題の真偽を調べずに条件を考えようとすることにもあるだろう。当然ながら、必要・十分条件は真の命題に対してのみ考えられる条件である。偽の命題に対して、十分・必要であることを議論することは無意味であるのは誰もが納得することである。

本文中には、

努力することは成功することの十分条件



という例が出ているが、「努力するならば成功する」ことは実際には真とはいえぬ。努力しないで成功するような例えば(たぶん)まなぶのようなケースだってある。逆に、成功するならば努力するとも必ずしもいえぬ。むしろ成功したら努力しない人間の方が圧倒的に多いかもしれない。したがって、「努力する」ことと「成功する」ことは、どちらを仮定にしても真にはならないから、必要・十分を考えると変な違和感が残るのである。

だが、例えば

犬は動物であるための十分条件

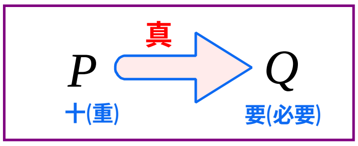
という場合は、明らかに「犬ならば動物は真であり、その逆は偽である」。したがって、「犬は動物であるための十分条件」は正しいことになるが、これも文章的にはすっきり落ちない。

「犬である以上は当然動物なのだから動物であれば十分だ」

「動物であることが犬であることには必要だ」

と無理やり文章にすり合わせようとしても奇妙な感触は拭えないのである。

ところで、必要・十分条件は、本文のかず子流をモデル図とすると、



としてまとめられるが、仮定と結論の関係は、「条件の強さ」で表現することがある。

真なる命題の仮定は、十分条件であるが、これは狭く厳しい条件である。動物生態系の一つの種族が犬である。対して動物全体は犬を含むわけだから広く緩い条件であり、これが必要条件である。そして必要十分条件はこの間にあることになる。

(厳しい) 十分 ⇒ 必要十分 ⇒ 必要 (緩い)

ちょうど手ごろな締め付け状態が必要十分とみなすことができるだろう。

さて、この締め付け具合は、条件を真理集合としてあらわすとき、集合の包含関係に置き換えられる。

命題「$p \Rightarrow q$」に対して、

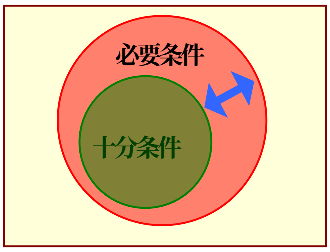
$P = \{p$の真理集合$\}$

$Q = \{q$の真理集合$\}$

とすれば、$P \subset Q$ であるときに、

P は十分条件(なる集合)

Q は必要条件(なる集合)



この包含関係において、その隙間が徐々に狭まり、集合が重なり一致した場合は

必要＝十分である集合

そう捉えると何となく見通しがいいのではないだろうか。

ところで、ここ数年、この単元の生徒の理解度はずいぶん落ち込んできている印象を受ける。

一因として国語力の低下というキーワードは否定できない。必要十分という日本語の意味をしっかり捉えることすらできないから、それから割り切ることにもつながらず、スムーズな思考発展ができない。

今の生徒の国語力は十分とは言えず、今後、さらに必要とされるものであることは間違いない。

最後に……(あとがきのあとがき)

今回の２つの小手技は、命題・論理に関するものです。
最近、授業をしていてこの分野の指導にずいぶんてこずるようになりました。説明していることが、なんかしっくり生徒に落ちていないようなのです。理解できていない生徒にその理由を問うと「何が分からないか分からない」と返ってきます。まさにこちらもその心境。日本語のどの部分が理解できないか理解できない。だから問題を解く段階にすら辿り着けないのです。
例えば次のような問題。

袋の中に白球 4 個、赤球 3 個がある。この中から 2 個を取り出すとき、白球である確率を求めよ。

解答は、$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$

となるのでしょうか？。でもこの問題、
①袋の中の球の総数は 7 個？。赤と白以外の色もあるかもしれない。
②2 個の球はどうやって取り出すの。1 個ずつか、それとも 2 個同時。1 個ずつの場合は取り出した球は元に戻すのかそれとも戻さないのか。
③取り出す白球の個数は何個だろうか。2 個とも白球なのだろうか。
問題の条件が不十分でも教師側は経験が題意を補ってしまうことがあります。
そういったことを踏まえて問題を書き直すと、

袋の中に 7 個の球が入っていて、4 個は白球、3 個は赤球である。 この袋の中から 2 個の球を同時に取り出すとき、その 2 個の球が白球である確率を求めよ。

とすればだいぶ分かりやすくなります。しかし、この条件で問題を解かせると、確率$\frac{1}{3}$と解答する生徒がいます。
理由を聞くと、「赤と白の２個の色の組合せは、赤赤、赤白、白白の３つだけだから」。そういったときには、「球にだって個性はあるだろう」と説明することにしています。「赤を女子、白を男子にし、袋をグループにすると、グループの中から男子２人を選ぶことになり、当然まなぶとよしおのように誰を選ぶかということを考えるべき。赤球はメタボや小粒の赤球だってあり、赤の色も深紅、薄い赤、いろいろあるはずだ。球の個性を大事にしなければならない。」こう説明するとだいたい生徒は納得してくれます。ところが次に、

袋の中に 7 個の球が入っていて、4 個は白球、3 個は赤球である。 この袋の中から 4 個を取って作る組合せと順列の総数を求めよ。

今度はそれぞれ
$${}_7C_4=35,\quad {}_7P_3=210$$
と解答する生徒がでてきます。「だって球の個性を大事にしろといったじゃない」。
ごもっとも。
「同じものを含む順列」や「事象の確率」といった分野の問いや演習で扱う場合は教科書にある例のように解くことが暗黙の条件となってしまい、教師側はどんな場面でもその条件を踏襲しようとしてしまいます。問題をみているわけではなくパターンを見てしまうのです。だからそのパターンが整理できていない生徒は、条件設定に拘り迷ってしまうことになります。
「問題を読もうとして分からなくなる生徒」「問題を読まないで解いてしまう教師」、どちらがいいのでしょうか。
そういったこともあり、最近、「言葉の使い方」にずいぶん臆病になってしまいました。
例えば「または」という言葉(接続詞)。
数学では「少なくとも一方」のことであり、A または B といったら、
「A のみ　B のみ　A と B」
を表します。でも、ファミレスでランチを注文し、ウェイトレスが「今日のランチは魚または肉の料理になりますが」といって「両方とも」と答えたら怪訝な顔をされるでしょう。日常会話のまたは「どちらか一方のみ」(差集合)として認識することの方が多いのです。
「かつ」も同様です。
「そして」と同意語に扱われますが、「A そして B」は、数学では A と B は並立であるのに対し、日本語ではさらに累加の意味ももっています。「A のあとにそして B」という意味でもあるわけです。時間的要素が加味されるということであり、だから数学でも確率の分野では累加の接続詞として扱われます。
「反対」「否定」「逆」の意味についても日本語と数学の意味の違いは混乱を引き起こします。
「否定」の反対は「肯定」でしょうか。
「反対」の否定は「賛成」でしょうか。
使い方としては同じようにも思えますが、否定と反対はどうちがうのでしょうか。
札幌旭丘高校は丘の上にあります。生徒は下校をするときは、丘を下っていくのですが、では「丘を下ることを否定する

とどうなるのか」と生徒に質問します。大半の生徒は「丘を上る」といいます。でも校舎は原生林に面しており、さらに進むことなどできそうにありません。そう指摘すると生徒はやっと気づいて、「下る」ことの否定は「下らない」と答えます。「下らない」ってどういうことと質問すると、「うーん、そのまま学校にいること」。

では、「下る」ことの反対はなんでしょう。国語辞典で「反対」の意味を調べると「二つの対立する事柄について一方から他の一方をいうこと、逆であること」とあります。定義としては、「反対」は対立する２つの事柄の関係しかいっていなく、その間にある曖昧な部分は考えないようです。いわゆる排中律(排中の原理)の関係にあるわけです。したがって、「下る」の反対は「上る」ということになります。

「否定」の反対は「肯定」であり、「反対」の否定は「反対しない」ということでしょう。

不等式の単元の第１回目の授業のときに、いつも

「不等式　３≧２は正しいか」

という質問をしています。正しい、正しくないのどちらかに挙手させると大半の生徒は「正しくない」に手を挙げます。３＞２は正しいけど、３＝２なんてことはありえないわけで、この２つを接続詞「かつ」で繋いで読んでいるのです。２つのモノ A,B を比較すると、A>B, A=B, A<B の３つの状態しかなく、A≧B は、「A>B または A=B」であることは認識できるのですが、理解に及んでいません。さらにこの場合は「少なくとも一方」ではなく「一方のみ」の意味になっていることが余計、混乱を招いているようです。

さて、「下る」ことを不等号「＜」とみるとその否定は「≧」となります。「＞」は上ることであり、「＝」は留まることになります。「A＞B」の否定を「A＜B」とする生徒は「否定」と「反対」の区別がついていないことになります。ちなみに、生徒は「理解する」「理解できない」の間にいつも「分からない」を挟んでいます。感覚としては「否定」の意味をよく理解しているように思うのですが。(ところで、このように考えると排中律であるような２つの事柄においては否定も反対も同じ意味になるようです。)

「逆」という言葉も微妙です。国語辞典では、「逆」の意味は「さかさま、反対」とあります。「反対」の意味は、前述のように「逆であること」とも記されています。逆と反対は同じ意味のようにもとれます。論理では「P ならば Q」の逆は「Q ならば P」と明解です。逆とは事柄(含意命題)における(仮定・結論の)向きを変えることです。「逆もまた真なり」ということは必ずしもいえないことはよく論理の話題となります。でも日常会話の中では「逆の行動」を示す場合は、行動は「反対」または「否定」をしてしまうことがあります。天邪鬼とは「人とは逆のことをする」であり、逆は「遡り」向きを変えることではなく、「逆らい」反対することとして受け取られています。

結局、日本語の「反対」「逆」「否定」は多義であり、その意味は微妙な会話関係で成立し、数学では我々も微妙な日常語として扱い、それを用いて厳密な論理関係を説明していることが多く、結局生徒は数学の前に「言葉の意味の壁」に翻弄されてしまいます。今回扱った論理関係の小手技もそういった微妙な意味合いを含んでいるのです。

さて、この微妙な論理に関する小手技は、この後２本を予定しています。

「排反と独立の小手技」

「背理法に関する小手技」

「排反」と「独立」はどう違うのでしょう。正確に答えられる生徒は残念ながらあまりいません。どちらも「A と B がお互い関係ない」ことで、この「関係ない」という日本語の意味が難しいのです。独立は「排反でなく関係ないこと」ですから、関係のない関わりであるといえます。関係があるのに関係ないこととはどういうことか分からないから「または」と「かつ」の使い分けができなくなってしまいます。結局、独立かどうかということは、確率を計算してみて初めて分かるといった結果論になってしまいます。

背理法は、命題を否定することで矛盾を導く証明法ですが、対偶による証明とどう違うのでしょうか。

教科書の問題を指導していていつも疑問に思うのは、次の問題です。

> a,b が有理数であるとき、次のことを証明せよ。
> 「$a+b\sqrt{2}=0$　ならば　$a=b=0$」

この証明は、背理法が用いられると説明されることがあります。

$b\neq 0$ として、$\sqrt{2}=-\dfrac{a}{b}$ から矛盾を導くわけですが、でもこれは正しい証明法といえるでしょうか。

「P ならば Q」なる含意命題では、命題の否定をすることを、命題の結論である Q のみを否定しているように解釈している節があります。結論を否定することで矛盾を導くということは、仮定の否定が正しいことを導くことになり、これでは、命題の対偶をとって証明したことになってしまいます。結局、背理法と対偶証明がまったく同じことをしているように取られてしまうのです。背理法の代表的な例題は「$\sqrt{2}$ は無理数である」ことの証明で、この命題の否定は、「無理数でない」ことから排中律により「有理数」となり、矛盾が起きます。では、命題「P ならば Q」の否定はというと、これは現在の教科書では扱っていません。にもかかわらず、教科書や問題集では演習問題として出題されているのです。数学で扱う否定とは、単純に言葉を否定するだけでなく、複合命題においても記号論理として体系的に否定できるような指導がなされないのであれば安易に背理法という証明法は使われるべきではないのかもしれません。

新学習指導要領が、来年度から「総則」をスタートとしていよいよ実施されます。今回の改訂の Key-Word のひとつに学校教育活動全体における言語活動があります。数学における言語活動は「言葉の論理的な理解と考察」であり、現代の崩壊しつつある言語を再構築する役目を担っているといえるでしょう。

言語を介してのコミュニケーションが成立しなければ、数学も成立しません。

その逆もまた真なりです。