

剰余の定理の小手技 (令和 ver)

中村文則

○ ニコイチはイケてる

<先 生> 剰余の定理のおさらいをしてみようか。

Ex1) 多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余りは2, $x-2$ で割ると余りは3である。

$P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割った余りを求めよ。

<まなぶ> タイパで「ピーチ甘い」だな。

<先 生> 何のこと。

<かず子> ピーチ甘いは、「 $P(1)$ が余り」のことです。「 $P(x)$ を $x-1$ で割った余り」を時短してタイムパフォーマンスで表現したみたいだけど、時間短縮かな、って思いますけど、タイパを使ってみただけなのは。

<先 生> この頃の若者言葉は、なんでも言葉を縮めて表現してしまう。先生は美しい日本語が色あせてだんだん枯れてしまっているように感じる。いつも「あざす」といわれるとムツとしてしまう。

<よしお> 先生、古すぎます。言葉もまた時代とともに変化すべきではないでしょうか。

<先 生> よしおまで毒されている。もっとも先生が若い頃も「ナウい」なんていっていたけど。

<アリス> ナウい?, 英語の Now のことなら、いまはみんな「なう」ってってます。

<かず子> 私のお父さんもときどき「ナウい」言ってる。英語の Now を可愛くいつてみたい。アリスがいうように「なう」は英語が元だけど、いま勉強していることを「勉強なう」のようにも使うのよ。

<アリス> そうなんですね。

<先 生> それ、その「そうなんですね」という言い方も違和感がある。

<かず子> でもまなぶのピーチ甘いはコテコテおやじギャグ構文。タイパの意味考えても一緒にするのはきもい。

<まなぶ> ちょえー、沼る。

<先 生> もうやめよう。授業がタイパでなくなってしまう。アリス、解いてごらん。

<アリス> はい、2次式で割るので余りは1次式。だから $ax+b$ とおきます。商を $Q(x)$ とおくと、

$$P(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$$

ピーチ甘いから、 $P(1) = a + b = 2$ 。同様に、 $P(2) = 2a + b = 3$

これを解いて、 $a = 1$, $b = 1$ 。だから余りは $x + 1$ となります。

<先 生> 正解です。ただ、2次式で割った余りは正確には1次式だけではない。

定数になる場合も考えられるから「1次以下」になる。定数の場合は $ax + b$ において $a = 0$ とすればいい。

<アリス> そうなんですね。

<先 生> そうなんですよ!!。このように1次式で割る場合は、ピーチ甘いのように短縮語してタイパできる。

でも、2次式以上で割るときは、「A を B で割って商 Q, 余り R」は、

$$A = BQ + R$$

と短縮しないで読むしかない。

<まなぶ> 「えーっ、びっくり」っていつていたよね。これこそ先生の本家本元おやじギャグってヤツだな。

<先 生> 今に至ってはそのギャグは恥ずかしい。それと、何でもかんでもヤツで片づけることにも違和感がある。

まあ、おいといて、次の問題

Ex2) 多項式 $P(x)$ を $x+2$ で割ると余りは31, $x^2 + 17x + 13$ で割ると余りは $7x + 11$ である。

$P(x)$ を $(x+2)(x^2 + 17x + 13)$ で割った余りを求めよ。

<かず子> ピーチ甘いができるのは、 $P(-2) = 31$ だけですな。

それにしても、問題の多項式の係数は素数ばかり。先生、わざとやっているよね。マジムカつく、激おこぶんぶん。

<よしお> それは、方程式 $2x^2 + 17x + 13 = 0$ の解 α から、 $P(\alpha)$ を計算させないようにするためかな。

解 α はムズイ式になるので他の方法を考えるということですね。

<まなぶ> それなら、2次方程式の解を代入する方法はダメって口頭でいえばいいだけ。

僕らを虐めることばかり考えている先生のアカハラ気質は相変わらずだ。

<先 生> ひどい言われようだ. よしおの言っている理由もあるけど, 面倒な係数であってもそれほど難しくなく解けることを理解して欲しいんだ.

$$P(-2)=31 \quad \cdots \cdots (b)$$

もうひとつの条件はどう表されるかな.

<アリス> 「えーっ, びっくり」ですね. 商を $Q_1(x)$ とすると,

$$P(x)=(x^2+17x+13)Q_1(x)+7x+11 \quad \cdots \cdots (\#)$$

あと, 3次式 $(x+2)(x^2+17x+13)$ で割った余りは2次以下だから ax^2+bx+c とかける. 商を $Q(x)$ とすると,

$$P(x)=(x+2)(x^2+17x+13)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots \cdots (*)$$

そして a, b, c を求めればいい.

<先 生> そうですね. そこで何とか, $P(-2)$ と $(\#)$ の2つの条件を $(*)$ である1つの式にまとめるという方針を立てる.

ところで, 「2つを1つにまとめる」, これを表す若者言葉ってあるのかな.

<よしお> 2つのものから1つのものを作り出すってことですね. 敢えて当てはめるなら「ニコイチ」でしょうか.

<かず子> ニコイチって, 二人で一人のように仲がいいということで, ちな, 昔でいうズツ友かな.

<まなぶ> かず子の昔は先生にとってはぜんぜん昔じゃない. ズツと友達の略語なんて知らないでしょ.

まあ, ニコイチを簡単にいうなら, 僕とアリスの関係だな. すごく YK.

<かず子> イミプー, それ. セクハラだよ. あんたの場合は YK(予感)でなく, すごく KY(空気読めない).

<先 生> もうその辺で. でもニコイチっていいかもしれない. この手の問題の解き方はニコイチ解法と名付けよう.

そこでだ. 条件をどうニコイチすればいいだろう.

<アリス> $(*)$ の式は, $P(x)$ を $2x^2+17x+13$ で割ったとき, 商が $(x+2)Q(x)$ とみることはできないのですか.

<よしお> 形としてはそうだけど, 余りは ax^2+bx+c だから2次式以下. 割る式より次数が低くなってないよ.

<かず子> あっ, それなら, ax^2+bx+c を $x^2+17x+13$ で割ったらどうかしら. そうしたら1次式以下になるからそれが余りよね.

<先 生> いいですね. その通りです.

<まなぶ> では小生が割って進ぜよう.

$$ax^2+bx+c=a(x^2+17x+13)+(b-17a)x+(c-13a)$$

意外と簡単. 割り算というより式変形でできてしまう.

<かず子> 急に若者言葉から時代ものの言葉になるのはなんなのかわからないけど, そうすると,

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2+17x+13)(x+2)Q(x)+a(x^2+17x+13)+(b-17a)x+(c-13a) \\ &= (x^2+17x+13)\{(x+2)Q(x)+a\}+(b-17a)x+(c-13a) \end{aligned}$$

これで $(\#)$ の式にできたわ.

<先 生> すなわち $(\#)$ と $(*)$ をニコイチしたってことだね.

<アリス> そうするとあとは, $(\#)$ より余りは $7x+11$ だから, ニコイチした式の余りの係数を比較して,

$$b-17a=7, \quad c-13a=11$$

ということですね. そしてもう一つの a, b, c の関係式は (b) から,

$$P(-2)=4a-2b+c=31$$

これを解いて, $a=-2, b=-27, c=-15$

だから余りは, $-2x^2-27x-15$ になります.

<先 生> 正解です. おや, まなぶ, なんか不満気な面持ちだな.

<まなぶ> かけー, といいたいところだけど, 条件式と求値の式から残りの条件式をニコイチしている. なんかしゃばい.

やっぱ, 2つの条件式をニコイチした方がメロい.

<先 生> しゃばい, メロいは意味不明だけどなんとなくいっていることはわかる.

では, まなぶのようにニコイチしてみようか. (b) を基にする. そのためにえっぴっくりに書き換える.

$$P(x)=(x+2)Q_2(x)+31 \quad \cdots \cdots (b \ b)$$

さあ, どうする.

<かず子> $Q_2(x)=(x^2+17x+13)Q_3(x)$, こんな風にできたらマジサイコー.

<よしお> $Q_2(x)$ を $x^2+17x+13$ で割ったら商 $Q_3(x)$ で割り切れるってことだよな. さすがにそれは無理ゲー. でも余りは1次式以下だから, $ax+b$ とおくと,

$$Q_2(x)=(x^2+17x+13)Q_3(x)+ax+b$$

これはできますよね.

<まなぶ> なるほど、そうすると、(b b)に代入すると、

$$\begin{aligned}P(x) &= (x+2)\{(x^2+17x+13)Q_3(x)+ax+b\}+31 \\&= (x+2)(x^2+17x+13)Q_3(x)+(x+2)(ax+b)+31\end{aligned}$$

やった、(b)と(#)をニコイチできた。

<アリス> $(x+2)(ax+b)+31=ax^2+(2a+b)x+(2b+31)$

確かに2次式以下の式だから余りと考えてよさそうです。でも、 a と b はどうやって求めればいいのかしら。

<かず子> 先ほどの場合と同じよ。また、 $x^2+17x+13$ で割ればいい

$$ax^2+(-2a+b)x+(-2b+31)=a(x^2+17x+13)+(2a+b-17a)x+(2b+31-13a)$$

(#)より、余りは $7x+11$ だから、

$$2a+b-17a=7, \quad 2b+31-13a=11$$

これを解いて、 $a=-2$ 、 $b=-23$ だから余りは、 $-2x^2-27x-15$

なんか先ほどのニコイチより計算が面倒になっている。

<よしお> 先生、この場合は(#)を基にして(b)とニコイチした方がいいのではないのでしょうか。

(#)の $Q_1(x)$ を $x+2$ で割った商を $Q_2(x)$ 、余りは定数だから a とすると、

$$Q_1(x)=(x+2)Q_2(x)+a$$

これから、(#)は、

$$\begin{aligned}P(x) &= (x^2+17x+13)\{(x+2)Q_2(x)+a\}+7x+11 \\&= (x+2)(x^2+17x+13)Q_2(x)+a(x^2+17x+13)+7x+11\end{aligned}$$

ずっと、すっきりまとめられる。

<先生> そうですね。では a はどうやって求めるのかな。

<アリス> あっ、この場合はピーチ甘いでいいわ。

(b)より、 $P(-2)=31$ 。先ほどの式より、

$$\begin{aligned}P(-2) &= a\{(-2)^2+17\cdot(-2)+13\}+7\cdot(-2)+11 \\&= -17a-3\end{aligned}$$

$\therefore -17a-3=31$ より、 $a=-2$ これから余りが求められる。

<かず子> 先生、よしおの勝ちですね。

<まなぶ> ちっ、ちっ。かず子、違うよ。陰キャラの先生がそんな単純な方法にするわけないだろ。

いままでのニコイチの解法見てみるよ。

最初は、 a 、 b 、 c の3つの変数。

次のニコイチは a と b の2変数。

そして、最後のよしおのニコイチは a だけの1変数だ。

変数の個数がだんだん減っている。先生、よしおに解答させるように、仕組んだでしょ。

<先生> そういう目のつけどころ、さすがに邪眼のまなぶだな。でも仕組んだのではなく、次に1変数だけで余りを表すにはどうしたらいいかと質問しようと思っていたんだ。いまは教育もサステナブルだからね。

<まなぶ> さすってなぶる？。先生、それ危ないでしょ。

<かず子> あほか。なに顔を赤くしてるのよ。サステナブルは持続可能ってことでしょ。

でも、それを先読みしたよしおはやっぱり凄い。よしおしか勝たんということね。

<よしお> 先生、サステナブルということはまだこの先があるのでしょうか。

<まなぶ> えっ、どういうこと。さらにそのあとに変数を用いずに余りを求めるしかないでしょ。

<先生> うん、その通り。それがニコイチの最終形態。

(b)はピーチ甘いだった。では(#)もピーチ甘いにしたらどうなるだろう。

<まなぶ> 「ピーチ甘くて、えっぴっくり」、ということ？。

<かず子> 受ける〜。でもやっぱり、あほ。(#)に $x=-2$ を代入して $P(-2)$ を求めるということですね。

$$\begin{aligned}P(-2) &= \{(-2)^2+17\cdot(-2)+13\}Q_1(-2)+7\cdot(-2)+11 \\&= -17Q_1(-2)-3\end{aligned}$$

<まなぶ> そうか、ここで、(b)より、 $P(-2)=31$ だから、

$$-17Q_1(-2)=34 \quad \therefore Q_1(-2)=-2$$

<先生> これをえっ、びっくりで読んでごらん。

<アリス> $Q_1(x)$ を $x+2$ で割ると、余りが -2 です。だから、商を $Q_2(x)$ とすると、

$$Q_1(x) = (x+2)Q_2(x) - 2$$

こうなります。

<先生> 最後に(＃)に代入する。

<まなぶ> どれどれ、

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 + 17x + 13)Q_1(x) + 7x + 11 \\ &= (x^2 + 17x + 13)\{(x+2)Q_2(x) - 2\} + 7x + 11 \\ &= (x+2)(x^2 + 17x + 13)Q_2(x) - 2x^2 - 27x - 15 \end{aligned}$$

おーっ、

<アリス> 凄いですね。2つの条件をニコイチしただけで解が得られている。

<かず子> これ、ニコイチの推しの解法ですね。

<先生> 推し？、まあ、推薦できる解答ではある。

では、最後に、ニコイチで次の問題を解いてみよう。

Ex3) 多項式 $P(x)$ を $x^2 + 1$ で割ると余りは $x+1$ 、 $P(x)$ を $2x^2 + 3$ で割ると余りは $2x+3$ である。
 $P(x)$ を $(x^2 + 1)(2x^2 + 3)$ で割った余りを求めよ。

<まなぶ> なんか係数で遊んでいるような。

これはまったく「ピーチ甘い」が利用できない甘くない問題だ。

<アリス> まなぶさん、今日は面白いですね。

では、えっー、びっくりで示してみます。

まず条件は、

$$P(x) = (x^2 + 1)Q_1(x) + x + 1 \quad \cdots \cdots (b)$$

$$P(x) = (2x^2 + 3)Q_2(x) + 2x + 3 \quad \cdots \cdots (\#)$$

そして求める余りは、

$$P(x) = (x^2 + 1)(2x^2 + 3)Q(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \cdots \cdots (*)$$

変数が4つになるのですね。

<かず子> でも考え方は同じよ。

(*)の余りを $ax^3 + bx^2 + cx + d$ と置かないで、(b)と(＃)をニコイチすればどうかしら。

(b)において、商 $Q_1(x)$ を $2x^2 + 3$ で割るとき、余りは1次以下だから $ax + b$ とすると、

$$Q_2(x) = (2x^2 + 3)Q_3(x) + ax + b \quad (\text{商 } Q_3(x))$$

これから、

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 + 1)\{(2x^2 + 3)Q_3(x) + ax + b\} + x + 1 \\ &= (x^2 + 1)(2x^2 + 3)Q_3(x) + (x^2 + 1)(ax + b) + x + 1 \quad \cdots \cdots ① \end{aligned}$$

でもこの後はどうすればいいのかしら。

<よしお> (＃)もおなじように考えたらいいと思う。

商 $Q_2(x)$ を $x^2 + 1$ で割った余りを $cx + d$ とすると、

$$Q_2(x) = (x^2 + 1)Q_4(x) + cx + d \quad (\text{商 } Q_4(x))$$

$$\begin{aligned} P(x) &= (2x^2 + 3)\{(x^2 + 1)Q_4(x) + cx + d\} + 2x + 3 \\ &= (2x^2 + 3)(x^2 + 1)Q_4(x) + (2x^2 + 3)(cx + d) + 2x + 3 \quad \cdots \cdots ② \end{aligned}$$

あとは、2つの式の余りを比較すれば求められる。

<アリス> やってみます。

$$\text{①の余りは } (x^2 + 1)(ax + b) + x + 1 = ax^3 + bx^2 + (a+1)x + (b+1)$$

$$\text{②の余りは } (2x^2 + 3)(cx + d) + 2x + 3 = 2cx^3 + 2dx^2 + (3c+2)x + (3d+3)$$

これから、

$$a = 2c, \quad b = 2d, \quad a + 1 = 3c + 2, \quad b + 1 = 3d + 3$$

それほど面倒な連立方程式ではないですね。これを解くと、

$$a = -2, \quad b = -4, \quad c = -1, \quad d = -2$$

①の方の余りに代入すると、 $-2x^3 - 4x^2 - x - 3$

<まなぶ> うーん、でもこの方法だとニコイチとしては弱いような。変数も a, b, c, d の4つを使っている。

それなら、(*)の余りを、 x^2+1 や $2x^2+3$ で割って(b)や(#)とニコイチしたっていい。

<かず子> 確かにそうね。あつ、②から①とニコイチするのはどうかしら。

②の $(2x^2+3)(x^2+1)Q_3(x)$ は x^2+1 で割っていると考ええるの。

そして、②の余りである $2cx^3+2dx^2+(3c+2)x+(3d+3)$ を x^2+1 で割れば、その余りは(b)より $x+1$ になるのでは。

<よしお> いいと思う。

$$2cx^3+2dx^2+(3c+2)x+3d+3=(x^2+1)(2cx+2d)+(c+2)x+(d+3)$$

これが $x+1$ に等しいから

$$c+2=1, \quad d+3=1 \quad \text{より,} \quad c=-1, \quad d=-2$$

よって余りは、

$$-2x^3-4x^2-x-3$$

c と d の2つの変数で求められた。

<かず子> でも、却って計算は面倒になったかも。推しの解法ってわけにもいかないわ。

<よしお> 変数が1つというのも難しそうだし、変数をなくすなんて予想すらできない。先生、ヒントはありませんか。

<先生> 今までの問題、どうニコイチしたかを整理すると次のようになる。

求める式の余りを、一つの条件式の割る式で割ってニコイチ

一つの条件式の商を、もう一つの条件式の割る式で割ってニコイチ

さて、もうひとつニコイチできる割り算はないだろうか。

<アリス> 余りを割ってニコイチ、商を割ってニコイチ……、あ、う、まだ割る式を割る式で割るってしてないですね。

<かず子> トリプルワル、まなぶ？

<まなぶ> 何言ってるの。でも、確かにそうだ。あつ、僕がトリプルワルってことではないからな。

条件式の割る式は、 x^2+1 と $2x^2+3$ だから、 $2x^2+3$ の方を x^2+1 で割ると、

$$2x^2+3=2(x^2+1)+1$$

そうすると、(#)の式は、

$$\begin{aligned} P(x) &= \{2(x^2+1)+1\}Q_2(x)+2x+3 \\ &= 2(x^2+1)Q_2(x)+Q_2(x)+2x+3 \end{aligned}$$

うーん、これから(b)とニコイチできればいいけど、 $Q_2(x)+2x+3$ は、1次式とは限らないから、余りとは言えない。

このやり方ではだめということかな。

<先生> いや、そのトリプルワルで正しい。

$Q_2(x)+2x+3$ の次数は1次以上の式だから必ずしも余りではない。

それは、まだ割っている途中ということだ。

<かず子> まだ、 x^2+1 で割ることができて、ワル幕進中でありワルに沼ってないということですね。

<まなぶ> なんか、気になる言い方だな。でも確かにその通りかも。あつ、僕がワル幕進中とかそういうことではないよ。

<よしお> $Q_2(x)+2x+3$ をさらに x^2+1 で割ると、最終的には余りの $x+1$ になるということですね。

<アリス> やってみます。

$Q_2(x)+2x+3$ を x^2+1 で割るとき、商を $Q_3(x)$ とすると余りは $x+1$ だから、

$$Q_2(x)+2x+3=(x^2+1)Q_3(x)+x+1$$

これから、

$$Q_2(x)=(x^2+1)Q_3(x)-x-2$$

$Q_2(x)$ が x^2+1 で表されてニコイチできます。

<まなぶ> (#)の式の商 $Q_2(x)$ に代入するってことだな。

$$\begin{aligned} P(x) &= (2x^2+3)\{(x^2+1)Q_3(x)-x-2\}+2x+3 \\ &= (2x^2+3)(x^2+1)Q_3(x)-(2x^2+3)(x+2)+2x+3 \\ &= (x^2+1)(2x^2+3)Q_3(x)-2x^3-4x^2-x-3 \end{aligned}$$

おーっ、変数を使わないで求められてしまった。

<かず子> 解答の流れは確かに推しの解法と同じようで、サステナブルですね。

まあ、まなぶのように推しの一手でもサステナブルになるかは推して知るべしでしょうけどね。

<まなぶ> なんのこと？

あとがき

脱稿後、このような発想で剰余の定理を用いた解法がないかとネットで検索したところ、自分の小手技にヒットしてしまいました。2002年執筆の「剰余の定理のちょっとした小手技」です。20年以上昔に書いたもので記憶からは完全に消えていました。もし今回のものが同じ内容ならボツとなり自分の成長のなさを思い知ることになります。恐る恐る過去の原稿を読みと、過去の小手技は、ラグランジュの補完公式へと導き、剰余の定理を3点が与えられた放物線の方程式へと応用させています。はっきりいってずいぶん尖った解法かな、といまの自分の感想です。今回の小手技は剰余の定理をどのように読み解くかに絞り、無理をしない丸くなった内容であり、悪くいえば挑戦がない小手技です。20年前と今は違ったアイデンティティの自分なのでしょう。でも、割り算と剰余の定理を日本語と数学語をバイリンガルで翻訳すると捉えた考えは変わっていませんでした。そしておやじギャグのような低俗思考も同じ。性根は変わらないものなのですね。

剰余の定理は日本語を数学語に読み替え読み解き式化する、昔はずいぶんこのフレーズを用いたものです。

例えとして、「I love you」は「私はあなたを愛している」と直訳するのではなく、「月がとっても奇麗ですね」(夏目漱石)、「死んでもいいわ」(二葉亭四迷)のように意識します(二人の婉曲的なこの言葉は逸話と言われていますが)。だから剰余の定理もどう意識するかでその方向性が定まるのだよ、いまから思えば昔の指導法ですね。今はそんな情緒なんかは学習に求めず「結果 Only」でしょう。

「あの頃はこうだった」というおやじ世代の押し付けはもうダメなのです。寂しい限りですが。

世代のギャップのスパンはずいぶん短くなったのではないのでしょうか。若者はZ世代と言われますがもともとはX世代が始まりました。ハンガリーの写真家ロバート・キャパが写真集「ジェネレーション X」で撮影した若者をそう呼び、ミレニウム前にして再び注目を浴びました。Xはよくわからない意味不明なものを指し、1965年から1980年頃までの世代を未知の世代に準え、X世代(日本では高度成長からバブル崩壊までの時代)と呼びます。それがいつのまにかアルファベットの続きでY世代(1980-1995)、Z世代(1996-2010)へと受け継がれました(ちなみにわたしはW世代です)。15年ほどのスパンで世代は変わり、2025年の今はもうα世代が登場しています。いまの高校生はまだZ世代ですが、もうすぐ「Z世代、古いよね」と言われるのでしょう。呼応するように若者言葉もどんどん変化し、若者ですら1年経ったら対応できず追いつけなくなっています。

鹿兒島弁が難解な言葉であるのは、昔は敵(スパイ)対策のために考案されたからといわれますが、若者言葉は世代の共通認識を他の世代には知って欲しくも認めてほしくもない防御意識でありスマホを発信源として拡散しています。ジェネレーションギャップはとんでもなく短いスパンになっているのです。

そういった若者言葉を一方通行であってもおやじ教育者は理解したいと考え、今回の小手技では以前のバイリンガルの読み替えの部分で最近気になる若者言葉で表現してみました。30年経っても歳をとっていないY世代の4人の登場人物が現代の若者言葉を喋り、剰余の定理の読み替えをニコイチするのです。

ニコイチは、「二人で一人」の親しい間柄の俗語ですが、「二つのものから一つのものを作り出す」という意味もあります。最近の意味不明な若者言葉のなかでは生産的な、いい言葉ではないでしょうか。

剰余の定理の単位では用語の言葉遣いで気になる表現があります。多項式の次数(degree)です。次数は順序(Order)だから、高い、低いで表すものです。降べき、昇べきに整理するといったことでも分かるでしょう。でも、整式 $P(x)$ を $A(x)$ で割るとき、余りの次数は $A(x)$ より小さいといい、整式の次数を指数の値の大小で表しています。整数の割り算では、余りは割る数より小さいのでその名残りなのでしょう。でもまあ、これは若者言葉と同様、用語も変化するから認めてもいいかもしれません。でも「1次式で割るときの余りは定数」、これはどうでしょうか。定数として0も含めるのです。 m 次式と n 次式の積は $(m+n)$ 次式であるのは重要な性質です。だから0次式である0以外の定数と m 次式($m \geq 1$)を掛けると m 次式になります。でも定数が0の場合には積は0となってしまう性質が崩れてしまいます。本文ではこれは無視して触れていませんが、本当はきちんと説明した方がいいのでしょう。

さらに気になるのは、余りの「存在」、「一意性」です。「存在」については余りは存在するのは当たり前の認識で、何をいまさら、となるので敢えて触れて混乱させる必要はないでしょう。でも「一意性」は解法の中でも必要になります(本文でも結構使っています)。余りの一意性は簡単に証明できるのですが、小学生が初めて整数の割り算を学ぶときはその説明は難しすぎます。そして高校で整式の除法として学ぶときには、小学校で説明していないのでいいだろうと片づけてしまうのです。

では、証明してみましょう。

除法の原理：多項式の割り算の余りは一意に定まる

証明)

多項式 $P(x)$ を多項式 $A(x)$ で割るとき、商 $Q_1(x)$ 、余り $R_1(x)$ とする。

$$P(x) = A(x)Q_1(x) + R_1(x) \quad \text{ただし、} \deg R_1(x) < \deg A(x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

また、 $P(x)$ を $A(x)$ で割るとき、商 $Q_2(x)$ 、余り $R_2(x)$ とする。

$$P(x) = A(x)Q_2(x) + R_2(x) \quad \text{ただし、} \deg R_2(x) < \deg A(x) \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$A(x)Q_1(x) + R_1(x) = A(x)Q_2(x) + R_2(x)$$

$$(Q_1(x) - Q_2(x))A(x) = R_2(x) - R_1(x)$$

ここで,

$$\deg A(x) = n, \quad Q_1(x) \neq Q_2(x)$$

とする.

$$\text{左辺より, } \deg(Q_1(x) - Q_2(x))A(x) \geq n$$

$$\text{右辺より, } \deg(R_2(x) - R_1(x)) < n$$

これは矛盾するので, $Q_1(x) = Q_2(x)$

$$\text{よって, } R_2(x) - R_1(x) = 0 \quad \therefore \quad R_1(x) = R_2(x)$$

以上より, 余りは一意的に定まる.

(終)

さて, 余りの一意性を用いると, 次の性質が自明となります.

多項式 $P(x)$ は $P(x) = A(x)Q(x) + R(x)$ と表される. このとき,
 $P(x)$ を $A(x)$ で割った余りは, $R(x)$ を $A(x)$ で割った余りに等しい.

ユークリッドの互除法のような関係ですね.

この性質を用いると, 本文の解法はぜひぶん見通しがよくなります.

本文の Ex2 で考えてみましょう.

Ex2) 多項式 $P(x)$ を $x+2$ で割ると余りは 31, $x^2+17x+13$ で割ると余りは $7x+11$ である.
 $P(x)$ を $(x+2)(x^2+17x+13)$ で割った余りを求めよ.

解) $P(x)$ を 3 次式 $(x+2)(x^2+17x+13)$ で割った余りを $R(x)$ とする.

$R(x)$ の次数は 2 次以下であるから,

$R(x)$ を $x^2+17x+13$ で割ると商は定数 a である.

余りは $7x+11$ より,

$$R(x) = a(x^2+17x+13) + 7x+11$$

また, $R(x)$ を $x+2$ で割った余りは 31 であるから,

$$R(-2) = 31 \quad \therefore \quad a = -2$$

以上より, 余りは $R(x) = -2x^2 - 27x - 15$

すっきり求められました.

では, Ex3 はどうでしょうか.

Ex3) 多項式 $P(x)$ を x^2+1 で割ると余りは $x+1$, $P(x)$ を $2x^2+3$ で割ると余りは $2x+3$ である.
 $P(x)$ を $(x^2+1)(2x^2+3)$ で割った余りを求めよ.

$P(x)$ を 4 次式 $(x^2+1)(2x^2+3)$ で割った余りを $R(x)$ とすると, $R(x)$ は 3 次以下の多項式である.

$R(x)$ を x^2+1 で割った商を $Q_1(x)$ とすると, 余りは $x+1$

また, $2x^2+3$ で割った商を $Q_2(x)$ とすると, 余りは $2x+3$

ここで, $R(x)$ は 3 次以下の整式より, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ は, どちらも 1 次以下の整式である.

$Q_1(x) = ax+b$, $Q_2(x) = cx+d$ とおくと,

$$R(x) = (x^2+1)(ax+b) + x+1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$R(x) = (2x^2+3)(cx+d) + 2x+3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

右辺多項式を比較し, x の恒等式と考えて各項の係数を比較し, a , b , c , d を求める(以下略).

本文と大差ない解法になりますが, 見通しはいいでしょう.

もちろん, 本文の「割り式を割り式で割る」トリプル解法についても $P(x)$ を $R(x)$ に替えることで展開できます.

でも, トリプル解法は Ex3 限定のサステナブルでない解法なのです.

次の問題でもう一度トリプル解法を考えてみましょう.

Ex4) 多項式 $P(x)$ を $x^2 + x + 2$ で割ると余りは $2x + 1$, $P(x)$ を $x^2 + 2x + 3$ で割ると余りは $x + 2$ である.
 $P(x)$ を $(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 3)$ で割った余りを求めよ.

求める余りを $R(x)$ とすると, Ex3 と同様に次式が得られます.

$$R(x) = (x^2 + x + 2)Q_1(x) + 2x + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$R(x) = (x^2 + 2x + 3)Q_2(x) + x + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

ここで, 本文のようにトリプルワルを考えます.

$$x^2 + 2x + 3 = (x^2 + x + 2) + x + 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

②に代入します.

$$\begin{aligned} R(x) &= \{(x^2 + x + 2) + (x + 1)\}Q_2(x) + x + 2 \\ &= (x^2 + x + 2)Q_2(x) + (x + 1)Q_2(x) + x + 2 \end{aligned}$$

ここで,

$R(x)$ を $x^2 + x + 2$ で割った余りは, $(x + 1)Q_2(x) + x + 2$ を $x^2 + x + 2$ で割った余りに等しい
 この性質を用いると,

$$(x + 1)Q_2(x) + x + 2 = (x^2 + x + 2)Q_3(x) + 2x + 1 \quad \cdots (*)$$

でも, この式から $Q_2(x)$ を求めることはできません.

本文の Ex3 でトリプルワルを利用できたのは, $2x^2 + 3$ を $x^2 + 1$ で割った余りは定数だったからなのです.

③のように余りが1次以下になるとサステナブルな持続はできないのです.

結局, Ex3 の前半の解法と同様に, $R(x)$ は3次以下の整式より, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ は1次以下の整式であることを用います.

$$Q_1(x) = ax + b, \quad Q_2(x) = cx + d$$

とします. これから,

$$R(x) = (x^2 + x + 2)(ax + b) + 2x + 1 = ax^3 + (a + b)x^2 + (2a + b + 2)x + (2b + 1) \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$R(x) = (x^2 + 2x + 3)(cx + d) + x + 2 = cx^3 + (2c + d)x^2 + (3c + 2d)x + (3d + 2) \quad \cdots \textcircled{5}$$

右辺の各項の係数を比較すると,

$$a = c, \quad a + b = 2c + d, \quad 2a + b + 2 = 3c + 2d + 1, \quad 2b + 1 = 3d + 2$$

これを解いて,

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 1, \quad d = 1$$

以上より, ④に代入すると,

$$R(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 5$$

まあ, 一応解けました. でも, ニコイチとしては物足りないですね.

うまくニコイチすることはできないでしょうか.

そこで(*)に注目してください.

$Q_2(x)$ は1次以下の式ですから, 2次以下の式になります.

ということは, 右辺も2次以下の式なので $Q_3(x)$ は定数なのです.

$Q_3(x) = a$ とすると, (*)より,

$$(x + 1)Q_2(x) + x + 2 = a(x^2 + x + 2) + 2x + 1$$

ここで, a の値は, $x = -1$ を代入すると求められます.

$$1 = 2a - 1 \text{ より, } a = 1$$

これから,

$$(x + 1)Q_2(x) + x + 2 = (x^2 + x + 2) + 2x + 1$$

$$(x + 1)Q_2(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$\therefore Q_2(x) = x + 1$$

最後に②に代入しましょう.

$$R(x) = (x^2 + 2x + 3)(x + 1) + x + 2 = x^3 + 3x^2 + 6x + 5$$

トリプルワル復活. ニコイチで余りを求めることができました.

でも変数 a を用いているのでまだサステナブルな解法としては不十分でしょう.

さらに持続可能な解法はこれからの世代に委ねることにします.