

# $\sum_{k=1}^n k^p$ の計算のちょっとした小手技

札幌新川高等学校 中村文則

<先生>前回は、 を使って和を圧縮して表現する方法と、圧縮したままでの計算方法について考えたね。では復習から。

ex)  $\sum_{k=1}^n (3k+1)(k-2)$  を計算せよ。

よしお、やってみよう。

<よしお> (与式)  $= \sum_{k=1}^n (3k^2 - 5k - 2) = 3 \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 5 \times \frac{1}{2} n(n+1) - 2n = n(n^2 - n - 4)$

となります。

<先生> いいですね。よしおが計算したように平方数、立方数の和の公式はスラスラとそらでいえるようになってないよとだめだよな。まなぶは大丈夫かな。

<まなぶ> はい、一応は覚えました。

<先生> 一応ということは、まだ完全ではないってことかい？

<まなぶ> いえ、ちゃんと覚えたんですけど、なんかこの公式はしっくりこないんです。

<先生> どういうこと？

<まなぶ> うーん、なんていっていいか、数学的な美しさを感じられないんですよ。

<かず子> そんなことはないと思うな。先生が前に図を使って視覚的な意味を示してくれたように、私は美しい公式だと思うけどな。

<まなぶ> でもそれは、平方数についてだろ。立方数になると、なんかこじ付けみたいだったし、4乗や5乗の場合は先生は使われることはないからといって結局やらずに終わってしまったし。

<かず子> そりゃ、そうだけど.....。

<まなぶ> それに、もっとイライラするのは何か計算が面倒くさいんだよな。式をまとめて因数分解するときも共通因数がnしかないし.....。無理して因数分解する必要なんてないと思う。いっそのこと、

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

と覚えて、展開して整理した方がよっぽどラクじゃないだろうか。

<よしお> でも、やっぱりこういう場合は美しいのは因数分解の方で.....

<先生> 妙な方へ話しがすすんでるけど、実は先生はまなぶの意見に賛成なんだ。

この整数のべき和に関しては3乗まではみんなに公式を示したけれどそれらにある共通性がなにか見出せない。視覚的証明もだから平方と立方ではまるで表現方法が違っていたね。数列の和という結果をだすためには機械的に公式を唱えることは必要なんだけどその背景に疑問を抱かずに計算してしまうことは危険だと思うんだ。特に、数列の公式はマニュアル化したものが多く、それを盲信して乱用するのはどうかとは思う。

べき和にしても先生は確かに4乗や5乗は必要ないといったけど、それが求められないかと考えるのが数学の面白さではないだろうか。ちょっと話しが長くなったけど、今日は予定を変更してまなぶの不満と疑問にちょっと付き合ってみようと思う。たとえばだね。次の問題。

$$\sum_{k=2}^{n+3} (3k-4)$$

かず子、解答してごらん。

<かず子> はい、えーと、n+3までの和だから公式のnをn+3に読み替えて

$$3 \sum_{k=2}^{n+3} k - \sum_{k=2}^{n+3} 4 = \frac{3}{2} (n+3)(n+4) - 4(n+3) = \frac{1}{2} (n+3)(3(n+4) - 8) = \frac{1}{2} (n+3)(3n+4)$$

となります。

<よしお> かず子、それはまずいよ。だってkの値はk=2からカウントを始めるんだらう。

<かず子> あっ、そうだ。そうすると先ほどの計算結果からk=1の場合を引いて.....。

<先生> たいい話しているね。実はこれが公式の弊害なんだ。よくこの式を眺めてごらん。いま何の和が要求されているのかというとkの1次式のだろ。ところでkの1次式はどんな数列を表していたらうか。

<まなぶ> 等差数列です。

<先生>そのとおり。では、等差数列の和を求めるのに必要なものはなにかな。

<よしお>初項と項数と、公差または末項の値です。

<先生>では、圧縮されたこの式からそれらの factor が読み取れないだろうか。

<かず子>初項は  $k=2$  を代入して 2、公差はもちろん 3、項数は  $k=2$  から  $k=n+3$  まで代入したんだから  $n+2$ 、そして末項は  $k=n+3$  を代入すると  $3n+5$  です。

<先生>だから求める和は、等差数列の和の公式より

$$\sum_{k=2}^{n+3} (3k-4) = \frac{1}{2}(n+2)(2+3n+5) = \frac{1}{2}(n+2)(3n+7)$$

となるわけだ。どうだろう。何の和を求めるかということまで注意してみると、必ずしもベキ和の公式を使う必要がないことがわかるだろう。これでまなぶが指摘した計算が面倒という不満は少しは解消できたのではないだろうか。

実際、ex の問題を解くと、

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n (5k+2) = 3 \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} n(7+5n+2) = \frac{1}{2} n(2n^2-2n-8) = n(n^2-n-4)$$

となるわけだ。

<まなぶ>なるほど。でも  $k^2$  の計算の部分がやっぱりやりにくいんだよなあ。そのところは何かうまい方法はないんでしょうか。

<先生>欲張りな奴だな。じゃあ、今度は次の和を求めてみようか。

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)$$

<まなぶ>また、公式に代入して単純計算するんですかあ。

<先生>いや、ちょっと違う。数列  $\{k(k+1)\}$  を展開するのではなくて、次のように変形するんだ。

$$k(k+1) = \frac{1}{3} \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}$$

この式が正しいことは、右辺を共通因数  $k(k+1)$  で括って因数分解してみると簡単に分かるね。

さて、ところでこの右辺の式は左辺の  $k(k+1)$  が連続する 3 整数の積に分解できたことを表している。こうやって分解すれば、平方数・立方数の和の公式を使わなくても実は数列の和は求められるんだ。実際、 $k=1$  から  $k=n$  までの数列の値を順番に抜き出していくと、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1) &= \frac{1}{3}(1 \cdot 2 \cdot 3 - 0) \\ &+ \frac{1}{3}(2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3) \\ &+ \frac{1}{3}(3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4) \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{3}(n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

<まなぶ>へえ！、面白いですね。でもそれが僕の欲張りな疑問とどんな関係があるんですか。

<よしお>何いってんだい。まなぶ、数列の一般項が連続する整数の積に分解できれば、その公式を使わなくていいってことじゃないか。

<先生>その通り。例えば ex の問題は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (3k^2 - 5k - 2) &= \sum_{k=1}^n (3k(k+1) - 8k - 2) \\ &= 3 \times \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2} n(10+8n+2) \\ &= n(n^2 - n - 4) \end{aligned}$$

どうだろう。求まったね。

<まなぶ>まだよく分からないのですが。結局この計算は  $k^2$  の代わりに新しい公式を使っただけのことじゃないですか。

<先生>もちろんそうだけど、大事なことはこの公式の拡張性なんだ。いまは  $k(k+1)$  という連続する 2 つの整数の積について分解したけれど、では連続する 3 つの整数の積  $k(k+1)(k+2)$  についてはどう変形できるだろう。

<よしお>同じように考えて、前後に  $(k-1)$  と  $(k+3)$  を挟んでやると、

$$k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4} \{k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)\}$$

これから、

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

となります。

<先生>どうだろう、拡張性が見えてきたね。同様に考えていけば、

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

となるはずだ。

<よしお>そうすると、連続する整数の積をつくればもう  $\sum_{k=1}^n k^p$  の公式は必要なくなるというわけですね。

<先生>そういうことになるね。数列が  $n$  の 1 次式や 2 次式であれば、連続する整数の積に分解することは簡単にできる。

たとえば、 $k^2+2k+3=k(k+1)+k+3$  のように変形すればよいわけだ。

<まなぶ>なるほど。ところで、先生、連続する整数の積の出発点は何であってもいいんですか。

<先生>まなぶ、ということだい。

<まなぶ>あのですね。いままでの積をみると、 $k(k+1)$  とから  $k(k+1)(k+2)$  というように、出発点を  $k$  から考えて積に変形していますよね。

でも僕は  $k-1$  から出発して積を作った方がいいんじゃないかと思うんです。

<よしお>どうしていいんだい。

<まなぶ>だって、和をとってみよう。

$$(k-1)k = \frac{1}{3}((k-1)k(k+1) - (k-2)(k-1)k)$$

$$\text{なんだから、} \sum_{k=1}^n (k-1)k = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) = \frac{1}{3}(n^3 - n)$$

この方が、式をまとめて因数分解しやすいと思うんだ。

<先生>うん、まなぶ、大ヒット、いや場外ホームランだ。

やってみよう。ex の問題は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (3k^2 - 5k - 2) &= \sum_{k=1}^n (3(k-1)k - 2k - 2) \\ &= 3 \times \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) - \frac{1}{2}n(4+2n+2) \\ &= n(n^2 - n - 4) \end{aligned}$$

ずいぶん計算が楽になった。

そしてさらにまなぶの方法では、 $n$  の 3 次式の数列の和まで簡単に求められてしまう。たとえば、

$$a_k = k^3 + 2k^2 + 3k + 4 = (k-1)k(k+1) + 2k^2 + 4k + 4 = (k-1)k(k+1) + 2(k-1)k + 6k + 4$$

$$\text{だから、} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2) + 2 \cdot \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{2}n(10+6n+4)$$

となるわけだ。

<かず子>まなぶ。すごーい。

<まなぶ>でも、先生、計算はなんかラクっぽいけど、式変形が今度は面倒になっちゃいましたね。

<先生>ところが、実はそうでもないんだよ。これが意外と簡単に変形できる。

<まなぶ>本当ですか。だとしたら凄いや。

<先生>やってみようか。

$$a_k = ak^3 + bk^2 + ck + d = p(k-1)k(k+1) + q(k-1)k + r(k-1) + s$$

と変形できればいい訳だ。ところで

$$(\text{右辺}) = (k-1)\{pk(k+1) + qk + r\} + s$$

とみると、 $s$  はなにを意味するだろう。

<よしお>  $a_k$  を  $(k-1)$  で割ったときの余りです。

<先生>そうだね。では次にそのときの商を  $b_k = pk(k+1) + qk + r$  とすると、

$$b_k = k\{p(k+1) + q\} + r$$

さて、 $r$  はなんだろう。

<かず子>今度は、 $b_k$  を  $k$  で割ったときの余りです。

<先生>うん、だんだん核心に近づいてきた。

$$c_k = p(k+1) + q$$

とおこう。さあ、まなぶ。p と q はなんだい。

<まなぶ>はい。c<sub>k</sub> を k+1 で割ったときの商が p で余りが q です。

<先 生>さあ、完成だ！

<生徒達>.....

<先 生>分からないのかい。よしお、整式の割り算で商と余りを求めるには何を使う。

<よしお>はい、ホーナー法です。あっ、そうか。

<先 生>よしおは気がついたみたいだね。..... (黒板に右のように書く)

このように、商を連続する整数で割っていったときの余りが各整数の積の頭の値になるわけだ。従って、

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2) + 2 \times \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) + 6 \times \frac{1}{2}(n-1)n + 10n$$

といきなり結果がでてしまう。あとは、頑張ってこの式を計算すればいい。

<まなぶ>なんだ。やっぱり計算が必要なんだ。

<先 生>思考の結果を具象化するための最低限の計算からは逃れることはできないよ。

でも、この計算はまなぶが思っているほどは難しくはない。やってごらん。

<まなぶ>はい。

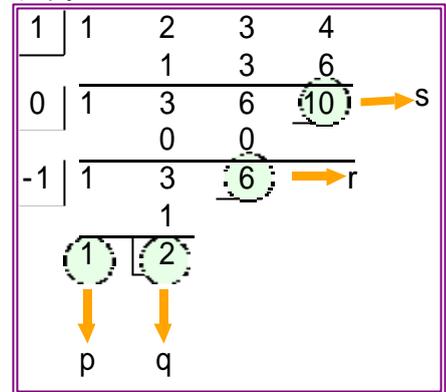
$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= \frac{1}{4}n(n^3 + 2n^2 - n - 2) + \frac{2}{3}n(n^2 - 1) + 3n(n-1) + 10n \\ &= \frac{1}{12}n(3(n^3 + 2n^2 - n - 2) + 8(n^2 - 1) + 36(n-1) + 120) \\ &= \frac{1}{12}n(3n^3 + 14n^2 + 33n + 70) \end{aligned}$$

できました！

<先 生>さあ、これでベキ和の公式が分からなくても数列の和は求められることが分かった。しかし、だからといってベキ和を知らなくてもいいというわけではないよ。解法は多面的にその切り口があったほうがいいんだ。君達がこの解法を知る前と今では、ずいぶんベキ和に対するイメージが違ってきたと思う。

いずれにしろ今回は、まなぶのものぐさの勝利といえるね。

<まなぶ>先生、ひどいや。



## あとがき

本文から次の公式が得られたことになります。

$$\sum_{k=1}^n \prod_{i=0}^p (k+i) = \frac{1}{p+2} \prod_{i=0}^{p+1} (n+i)$$

さらに、まなぶの提案のように出発点を変えると、

$$\sum_{k=1}^n \prod_{i=q}^p (k+i) = \frac{1}{p-q+2} \prod_{i=q}^{p+1} (n+i) \quad (0 \leq p)$$

となるわけです。これを利用してベキ和の公式を求めてみましょう。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n \{(k-1)k + k\} \\ &= \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(n-1) + 3\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 &= \sum_{k=1}^n \{(k-1)k(k+1) + k\} \\ &= \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)\{(n-1)(n+2) + 2\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 \end{aligned}$$

次に、 $k^4$  ですが、これはちょっと工夫が必要です。

$$k^4 = (k^4 - k^2) + k^2 = (k-1)k(k+1)k + k^2 = (k-1)k(k+1)(k+2) - 2(k-1)k(k+1) + (k-1)k(k+1) + k^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^4 &= \sum_{k=1}^n \{(k-1)k(k+1)(k+2) - 2(k-1)k(k+1) + k^2\} \\ &= \frac{1}{5}(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{2}{4}(n-1)n(n+1)(n+2) + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{10}(n-1)n(n+1)(n+2)(2n+3) - 5 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n-1)(n+2) + 5 \\ &= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1) \end{aligned}$$

1	-1	+k <sup>0</sup>	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
-1	1	1	1	1	1	1
-2	1	0	1	0	0	0

$$k^4 = (k-1)k(k+1)(k+2) - 2(k-1)k(k+1) + (k-1)k(k+1) + k^2$$

同様に、

$$k^5 = (k^5 - k^3) + k^3 = (k-1)k(k+1)k^2 + k^3 = (k-1)k(k+1)(k^2 - 4) + 4(k-1)k(k+1) + k^3 = (k-2)(k-1)k(k+1)(k+2) + 4(k-1)k(k+1) + k^3$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^5 &= \sum_{k=1}^n \{(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2) + 4(k-1)k(k+1) + k^3\} \\ &= \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) + 4 \times \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)(n+2)\{(n-2)(n+3) + 6\} + \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)(n+2)(n^2 + n) + \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2(n-1)(n+2) + 3) \\ &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1) \end{aligned}$$

さて、ところで、上述の方法は、連続する整数の積を利用して和を求めているわけですが、奇数のべき和に関しては、もっと巧く和を求めることができます。

$$k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2 = k^2\{(k+1)^2 - (k-1)^2\} = 4k^3$$

このように、連続する2つの平方数の積を作ると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \{k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 \end{aligned}$$

$$k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3 = k^3\{(k+1)^3 - (k-1)^3\} = k^3(6k^2 + 2) = 6k^5 + 2k^3$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^5 &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \{k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3\} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k^3 \\ &= \frac{1}{6} n^3(n+1)^3 - \frac{1}{12} n^2(n+1)^2 \\ &= \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) \\ k^4(k+1)^4 - (k-1)^4k^4 &= k^4\{(k+1)^4 - (k-1)^4\} = k^4(8k^3+8k) = 8k^7+8k^5 \\ \sum_{k=1}^n k^7 &= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \{k^4(k+1)^4 - (k-1)^4k^4\} - \sum_{k=1}^n k^5 \\ &= \frac{1}{8} n^4(n+1)^4 - \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) \\ &= \frac{1}{24} n^2(n+1)^2(3n^2(n+1)^2 - 2(2n^2+2n-1)) \\ &= \frac{1}{24} n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2) \\ k^5(k+1)^5 - (k-1)^5k^5 &= k^5\{(k+1)^5 - (k-1)^5\} = k^5(10k^4+20k^2+2) = 10k^9+20k^7+2k^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^9 &= \frac{1}{10} \sum_{k=1}^n \{k^5(k+1)^5 - (k-1)^5k^5\} - 2 \sum_{k=1}^n k^7 - \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n k^5 \\ &= \frac{1}{10} n^5(n+1)^5 - \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2) - \frac{1}{60} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) \\ &= \frac{1}{60} n^2(n+1)^2(6n^3(n+1)^3 - 5(3n^4+6n^3-n^2-4n+2) - (2n^2+2n-1)) \\ &= \frac{1}{60} n^2(n+1)^2(6n^6+18n^5+3n^4-24n^3+3n^2+18n-9) \end{aligned}$$

この変形により奇数のべき和に関しては、容易に求められることがわかります。

では、偶数のべき和はどうすればいいのでしょうか。エレガントな求め方をしている人がいたら教えてください。

なお、このべき和の問題は、上述の解法をみても厳格的定義、二項定理が絡んでいることが分かります。それを発展させた形としてスイス人のベルヌーイはその著書「確率論」で次のようにべき和についてまとめています。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^p &= \frac{1}{p+1} n^{p+1} + \frac{1}{2} n^p + \frac{p}{2} B_1 \cdot n^{p-1} + \frac{1}{4} p C_3 \cdot B_2 \cdot n^{p-3} + \frac{1}{6} p C_5 \cdot B_3 \cdot n^{p-5} + \dots \\ &= \frac{1}{p+1} n^{p+1} + \frac{1}{2} n^p + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k} p C_{2k-1} \cdot B_k \cdot n^{p-2k+1} \end{aligned}$$

ここで、 $p$  が偶数のときは、 $m = \frac{p}{2}$  であり  $p$  が奇数のときは、 $m = \frac{p-1}{2}$  となります。

また、係数  $B_k$  はベルヌーイ数とよばれ、逐次  $p$  に数値を代入していくとその値が得られますが、次の関係式でも知られています。

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k} p C_k \cdot B_k = 1$$

さて、これらの式から  $p$  のべき和は  $n$  に関する  $p+1$  の高次式となり、 $n^{p+1}, n^p$  の係数はそれぞれ、 $\frac{1}{p+1}, \frac{1}{2}$  であり、最後の項は  $p$  が偶数のときは 2 次、 $p$  が奇数のときは 1 次式であることが分かるでしょう。

ところで、本文中、べき和については何の共通性もない云々の説明を先生がしていますが、それは生徒にとっては背景が難しすぎるという意味で共通性、発展性が見えないというだけです。ここから生まれるベルヌーイ数は無限級数の和においても中核的な働きをしていきます。すべてはべき和から始まったといえるでしょう。

