

# 指数と対数の関係のちょっとした小手技

札幌藻岩高等学校 中村文則

*She loves him* それとも *He is loved by her*

<かず子> 先生、ちょっと恥ずかしいこと聞いていいですか。

<先生> なに！、なんか恥ずかしいことをしたのか？

<かず子> どうしたの、先生、そんなに大きな声出して。私が聞きたいのは「たいすう」のことなの。

<先生> 指数、対数のたいすう？

<かず子> そう、それ。対数って何者なんでしょうか。

<先生> ずいぶん、対数に失礼な言い方だな。対数は、 $N = a^M$  のときに  $M$  を求める式で……。

<かず子> 先生、それは分かるんです。先生が授業で説明してくれたことは理解できたんですけど、対数と指数の違いがよく分からないんです。考えれば考えるほど、指数と対数は同じことをいっているような気がしてきて。

<先生> いってることがよく分からないが。

<かず子> 教科書で確認してみたんです。指数については、

「 $a$  の累乗  $a^n$  に対して、 $n$  をこの累乗の指数という」

こう書いていました。次に対数ですが、

「 $a^p = M$  となる実数  $p$  を  $a$  を底とする  $M$  の対数という」

となっています。そうすると、 $p$  が  $M$  の対数ということは、 $M = a^p$  ですから、累乗の指数部分を対数ということでしょう。そうしたら、この  $p$  は指数にも対数にもなるってことじゃないですか。いったい対数って何者なんでしょう。

<先生> ふーん。面白い見方だね。よしおとまなぶは確か教室にいたよね。みんなでそのことを考えて見ようか。

<先生> …かず子の疑問はみんなに話したとおりだ。みんな、かず子の悩みに付き合ってくれないだろうか。まず、対数と指数の関係を考える前にちょっと次の問題をやってもらおうか。

ex) 次の文章を *he* を主語にして書き換えよ。

*She loves him*

<まなぶ> 先生、いったいどうしたの。対数の勉強するんじゃなかったんですか。

<先生> そのつもりだよ。まなぶ、いいからやっごらん。

<まなぶ> 先生、ぼくは数学より英語の方が得意ってこと知ってました。能動態を受動態に書き換えるってことでしょ。

*He is loved by her*

<先生> まあ、確かに数学よりはスラスラ答えているね。

<かず子> まなぶのこと、ちょっと見直したわ。でも先生、これが指数・対数といったどんな関係があるんですか。

<先生> 実は、指数と対数の関係もこの英文の書き換えと同じなんだよ。つまり、累乗  $a^M$  の値が  $N$  であるとき、

$$N = a^M$$

ということだけど、これを日本語に訳すと、

「 $N$  は  $a$  を  $M$  乗したものである」

文字の並びが  $N, a, M$  の順に翻訳するとうなる。では順番を逆にして  $M, a, N$  の順に読むとうなるだろう。

<よしお> 「 $M$  は  $a$  を累乗すると  $N$  となる値である」ということでしょうか。

<まなぶ> 累乗が  $M$  ってことだからちょっと表現が難しい言い方だけどそうなるだろうな。

<先生> 日本語で訳そうとすると確かに無理があるかもしれないが、この関係は元の式に対しては受身の式になっていることは分かるだろう。英語における能動態と受動態の関係は、動詞については ex) では、

*love is loved by*

となり、動詞 *love* を「be 動詞+過去分詞+前置詞」と書き換えるわけだ。これを数式でも同じように考えてやる。

すなわち「累乗する」という動詞を、

$$a^{\circ} \Rightarrow \log_a \circ$$

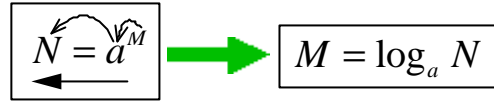
と変化させる。そして、 $M, a, N$  の順番に今度は式を読んでいくと、

$$M, a, N \Rightarrow M = \log_a N$$

この受動態の形で表現された主語  $M$  が対数なんだ。

例えば、

$$8 = 2^3 \Rightarrow 3 = \log_2 8$$



と受身にしたときの  $\log_2 8$  が対数ということだ。

<まなぶ>本当だ。ひとつの文法とみてしまえば簡単に变形できそうですね。

$$1 = a^0 \Rightarrow 0 = \log_a 1, \quad a = a^1 \Rightarrow 1 = \log_a a$$

うん。一発だ。

<先 生>ただし、右辺は対数や累乗の計算結果である値にしておかないと読み替えはできないから注意しよう。

ところでいままなぶが読み替えた式は対数計算の基本となるものだ。ついだからこの受身文法で指数法則が対数法則ではどう表現されるか考えて見ようか。

指数法則

$$1. a^p a^q = a^{p+q}$$

$$2. (a^p)^q = a^{pq}$$

$$3. (ab)^p = a^p b^p$$

対数法則

$$1. \log_a M + \log_a N = \log_a MN$$

$$2. \log_a M^p = p \log_a M$$

$$3. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ (底の変換公式)}$$

これが、指数・対数法則だったね。では指数法則1から順に受身にしていってみよう。まず、左辺で

$$M = a^p, N = a^q$$

とおく。

<よしお>これを受身に読み替えるわけですね。

$$p = \log_a M, q = \log_a N \quad \dots\dots$$

となります。

<先 生>ここで指数法則1は、 $MN = a^{p+q}$  となるからさらに読み替えてやる。

<かず子>  $p + q = \log_a MN$  となるわ。そして先ほどの読み替えた式 を代入して終わりね。

<よしお>指数法則1を読み替えたら対数法則2になるんですね。

<まなぶ>指数法則2の式は僕がやろう。

$$M = a^p \text{ とおいて受身にすると, } p = \log_a M \quad \dots\dots$$

元の式は  $M^p = a^{pq}$  だからこれをまた受身にして、

$$pq = \log_a M^q$$

を代入して終了。対数法則2になったぞ。

<先 生>最後は指数法則3だ。まなぶが2番をやってしまったから、しょうがない、この問題はかず子に考えて貰おうか。

<かず子>先生は何かまなぶにやって欲しかったみたいね。では私が代わりに。

$$x = a^p, y = b^p \text{ とおいて読み替えると、}$$

$$p = \log_a x, p = \log_b y$$

$$\text{また, } xy = (ab)^p \text{ を読み替えて, } p = \log_{ab} xy$$

みんな  $p$  の式になったわ。この式を組み合わせると.....

あれっ、おかしいできないわ。どうしてだろ?.....

そうか分かったわ!

<先 生>おっ、さすがだな。どう読み直すのかな。

<かず子>受身の仕方が分かったんじゃないくて、先生がこの問題をまなぶにさせたかった理由が分かったということです。だって、どう考えても読み替えができないような気がするんですが。

<まなぶ>先生の考えそんなことだよな。でもかず子。逆に対数法則3を受身にしたらきつとやり方が見えてくるんじゃないだろうか。

<かず子>なるほどね。じゃあ、まず右辺を読み替えて見るわ。

$x = \log_c a, y = \log_c b$  を指数に読み替えて、

$$a = c^x, b = c^y \quad \dots\dots$$

もともとの式は、

$$\log_a b = \frac{y}{x} \text{ だから、 } \frac{y}{x} = \log_a b$$

とみて読み替えて、 $b = a^{\frac{y}{x}}$

で、最後に  $\frac{y}{x}$  を代入して、 $c^y = (c^x)^{\frac{y}{x}}$

あれ、指数3にならないわ。どうしてだろう。

<よしお>この式は指数法則2ですよ。ということは、指数法則2を読み直したものが対数法則3になるってことでは、

<先生>その通り。これは先生が変換してみようか。指数法則2は

$$(c^x)^y = (c^y)^x \quad \dots\dots$$

という関係であることを意味している。そこで、

$a = c^x, b = c^y$  とおき、読み替えると、

$$x = \log_c a, y = \log_c b$$

また より、 $b^x = a^y$ 。これを読み替え、 $y = \log_a b^x = x \log_a b$

$$\log_a b = \frac{y}{x} = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

先ほどよしおが予想した通り対数法則3に変換できたね。

<かず子>そうすると、指数法則2の式は対数法則2にも3にも読み直しができるということですよ。そうしたら、対数法則2と3は同じ式ってことになりませんか。

<まなぶ>確かにそうだよな。まてよ。先生、ということは、対数法則2から3を証明できるってことですよ。

<先生>いいチームワークだね。その通りだ。でもそれを確認する前にちょっと次の式を見てもらおうか。

$$x = a^{\log_a x}$$

<まなぶ>何ですか。この指数だか対数だか煮え切らないはっきりしない式は、

<よしお>でも確かにこの式は成立するしているね。だって読み替えをすると、

$$\log_a x = \log_a x$$

という当たり前の式になってしまう。

<先生>そうだね。当たり前ということは簡単に確認できるね。

もう少し詳しく説明しようか。

$$y = \log_a x \quad \dots\dots$$

を受身にすると、

$$x = a^y \quad \dots\dots$$

ここで対数 を の指数部分に代入するんだ。すると先ほどの式が得られる。

<まなぶ>なるほど、2回続けて受動態にしたら元の形に戻ってしまったということか。

<先生>その通りだ。さあ、では、先ほどのまなぶの疑問に答えてよう。

対数法則2の関係式を

$$\log_c a^p = p \log_c a \quad \dots\dots$$

としよう。ここで、 $p = \log_a b$  とおき、 に代入すると、

$$(\text{左辺}) = \log_c a^p = \log_c a^{\log_a b} = \log_c b$$

これから、 $\log_c b = \log_a b \log_c a$  だから、

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

<まなぶ>凄い。できちゃった。

<かず子>この証明は逆に辿れそうですから対数法則2と対数法則3は同値ということになりますよね。

<まなぶ>あれっ？、そうすると指数法則3はどうなっちゃうんだ。

<かず子>必要ない？ってことでしょうか。

<よしお>対数計算は、対数法則1～3ですべて可能であり、それが指数法則1, 2に対応しているわけだから、確かに指数法則3は必要なくなりますよね。ということは、指指数法則3は、数法則1, 2より導くことができるのではないのでしょうか。

<まなぶ>それじゃ、どうしてこの式が指数法則1, 2の式と並んで法則として載ってるんだろう。

<かず子>それは指数法則を使って計算するとき、法則としてあった方が便利だからと思うわ。それが対数法則では当たり前前の計算になってしまって、法則として載せる必要がなかったのではないのかしら。

<先生>そういうことだね。だから指数法則3は対数法則を使えば簡単に証明できるということでもある。実際、

$$\begin{aligned}\log_{10}(ab)^n &= n(\log_{10} a + \log_{10} b) \\ &= n \log_{10} a + n \log_{10} b \\ &= \log_{10} a^n + \log_{10} b^n \\ &= \log_{10} a^n b^n\end{aligned}$$

これから両辺の真数を比較すると指数法則3が得られてしまうね。万事めでたし解決だ。

<まなぶ>先生、待ってよ。まだかず子の質問が解決していないんじゃないですか。

<かず子>そうよね。先生が説明してくれたのは、指数から対数への読み替えから指数法則に対応する対数法則を導き出したということですよ。でも、私の聞きたかったのは、指数と対数って同じことをいっているように思えるということです。その質問の答えはまだ聞いていないわ？

<先生>なんだ、話したつもりだったんだけどね。先ほど、 $x = a^{\log_a x}$ の証明のときに、「対数を指数部分に代入」っていったよね。これは対数と指数が同じことを意味していなければできないことだ。

<まなぶ>ずいぶんあつてなく断言しちゃうんですね。

<かず子>そうか。やっぱり私の推測は正しかったんだわ。でも先生、そうするとどうして、「指数」とか「対数」とか区別しなきゃいけないの。私には区別することで却って混乱の原因を作ってしまったように思えるわ。

<先生>そのことについても既に説明はしてあるんだよ。

もう一度、最初的话题に戻ろうか。

能動態・受動態の関係は「彼女は彼を愛している」という文で考えれば

(彼女)=(愛してる)+(彼)      (彼)=(愛されている)+(彼女)

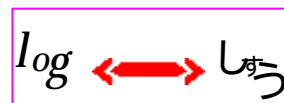
ということであり、これが指数と対数では

$$N = a^M \quad \Leftrightarrow \quad M = \log_a N$$

ということだった。このとき、対数および指数は $M$ のことであり、英文和訳では、彼のことだ。

ここで、英文では能動態の目的語の彼(him)は、受動態では主語の彼(he)に変化しているだろう。指数・対数の関係もこれと同じなんだよ。主語や目的語を何にするかによって表現が変化したと考えればいいんだ。基準を考えることは数学でもとても重要なことなんだ。

ほら、ログリズムの記号をよーくみてごらん。しすうの文字が浮かび上がってこないだろうか。



指数を対数としてみることによって指数では計算できなかったことも驚くほど簡単に求められるようになる。視点を変えて見ると新しい発見があるものなんだ。

たとえば、「She loves him」を、受動態にして、「He is loved by her.」こうみることで、何かが見えるような気がしないかな、まなぶ。

<まなぶ>指数と対数が同じことだけけど同じ使い方ではないことは分かりました。でも、その英文はいったい何の意味があるんでしょうか？

## あとがき

対数とは何者なのでしょう？

数学の歴史的背景では、もともとは三角法(三角関数)から指数とは独立したものとしてネピア(イギリス)が考案したものです。やがて、ビュルギ(スイス)、ブリッグス(イギリス)によって、指数との関係から常用対数が考え出され、天文学分野においては「天文学者の寿命を2倍に延ばした」といわれるほど、恒星間の距離測定などに絶大な威力を発揮します。

さて、指数関数と対数関数の関係はもちろん、「逆関数である関係」です。したがって、

$$a^{\log_a x} = x$$

は至極当たり前の関係であり、 $f \circ f^{-1} = I$ をいっているに過ぎません。では、指数と対数の関係はというと、対数の言葉通り、指数に対応する数が対数というイメージで捉えられ、逆関数の関係もあって、まるで指数を逆に対応させた数が対数のように思われてしまうのです。ここから、かず子の疑問が生じます。実際は、「逆の対応」とは、文を「逆に読み替えるような対応」であり、能動態に対して受動的な見方と考えると、主語が、あるいは目的語が何かによって用語の使い分けをしているに過ぎません。具体的には、底 $a$ に対して、その $n$ 乗を求める場合の $n$ が指数であり、 $n$ 乗の値が与えられているとき、その $n$ を求める場合が対数であると解釈できます。

では、何故、こういった混乱が起こるかということ、それは指数関数という命名が適切ではないからだだと思います。

一般に、陽関数は、その関数の特性を反映する形でグラフとしての名前が授けられなす。2次式から二次関数(放物線)、三角比から三角関数(正弦、余弦、正接関数)というように、定義域の任意の値に対応する値域の値を座標平面上で点としてプロットして生成される図形の概形が関数の俗名を決定します。では指数関数 $y = a^x$ はというと、指数は底 $a$ の指数部分 $x$

をいっているわけで、関数の形  $y$  を指しているわけではありません。指数関数という言い方はヘンに思うのです。本来なら  $a$  の累乗として表現される関数ですから、累乗(べき乗)関数と命名すべきではないでしょうか。そうであれば、累乗の逆は対数という言い方はまだ許せるかも知れません。ところが、べき乗(累乗)関数は、一般には  $y = x^a$  である関数のことを指しています。ここでまた振り出しに戻ってしまい、結局は行き着く結論は対数とは何者なのでしょうではなく、

指数とは何者なのでしょう？  
ということになるのです。

実際、高校における指数の指導には誤魔化しが存在します。例えば指数の定義は、有理数までは、 $n$  乗根を考えることにより、証明できますが、指数が実数の場合は「成り立つことを認める」ことで無理やり終わらせてしまいます。「証明よりも使い慣れることを優先」させ、指数法則の証明はなんとなく肩透かしを食らった感は否めません。指数法則は指数を拡張していてもそれが成立するように指数の性質を合わせ、あるいは制限し、指数の定義していくわけですが。このような理論体系の組み方を「形式不変の原理」といいますが、指数分野ほどあからさまに法則を構築する単元はありません。

指数が無理数  $r$  であるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$  なる無限有理数列  $\{r_n\}$  に対して、 $a^r = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$  として、指数を定義しますが、確かに高校生に対しては形式不変という印籠を出して納得させてしまい、利用・応用に重点を置いたほうがいいわけです。

しかし、そういった曖昧さの上に、すでに与えられている指数法則を利用して対数法則を導こうとすると、指数法則 3 のような疑問が生じてしまいます。指数法則は、自然数の指数に対しては

$$a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n) \\ a^{n-m} & (m < n) \end{cases}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

といったものもありますが、指数法則が整数に拡張されると、指数法則 1, 3 にこれらの法則は含まれてしまいます。さらに指数を実数に拡張すると、指数法則 3 は、対数法則への読み替えの過程で、指数法則 1, 2 に含まれてしまうことが予想されます。そのことを本文中では指数法則 1・2 の受動的表現である対数法則 1・2 を利用して間接的に証明していますが、指数法則 1・2 からダイレクトに証明を考えることも可能です。

### 3. $(ab)^p = a^p b^p$ の証明

適当な実数  $q$  を考えると、 $b = a^{\frac{q}{p}}$  とおけます。

$$\text{(左辺)} = \left(a \cdot a^{\frac{q}{p}}\right)^p = \left(a^{1+\frac{q}{p}}\right)^p = \left(a^{\frac{p+q}{p}}\right)^p = a^{p+q} = a^p \cdot a^q = a^p \cdot \left(a^{\frac{q}{p}}\right)^p = a^p \cdot b^p = \text{(右辺)}$$

指数より便利な対数という道具を手に入れてから、私たちはいつの間にか指数法則 3 は使わなくなってしまっているのです。ところで、指数には対数以外にもう一つ別の読み替えである文法表現があります。

例えば

$$8 = 2^3 \text{ は、 } 3 = \log_2 8$$

と対数表現されますが、底 2 を主語として、

$$2 = \sqrt[3]{8}$$

と表すこともできます。 $m$  が 2 以上の自然数の場合、次の 3 つはすべて  $m, n, a$  の同じ関係を表していることになります。

$$n = a^m, m = \log_a n, a = \sqrt[m]{n}$$

特に、3 つめの累乗根はべき乗に関係する式ですが、この式の使い方も指数・対数に間違って微妙な関係にあり、形式不変の原理から有理指数への拡張に合わせて都合のいいように定義されたような印象を指数・対数単元では受けてしまいます。さらに、拡張が成立した段階では「捨て去られてしまう」傾向がありますが、独立した分野として理解する必要性を強く感じています。そのうち小手技でそのことに触れることができればと思います。

最後に、本文の終わりで、先生がまなぶに投げかけた言葉を彼はどう受け止めたのでしょうか。

今回の小手技でも伏線として、かず子とまなぶの微妙な関係を織り交ぜています。

天然ボケなのか、鈍感なのか、照れなのか、どう解釈していいかわからないまなぶの姿勢に対して、先生が、ちょっかいを出してきました。

指数法則は底=1 の場合も成立しますが、もちろん対数法則では底 = 1 ですので、この場合に対しての同値性となります。

文中終わりに「log」を「しすう」を読んでいます。これは何かの本に書いてあったような気がします。出展元が採せませんでした。参考文献として載せることができず、申し訳ありません。