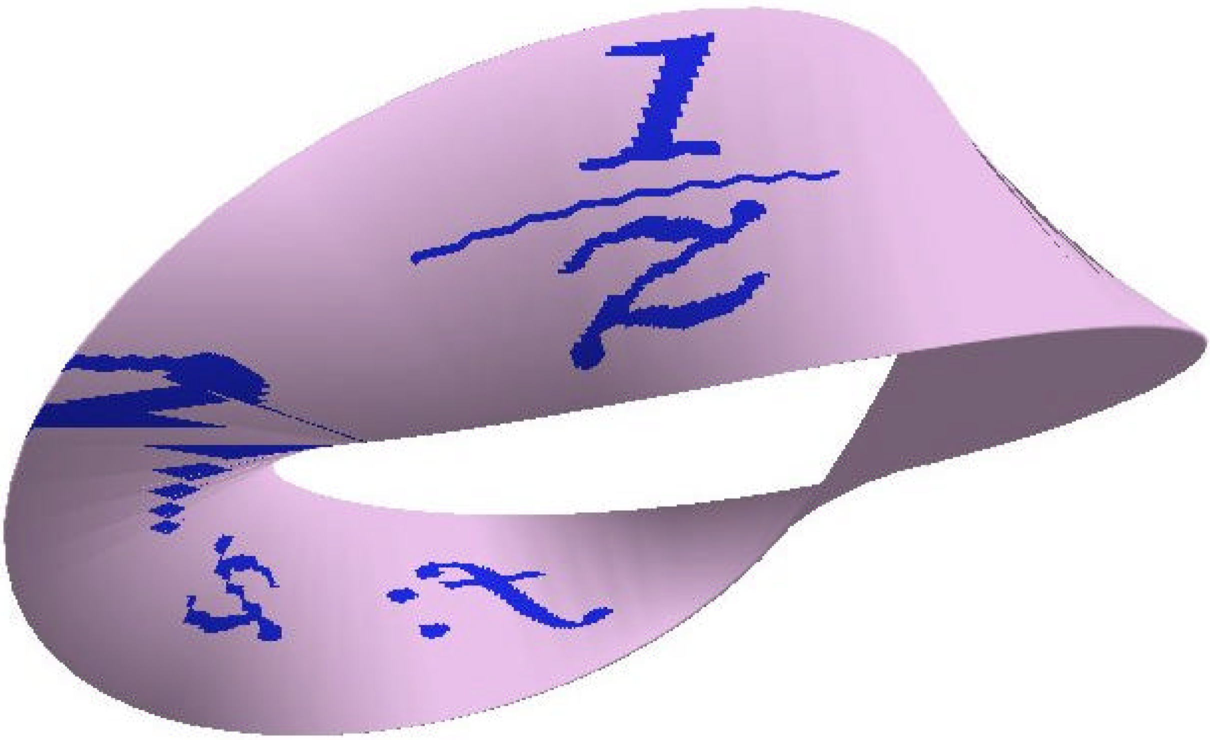
メービウスのかだち



北海道札幌新川高等学校
中村文則

Complex operator による図形変換

反転と方ベキの定理による一次変換のアプローチ

札幌新川高等学校　中村文則

Chap.1 作用素としてのアプローチ

複素数平面上における図形問題の解法には４つのアプローチが考えられる。

① z=x+yi とみて、ガウス平面での論点をデカルト平面に移す。
② z=(x,y)をベクトルとみなす。
③ z と $\bar{z}$ (共役複素数)を使って Rez,Imz を表す。
④ z=re$^{i\theta}$を図形変換の作用素(operater)と考える。

それぞれの解法に利点があるが、行列の一次変換の代替として登場した経緯、そして視覚的な面でのインパクトを考慮すれば、作用素としての働きに注目するのが指導としてはもっとも効果的ではないかと思う。

ex) |z|=1 のとき、w=(1+i)z の軌跡を求めよ。

解) |w|=|1+i||z|=$\sqrt{2}$

よって、中心が原点である半径$\sqrt{2}$ の円

一般的な解答である。1+i という複素数を葬り去ることにより w の軌跡を導いたわけである。しかし、z→ w という図形変換の構図がみえてこなく、解法としては巧(うま)いが美味(うま)くはない。これを

$$1+i=\sqrt{2}e^{\frac{p}{4}i}$$

とみると、複素数 1+i は、図形 z の大きさを$\sqrt{2}$ 倍拡大し、原点の周りに図形を 45°回転させる働きをもつ作用素である。

単位円がググっと拡大し、グルッと回転する。心象風景が活き活きとしてくる。
この作用素としての複素数を観点に図形変換を以下考察してみる。

Chap.2 一次分数関数(一次変換)

複素数平面 Z 上の点 z に対して、

$$w=\frac{az+b}{gz+d} \qquad (ad-bg\neq 0)$$

である点 w は、新たな複素数平面 W を用意し、
f : Z → W
なる写像(多くは Z=W となるが)を考えるたときの像と考えることができる。
この f による像 w を一次分数関数あるいは(複素)一次変換という。この一次変換は係数行列

$$T=\begin{pmatrix} a & b \\ g & d \end{pmatrix}$$

が正則であるときに存在する。ここで、

$$f(z)=\frac{a}{g}+\frac{-a\frac{d}{g}+b}{gz+d}=\frac{a}{b}+\frac{bg-ad}{g^2z+gd}$$

なる分解が可能であることから、一次変換は次の３つの変換の合成とみることができる。

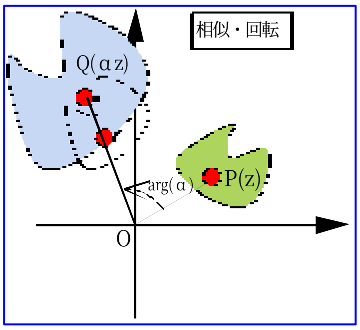
① f_1 : z → αz
② f_2 : z → z+β
③ f_3 : z → $\frac{1}{z}$

この３つの変換が、作用素として図形に与える性質について以下調べてみよう。

○相似(伸縮)と回転変換

$\boxed{f_1 : z \ \to}$ αz

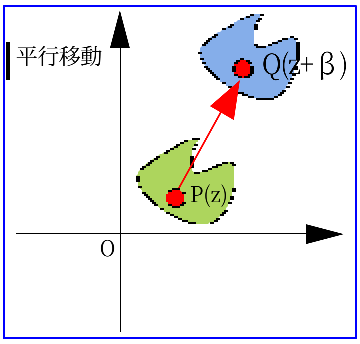
$z = re^{i\theta}, \alpha = r_1 e^{i\theta_1}$ とすると、$\alpha z = r_1 re^{i(\theta+\theta_1)}$ であるから、複素数αは、点 P(z)を原点の回りにθ_1回転させ、さらに原点からの距離をr_1倍する作用素である。
したがって、f_1は原点を中心とする伸縮、回転を表す一次変換である。



○平行移動変換

$\boxed{f_2 : z \ \to \ z+}$β

z=x+yi, β=u+vi $(x, y, u, v \in R)$ とすると、z+β=(x+u)+(y+v)i より、w は z を実軸方向に u、虚軸方向に v だけ値を増減した点である。
すなわち、f_2は平行移動(ベクトル量とみて)を表す一次変換である。



ex) P(z)が点 1+i を中心とする半径 1 の円周上を動くとき、
w=2iz+3-2i
を満たす点 Q(w)の軌跡を求めよ。

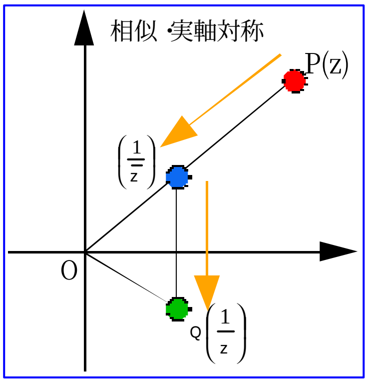
解) 2i の大きさは 2,偏角は 90°より、2iz は、中心-2+2i 半径 2 の円である。
この円を 3-2i 平行移動すると、
w は、中心 1 半径 2 の円周上の点である。

○相似・実軸対称変換

$\boxed{f_3 : z \ \to \ \frac{1}{z}}$

$w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ であるから、f_3は点 P(z)に対して、OP を$\frac{1}{|z|}$倍して、さらに実軸に関して対称移動した変換である。

すなわち、$z \to \frac{1}{\bar{z}} \to \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \frac{1}{z}$ となる。



以上、一次変換を表す3つの変換についてみてきたが、そのそれぞれはさらに2つの変換に分解できることが分かるだろう。
①f_1 は回転+伸縮
②f_2 は実軸方向移動+虚軸方向移動
③f_3 は伸縮+実軸対処移動

である。この中で、③の伸縮変換は他の変換と大きく異なっている(もちろん①の伸縮変換とも)。それは他の変換が、点 P(z)に他の複素作用素を施したものであるのに対し、点③はそれ自身が作用素であるためにそれぞれの点の伸縮率が独立していることである。それがこの変換の図的イメージの障害となる。
次にこの伸縮変換を初等幾何の「反転」の考え方から分析してみよう。

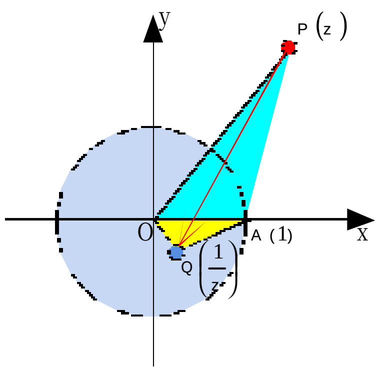
Chap3.反転(鏡像)

$f_3 : z \to \frac{1}{z}$ である変換を図示すると右図のようになる。

実際、単位円周上の点 A(1)を利用して、⊿OPA と相似であるように⊿OAQ を作ると、
OP : OA=OA : OQ
∴ OP・OQ=OA^2=1

$OQ = \frac{1}{OP} = \frac{1}{|z|}$

また、arg(z)=θのとき、arg(w)=-θであるから、この点 Q(w)が一次変換f_3の点 P(z)の像を表していることがわかる。



しかし、この図では、伸縮+実軸対称という変換 f_3 のモーションがみえてこない。さらに、作図も困難である。
そこで、伸縮を表す変換である

$$g\ :\ z \to \frac{1}{z}$$

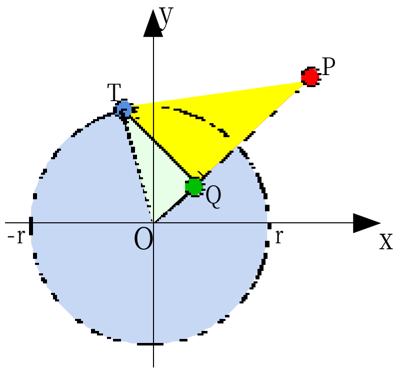
の変換のイメージを図形的に解釈してみよう。

原点 O を中心とする半径 r の円を C とする。円 C の円外の点 P からこの円に引いた接線の接点を T とし、点 T から線分 OP に引いた垂線の足を Q とすると、

$$OP\cdot OQ=r^2$$

である。

証明)



⊿PTO∽△PHQ であるから、

PO:OT=OT:OQ

$OP\cdot OQ=OT^2=r^2$

このとき、初等幾何では、点 P と点 Q は円 C に関して互いに反転(反形あるいは対称)であるという。

また、点Qを中心に考えれば、上述の逆操作から点 P が求められるが、この点 P もまた点 Q の反転となる。

すなわち、反転とは、円の内部の点を外部に、外部の点を内部に移す(反転させる)変換である。この反転された点をもとの点の鏡像という。

ここで r=1 のとき、OP・OQ=1　すなわち、

$$OQ=\frac{1}{OP}$$

以上より、変換 g は、中心原点、半径 1 の円(単位円)に関する点 P(z)の反転変換である。

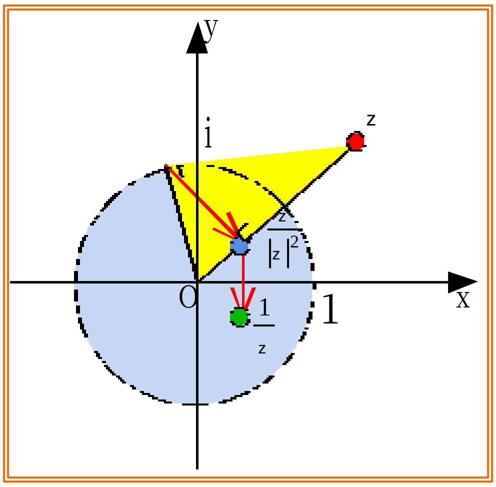
Chap.4 共役反転変換

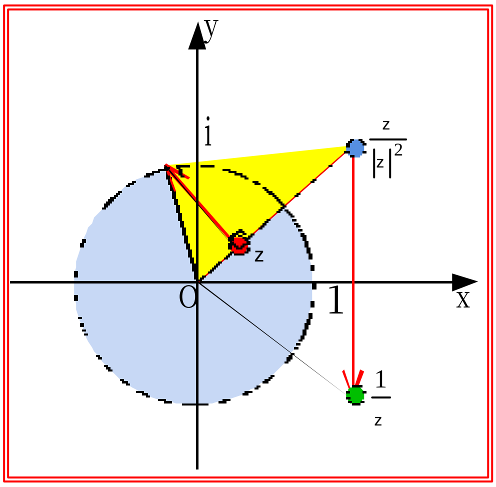
$$f_3\ :\ z \to \frac{1}{z}$$

$w=\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}$ とみると、f_3 は z を単位円に関して反転させたのち、実軸対称移動する変換である。

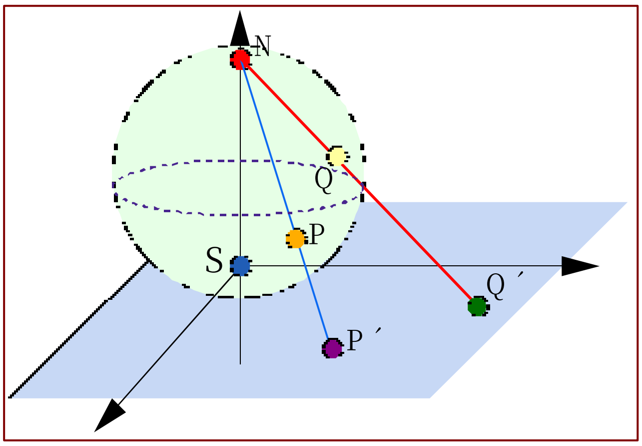
点 P(z)が、単位円の内部にあると、$|z|<1$ であるから $\left|\frac{1}{z}\right|>1$ となり単位円の外部に伸び、P が単位円の外部にあれば、$|z|>1$ より内部に縮む。また、$|z|=1$ すなわち単位円周上の点であれば、実軸対称である単位円周上の点に移される。さらに、点±1は、変換 f_3 の不動点である。

この変換を共役反転変換と呼ぶことにしよう。





Chap.5 リーマン球面との位相同形



f:z→ $\frac{1}{z}$ なる一次変換は、複素数平面C上の点をリーマン球面上の点に対応させることにより、z=0 を含めて1対1対応が可能となる。複素数平面Cの原点に右図のように直径を SN とする接球面をのせる。このとき、N 極を通る直線が球面とおよび複素数平面と交わる点をそれぞれ P,P´とすると P と P´は1対1対応となる。

P → N

とするとき、P は複素数平面上の無限遠点∞に対応する。こうすることにより、リーマン球面と複素数平面は同相となる。

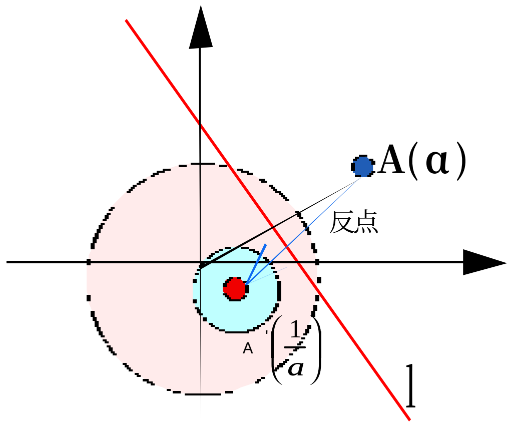
すなわち、z=0 のとき、$w=\frac{1}{z}$ により、w=∞とみるわけである。

Chap.6 直線の共役反転変換

複素数平面上の原点を通る直線は、z=te$^{i\theta}$ (t∈R)と表される。
したがって、

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{te^{iq}}=\frac{1}{t}e^{-iq}$$

による像もまた原点を通る直線である。



次に、原点を通らない直線 l の像を求めてみよう。
l 上の点 P(z)は、l に関して原点 O と対称な点を A(α)とすると、

$$|z-\alpha|=|z|$$

を満たす(線分 OA の垂直二等分線が l である)。

$w=\frac{1}{z}$ のとき、$z=\frac{1}{w}$ より、

$$\left|\frac{1}{w}-\alpha\right|=\left|\frac{1}{w}\right|$$

∴ $|1-\alpha w|=1$

$$|a|\left|w-\frac{1}{a}\right|=1$$

$$\left|w-\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{|a|}$$

∴w は点$\left(\frac{1}{a}\right)$を中心とする原点を通る円周上の点である。

以上より次の結論を得る。

f:z → $\frac{1}{z}$ なる共役反転変換により、

○原点を通る直線は実軸に対称な直線に移される。
○原点を通らない直線は、原点に関して直線と対称な点をαとすると、f(α)を中心とする原点を通る円に移される。

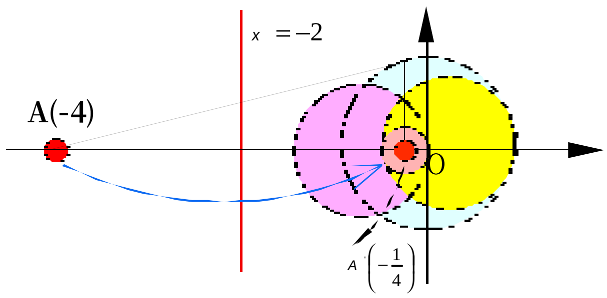
リーマン球面における無限遠点の定義より、原点 O の反転は∞であり、∞の反転は原点である。これから原点を通らない直線上の無限遠点(二点)は原点に変換される。また、原点からの距離が最小である直線上の点(原点から直線に下ろした垂線の足 H)は、最大距離点に移される。すなわち点 OA の中点 $H\left(\frac{a}{2}\right)$の像を $H'\left(\frac{2}{a}\right)$とすると、OH´は像である円の直径を表すことになる。

ex) 複素数 z に対して、$w=\dfrac{z+1}{z-2}$ とおく。

複素数平面上で、複素数 z を表す点が虚軸上を動くとき、複素数 w を表す点はどんな図形を描くか。
(長崎総合科学大)

解) $w=1+\dfrac{3}{z-2}$ より、直線 x=-2 に対して、原点との対称点 A(-4)の反転を考えると、次のようになる。

z 虚軸 ⇒ z-2 直線 x=-2 ⇒ $\dfrac{1}{z-2}$ 中心$\left(-\dfrac{1}{4}\right)$で半径$\dfrac{1}{4}$の円 ⇒ $\dfrac{3}{z-2}$ 中心$\left(-\dfrac{3}{4}\right)$で半径$\dfrac{3}{4}$の円 ⇒ $1+\dfrac{3}{z-2}$ 中心$\left(\dfrac{1}{4}\right)$で半径$\dfrac{3}{4}$の円



Chap.7 円の共役反転変換

中心 O、半径 1 である円(単位円)の円周上の点を z_1 とすると、複素数平面上の中心 C(β),半径|α|の円は

$$z=\alpha z_1+\beta \quad (a, b \in c)$$

と表される。　この円 P(z)の $f: z \to \dfrac{1}{z}$ による変換像 Q(w)を求めてみよう。

$w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{az_1+b}$ より、$w(\alpha z_1+\beta)=1$

$w\alpha z_1+w\beta=1$

$\alpha w z_1=1-w\beta$

$|\alpha||w||z_1|=|w\beta-1|$

$|z_1|=1$ より、$|a||w|=|b|\left|w-\dfrac{1}{b}\right|$ ………(*)

(*)は、|α|=|β|のとき、原点 O と中心 C の反点 C´を結ぶ線分 OC´の垂直二等分線を表す。このとき、z は原点を通る円である。
|α|≠|β|のときは、線分 OC´を|β|:|α|の比に内分および外分する 2 点を直径の両端とする円を表す。

(1) 原点を通る円は直線に移される。 (2) 原点を通らない円は円に移される。

では z の軌跡が円に移されるとき、円の中心と半径を次に求める。

(*)の両辺を平方して、

$$a\bar{a}\cdot w\bar{w}=(bw-1)(\overline{bw}-1)$$

$$(|a|^2-|b|^2)w\bar{w}+bw+\overline{bw}=1$$

$$\{(|b|^2-|a|^2)\bar{w}-b\}\left(w-\frac{\bar{b}}{|b|^2-|a|^2}\right)=-1+\frac{|b|^2}{|b|^2-|a|^2}$$

$$\left(w-\frac{\bar{b}}{|b|^2-|a|^2}\right)\left(\bar{w}-\frac{b}{|b|^2-|a|^2}\right)=\left(\frac{|a|}{|b|^2-|a|^2}\right)^2$$

$$\left|w-\frac{\bar{b}}{|b|^2-|a|^2}\right|=\left|\frac{|a|}{|b|^2-|a|^2}\right|$$

よって、中心$\left(\dfrac{\bar{b}}{|b|^2-|a|^2}\right)$で半径$\dfrac{|a|}{\left||b|^2-|a|^2\right|}$の円となる。

> f：z → $\dfrac{1}{z}$　なる共役反転変換により、中心 C(β),半径|α|の円は
>
> ○D＝0 のとき、円は直線に移される。
> ○D≠0 のとき、円は円に移される。
> 　　　　ただし、D=|β|²-|α|²　である。

Chap.8 円々対応

Chap6～7 で、円または直線は共役反転変換により、円または直線に移されることが分かった。これは、直線を半径無限大の円と広義にみなせば、円は円に移されるということである。例えば原点を通る円は、原点は∞に対応することから直線という円に移されるわけである。

一般化した式でこのことを示してみよう。

複素数平面上の異なる２点 A(α),B(β)に対して、

AP=BP

を満たす点 P(z)は、線分 AB の垂直二等分線を表す。これから直線の方程式は、

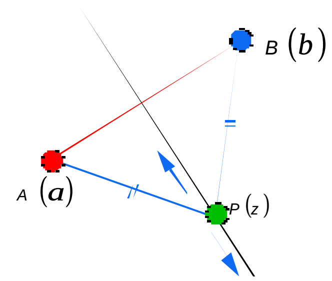
|z-α|=|z-β|

∴　$(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=(z-b)(\bar{z}-\bar{b})$

これを整理して、λ=α-β,D=|α|²-|β|²　(λ　C,　D　R) とおくと、

$$\bar{l}z+l\bar{z}+D=0$$

直線は、二定点から等距離にある点の軌跡



また、点 A(α)を中心とする半径 r の円周上の点 P(z)は、

|z-α|=r

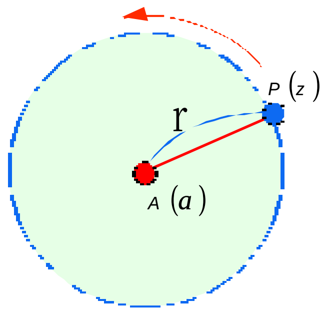
これより、$(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=r^2$

∴　$z\bar{z}-a\bar{z}-\bar{a}z+(|a|^2-r^2)=0$

λ=-α, D=|α|²-r²　(λ　C,　D　R)とおくと、

$$z\bar{z}+\bar{l}z+l\bar{z}+D=0$$

円は、定点から一定距離にある点の軌跡



以上より、直線または円の方程式は、

$$Cz\bar{z}+\bar{l}z+l\bar{z}+D=0$$

で与えられることがわかる。

このとき、f：z → $\dfrac{1}{z}$　なる変換の像 w は、

$z=\dfrac{1}{w}$ であるから代入して、

$$C\frac{1}{w}\cdot\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}+\bar{l}\cdot\frac{1}{w}+l\cdot\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}+D=0$$

$$Dw\bar{w}+lw+\bar{l}\bar{w}+C=0$$

D=0 のとき直線を表し、D≠0 のとき円を表す。よって複素数平面上の円または直線は、円または直線に移されることが分かる。

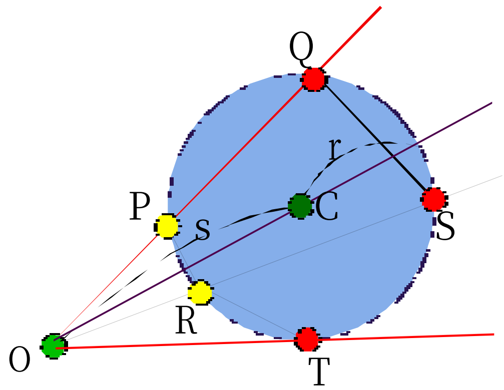
以上より、一次変換

f：z → $\dfrac{az+b}{gz+d}$

により、直線を広義の円と考えると、円は円に移される。

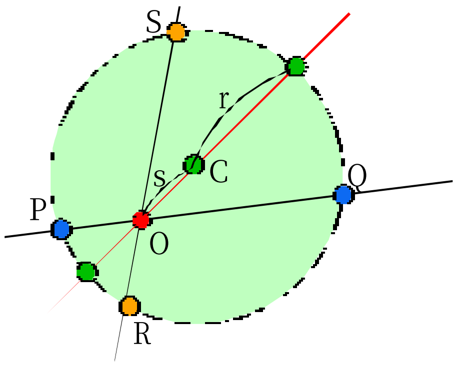
この対応を円々対応という。

《方ベキの定理》



平面上の点 O から定円に引いた2本の線分が、円とそれぞれ2点で交わるとき、その交点をそれぞれ P,Q,R,S とすれば、次式が成立する。 OP・OQ=OR・OS

証明)
∠OPR=∠OSQ より、△OPR∽△OSQ
よって、OP：OR=OS：OQ
これから、OP・OQ=OR・OS を得る。

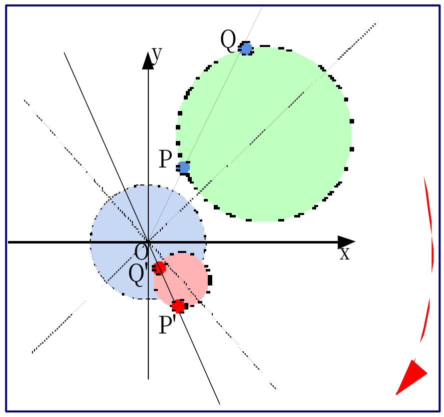


円の中心 C に対し、OC=s、円の半径 r とすると、
OP・OQ=OR・OS $=(s-r)(s+r)=s^2-r^2$
また、線分の一方が円に接するとき、
OP・OQ=OR・OS $= s^2-r^2=OT^2$
であり、その積は常に一定値となる。この値をベキという。
なお、この方ベキの定理における線分は有向線分である。

$$\vec{OP}\cdot\vec{OQ}=\vec{OR}\cdot\vec{OS}$$

と考えると、点 O が円の内部にある場合においても方ベキの定理は成立する。
OP・OQ=OR・OS $=(s-r)(s+r)= s^2- r^2<0$
すなわち、点 O が円の外部の場合は、OP・OQ>0,円の内部の場合は、OP・OQ<0 となるわけである。
　このベキの値が共役反転変換にどのように関わってくるかみてみよう。

円周上の弦 PQ またはその延長が原点を通るとする。 $f:z\to\frac{1}{z}$ において、円が円に移され、P′=f(P) ,Q′=f(Q) ならば、弦 P′Q′の長さは、弦 PQ の長さに比例する。



中心 A(α)、半径 r の円周上の2点を $P(z_1)$,$Q(z_2)$とし、それぞれの f による像を $P'(z_1')$,$Q'(z_2')$ とする。このとき明らかに直線は $P'Q'$ は原点を通る。また、

$$P'Q'=\left|z_2'-z_1'\right|=\left|\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_1}\right|=\left|\frac{z_2-z_1}{z_2\cdot z_1}\right|=\frac{PQ}{\left|OP\cdot OQ\right|}$$

ここで、方べきの定理より、OP・OQ=λ(べき)とすると、

$$P'Q'=\frac{1}{|l|}PQ$$

よって、円が円に移されるとき、対応する原点を通る弦の長さは、比例することが分かる。
これから最大弦である円の直径はまた直径に移されるということがわかる(ただし、直径の両端が直径の両端に移されるというだけであり、線分が移されるということではない)。

$f:z\to\frac{1}{z}$ により、円 C が円 C′に移されるとき、 線分またはその延長上に原点がある円 C の直径は円 C′の直径に移される。

なお、直径だけの変換であれば次のように考えることも可能である。
円 C 上の直径を $A(z_1)$, $B(z_2)$とし、A,B 以外の円周上の点を $P(z)$とする。変換 f の像をそれぞれ、$A'(w_1)$,$B'(w_2)$,$P'(w)$とすれば、

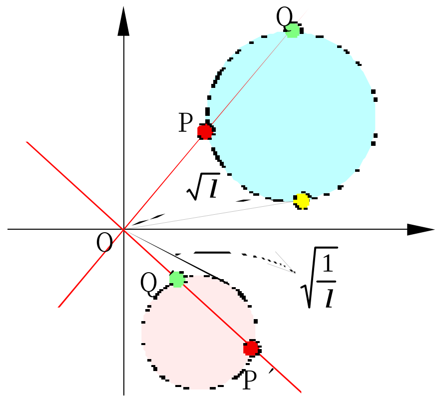
$$\frac{w-w_1}{w-w_2}=\frac{f(w)-f(w_1)}{f(w)-f(w_2)}=\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z}-\frac{1}{z_2}}=\frac{z_2}{z_1}\cdot\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

ここで、∠APB=90°であるから $\frac{z-z_1}{z-z_2}$ は純虚数。また、三点 O,A,B が一直線上にあるとき、$\frac{z_2}{z_1}$ は実数であるから、$\frac{w-w_1}{w-w_2}$ は純虚

数である。よって、∠A´P´B´= 90° となり、A´B´は直径となる。

> f：z　→　$\frac{1}{z}$ により、円Cが円C´に移されるとする。
>
> 円Cの原点Oに対するベキがλであるとき、円C´のOに対するベキは $\frac{1}{l}$ である。

証明



原点を通る直線と円Cとの交点を P,Q とし、その鏡像をそれぞれ P´,Q´とすると、

$OP\cdot OP´=1,\quad OQ\cdot OQ´=1$　　……(*)

また、円Cにおいて方べキの定理より、

$OP\cdot OQ=\lambda$ (ベキ)

(*)の二式を辺々かけると

$OP\cdot OP´\cdot OQ\cdot OQ´=1$

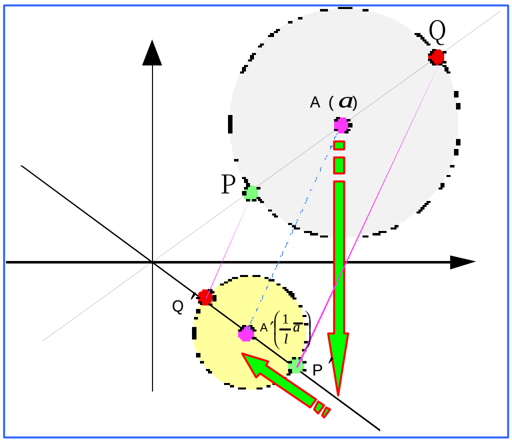
$$\therefore\quad OP´\cdot OQ´=\frac{1}{OP\cdot OQ}=\frac{1}{l}$$

原点を通る直線は、原点を通る直線に移されるから原点を通る円Cの弦は、原点を通る円C´の弦に移される。

よって、O,P´,Q´は一直線上にあるから $\frac{1}{l}$ がベキの値である。

以上のことより次の結果を得る。

> f：z　→　$\frac{1}{z}$ により、中心 A(α),半径 r の円Cが円C`に移されるとき、
>
> ①円c´の半径は $\frac{1}{|l|}\cdot r$
>
> ②円c´の中心は A´$\left(\frac{1}{l}\cdot\bar{a}\right)$
>
> である。ただし、λは、円Cの原点に対するベキの値である。



①は明らかである。

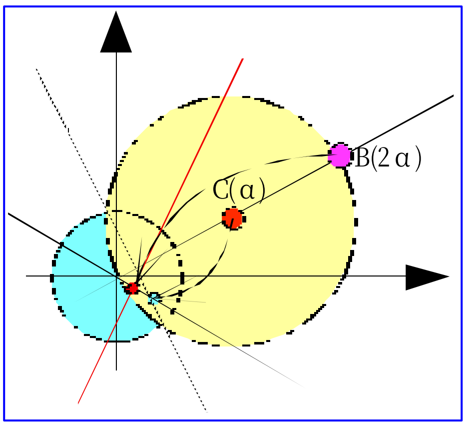
また、原点と円Cの中心Aを通る直線は、fによる実軸に関して対称な直線に変換される。よってその上にある直径も同様に変換される。このことより、円C´の中心もまたその直線上にあることになる。よって、点Aの実軸対称点と原点を結ぶ直線上に中心はある。そして、ベキの値が $\frac{1}{l}$ であることより②が得られる

なお、円の中心は円の中心に移るわけではない。実際

$$f(a)=\frac{1}{a}=\frac{1}{|a|^2}\bar{a}$$　であるが、

$l=|a|^2$ となることはない。

> 円Cが原点Oを通るとき、
>
> f:z　→　$\frac{1}{z}$ によって、円周上の点P(z)は、原点Oと円Cの中心を結ぶ直径のO以外の端点Bの反転B´を通りOB´に垂直な直線に変換される。



原点は、反転により無限遠点に対応する。

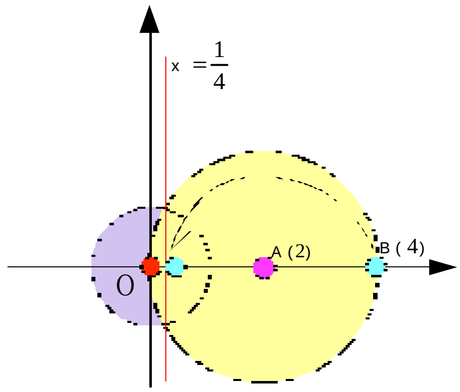
また、原点からもっとも離れた点はもっとも距離の短い点となる。

よって図の直径の端点Bが円周上の原点からの最大距離の点であるから、この反転B´が最短点である。そして求める図形は直線であるから、点B´は原点から求める直線に下ろした垂線の足ということになる。簡単にいえば、円の中心Cの反転をC´とすると、OC´の垂直に等分線である。

なお、原点を通る円が単位円と交わるとき、その交点の反転は、実軸対称点になるからその鏡像である２点を通る直線が像である。

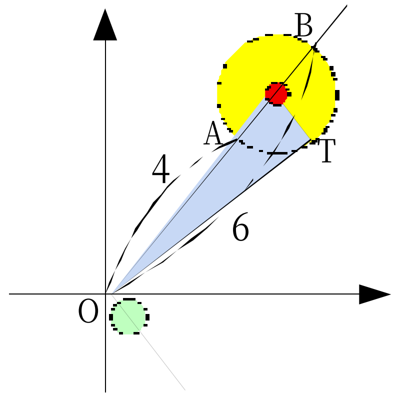
円Ｃが原点Ｏを通り単位円と交わるとき、
$f : z \ \rightarrow\ \frac{1}{z}$ によって、円周上の点P(z)は、円Ｃと単位円との２交点を通る直線を実軸対称移動した直線に変換される。

ex) 点P(z)が次の円周上の点であるとき、
$$f : z \rightarrow \frac{1}{z}$$
で移される点Q(w)の軌跡を求めよ。
(1) 半径２で中心A(2)である円C
(2) 半径１で中心3+4iである円
(3) 半径２で中心1+iである円



(1)の解)
円Ｃは原点を通るからｆにより直線に移される。
原点からもっとも離れた円周上の点は、B(4)である。

その鏡像は $B\left(\frac{1}{4}\right)$ であるから、OB´に垂直な直線 $x = \frac{1}{4}$ に移される。



(2)の解)
円Ｃは原点を通らないからｆにより円に移される。
円 C の中心と原点 O を通る直線と円 C との交点を A,B とすると、原点と円 C の中心 C(3+4i)との距離は OC=5 であるから、λ=OA・OB=4×6=24 （あるいは、$OT^2=OC^2-CT^2=25-1=24$）

よって求める円の中心は $\frac{1}{24}(3-4i)$、また半径は、$\frac{1}{24}$ である。

(３)の解)
原点Ｏは円Ｃの内部にあるから円に変換される。

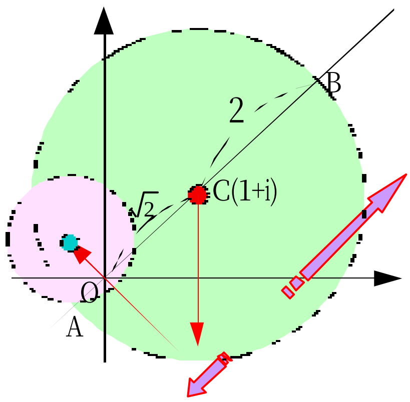
原点Ｏと円の中心Ｃとの距離は、$\sqrt{2}$ であるから、

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = -(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) = -2$$

よって、円Ｃの像円Ｃ´の中心は、

$$-\frac{1}{2}\cdot(1-i) = -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$$

また、半径は　$2\times\frac{1}{2}=1$　である。



Remark)
(1)～(3)の通常の解答は次のようになる。
それぞれの円を式で表現すると、
(1) |z-2|=2　(2) |z-(3+4i)|=1　(3) |z-(1+i)|=2
ここで、$z = \frac{1}{w}$ を代入して各式を整理すると、

(1) $\left|w-\frac{1}{2}\right| = |w|$ より、二点(0), $\left(\frac{1}{2}\right)$ から等距離にある軌跡。すなわち直線 $x = \frac{1}{4}$

(2) $|(3+4i)w-1| = |w|$　より　$5\left|w-\frac{3-4i}{25}\right| = |w|$

よって、二点(0), $\left(\frac{3-4i}{25}\right)$ を結ぶ線分を５：１の比に内分、外分する点を直径の両端とする円。

(3) $|(1+i)w-1| = 2$　$\left|w-\frac{1-i}{2}\right| = \sqrt{2}|w|$

よって、二点(0), $\left(\frac{1-i}{2}\right)$ を結ぶ線分を $1:\sqrt{2}$ の比に内分、外分する点を直径の両端とする円。

Chap.10 円々対応の実際

一次変換

$$f : z \to \frac{az+b}{gz+d}$$

は平行移動、相似、共役反転の合成変換であり、一次分数関数を分解して順次視覚的に変換をしていけばいいことが分かった。実際に幾つかの例題でこのことを確認する。

《演　習》

Ex) z は複素数平面で、点 1+i を中心とする半径 1 の円周上を動くとき、

$$w = \frac{1-iz}{1+iz}$$

で表される点 w の軌跡を求めよ。　　(小樽商科大学)

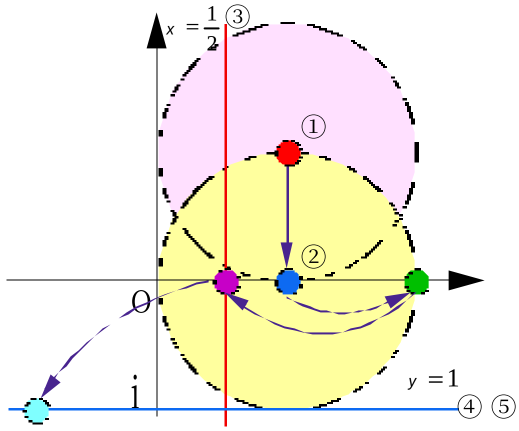
解)

$w = \frac{-z-i}{z-i} = -1 - \frac{2i}{z-i}$ である。

ここで、z-i は中心 1 半径 1 の円より原点を通る。

従って、 $\frac{1}{z-i}$ は直線に変換される。原点と円 z-i との最大距離点は 2 より直線の方程式は $x = \frac{1}{2}$

z 中心(1+i) 半径1の円 → z-i 中心(1)半径1の円 → $\frac{1}{z-i}$ 直線 $x = \frac{1}{2}$ → $\frac{-2i}{z-i}$ 直線 y=-1 → $-1-\frac{2i}{z-i}$ 直線 y=-1



ex) |z|=1 のとき、$w = \frac{z+i}{z+2}$ の軌跡を求めよ。

まず、一般的な解法から試みよう。

解1)

$w = \frac{z+i}{z+2}$ より wz+2w=z+i

z(w-1)=-2w+i　両辺の大きさをとって、

|z(w-1)|=|-2w+i|　　∴　|z||w-1|=|2w-i|

|z|=1 より　|w-1|=|2w-i|　両辺を平方して

$|w-1|^2=|2w-i|^2$

$(w-1)(\overline{w}-1) = (2w-i)(2\overline{w}+i)$

$3w\overline{w} + (2i+1)w + (1-2i)\overline{w} = 0$

$(3w+1-2i)\left(\overline{w}+\frac{1+2i}{3}\right) = \frac{(1-2i)(1+2i)}{3}$　　　$\left(w+\frac{1-2i}{3}\right)\overline{\left(w+\frac{1-2i}{3}\right)} = \frac{5}{9}$

$\left|w+\frac{1-2i}{3}\right|^2 = \frac{5}{9}$　∴　$\left|w+\frac{1-2i}{3}\right| = \frac{\sqrt{5}}{3}$

よって、中心 $\frac{-1+2i}{3}$ で半径 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ の円。

解2)

$$\left|w-1\right|=2\left|w-\frac{i}{2}\right|$$

A(1), $B\left(\frac{i}{2}\right)$とすると、(*)を満たす点P(w)の軌跡は、AP=2BPより、AP：BP=2：1

よって、点Pは線分ABを2：1の比に内分する点をQ外分する点Rとするとき、線分QRを直径の両端とする円(アポロニュースの円)である。

$Q\left(\frac{1+i}{3}\right)$, $R\left(-1+i\right)$であるから、

円の中心はQRの中点$\left(\frac{-1+2i}{3}\right)$であり、QR=$\frac{2\sqrt{5}}{3}$より半径は$\frac{\sqrt{5}}{3}$である。

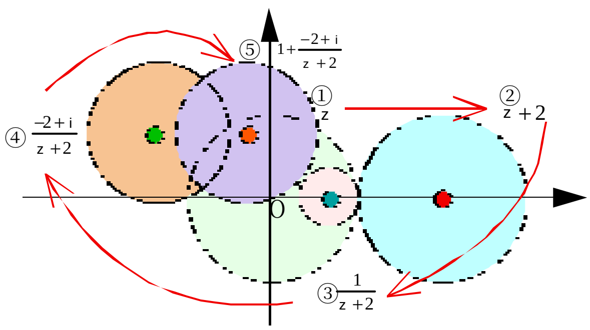
解3)

最後に、ベキを利用した解答を示そう。

$$w=1+\frac{-2+i}{z+2}$$ より、

z+2は、中心2で半径1の円だから原点は通らない。
したがって円は円に移される。
ベキの値は、λ=1×3=3

z 中心0 半径1の円 → z+2 中心2 半径1の円 → $\frac{1}{z+2}$ 中心$\frac{2}{3}$ 半径$\frac{1}{3}$ → $\frac{-2+i}{z+2}$ 中心$\frac{-4+2i}{3}$ 半径$\frac{\sqrt{5}}{3}$ → $1+\frac{-2+i}{z+2}$ 中心$\frac{-1+2i}{3}$ 半径$\frac{\sqrt{5}}{3}$



Chap.11 円の内部変換

円々対応は、円を円に移す(広義の円を含めて)ということであったが、では円の内部は一次変換によってどう移されるのだろうか。相似変換、回転変換、平行移動では円の内部は内部に保存されるから、共役反転変換のうち、

$$f: z\to\frac{1}{z}$$

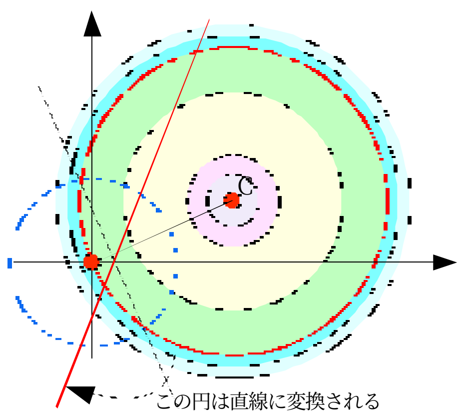
である反転について調べればよいことになる。

Chap.9では、「弦は弦に移されるが、線分という意味ではない」とか、「円の中心は円の中心には移されない」というような曖昧な表現をしてきたが、このことからも必ずしも内部から内部に移されるわけではないことが予想されよう。実際、変換fは非線形である。

$\frac{m}{z_1}+\frac{n}{z_2}=\frac{nz_1+mz_2}{z_1z_2}$ から明らかである。よって、線分は線分に移されないことになる。円が円に移されないことは前述した。

例えば、原点が円の内部にある場合について考えてみよう。

中心C(α)、半径rの円はfにより円に移されるが、中心Cの同心円を考えて半径を縮めていくと、r=|α|のとき円は原点を通る。このとき、円はfにより直線に変換される。このとき変換像は有界でなくなるため、円の内部に移れないことになってしまう。



すなわちベキの値 $\lambda=|\alpha|^2-r^2$ が円の内部変換な関わりをもっていることになる。

λの値を変化させて調べてみよう。

λ>0のとき、原点は円の外部にある。原点から円に引いた接線の接点をTとおくと、

$\lambda=OT^2$であり、|α|>OTとなる。ここで、r→0とすると、OT→|α|

よって、$\frac{1}{l}$ の値は減少するから f により円の内部に円が作られ埋め尽くされることになる。

λ<0 のとき、|α|<r であるから原点は円の内部にある。

r→|α|とすると、λ → 0 であるから変換像である円の半径は $\frac{r}{|l|}\to\infty$ となり、直線に近似していく。更に r の値を r>|α|となるように増加させると、円の半径は縮小し、点 $c\left(\frac{1}{a}\right)$ に収束する。すなわち、円Cの内部は円C´の外部に変換されることが予想される。

以下、そのことを示す。

半径 r で中心 A(α)の円を C とし、f：z → w により変換された円を C´とする。円 C の周および内部を表す式は、

|z-α|≦r

である。$z=\frac{1}{w}$ を代入して整理すると |αw-1|≦r|w|

両辺を平方して $(aw-1)(\bar{a}\cdot\bar{w}-1)\leqq r^2 w\bar{w}$

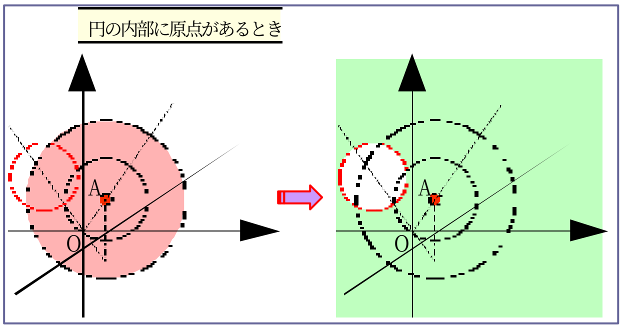
$(|a|^2-r^2)w\bar{w}-\bar{a}\bar{w}-aw+1\leqq r^2 w\bar{w}$

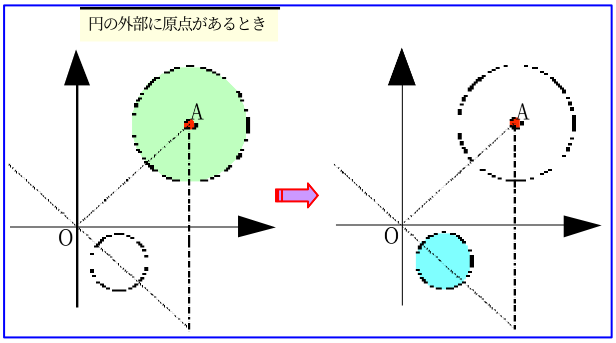
$(|a|^2-r^2)\left|w-\frac{\bar{a}}{|a|^2-r^2}\right|^2\leqq\frac{r^2}{|a|^2-r^2}$

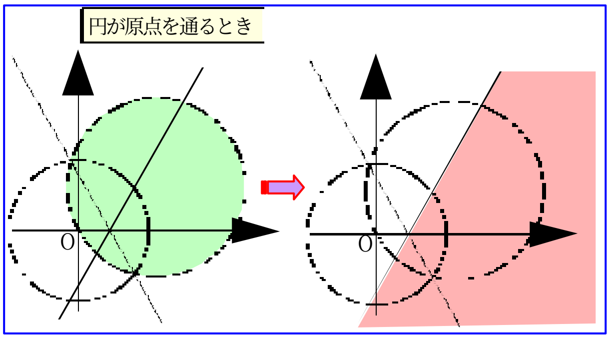
ここで、$l=|a|^2-r^2$ とおくと、$l\left|w-\frac{\bar{a}}{l}\right|^2\leqq\frac{r^2}{l}$ すなわち、

λ>0 のとき、$\left|w-\frac{\bar{a}}{l}\right|\leqq\frac{r}{|l|}$ より円C´の周および内部に移る。

λ<0 のとき、$\left|w-\frac{\bar{a}}{l}\right|\geqq\frac{r}{|l|}$ より円C´の周および外部に移る。







なお、r=|α|のときは、円Cは直線に移されるが、周および内部はどうなるだろうか。

|z-α|≦|α| に $z=\frac{1}{w}$ を代入して整理すると、

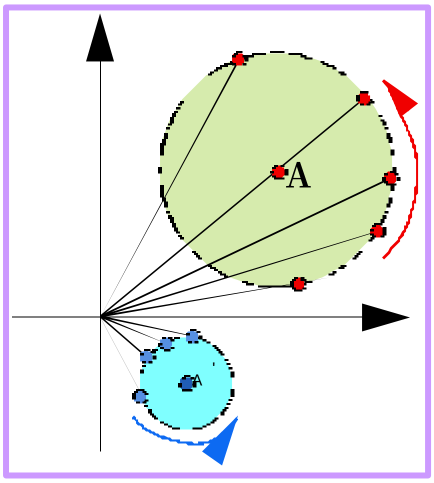
$\left|w-\frac{1}{a}\right|\leqq|w|$

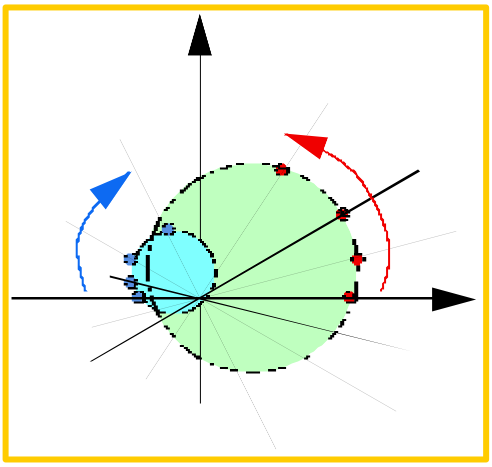
これは、点A(α)の反転をA´とするとき、A´P´≦OP´を満たす点であるから、OA´の垂直二等分 l の直線上および l を境界線とする領域で原点を含まない側を表している。

ところで、円C上の点を円の中心に対して反時計回りに回転させ、一回りしたところで円の半径を僅かだけ縮め同様に回転させていくとすると、反転の像にどのように点を移されていくだろうか。

これは共役反転の意味を考えると分かる。円の外部に原点があるとき、ベキ>0 であるから、点は実軸に対称に移動したあと、正の値で伸縮される。これに対して原点が円の内部にあるとき、ベキ<0 であるから、実軸対称のあと、負の伸縮、すなわち原点に対して対称な象限に点は移される。

以上のことより、原点が円の外部にあるとき、同様に反時計回りに内側に渦を描く。原点が円の内部にあるとき、時計回りに外側に渦が無限の彼方に広がっていくのである。





<あとがき>

ガウスが複素数平面の世界に遊び、オイラーがｉ(imaginary number)に夢を馳せてから 200 年もの悠久のときが流れた。教育の現場では、20 年前に追放されたその複素数平面が再び陽の目を見、そしていままた葬られようとしている。

指導要領改定の目玉として、行列のピンチヒッターで登板した複素数平面は、じゃじゃ馬よろしく御し難く、あまたの騎手を鮮やかに振り落として最後には思いっきりあかんべーをして去っていこうとしている。多分、永久に。

何がそうさせてしまったのだろう。行列も複素数も図形変換の最高のパートナーであるべきであった。行列は数学教育という社交界に颯爽とデビューし、退際も惜しまれつつプロ野球選手なら「永久に不滅です」とでもいいたそうな気配であった。いまでも教科書や受験の中でその解法がファインプレーとして語り継がれている。だが、それに比べて複素数平面は、解の公式の中に辛うじて痕跡を残すのみで、多分記憶の中から忘れ去られていくのだろう。その扱い難かった解法と共に。

確かに複素数問題は、「地味」、「ダサい」、「とろい」、イントネーションの欠如したコギャルの「～っていうか」なる意味不明の反意語なのか何なのか知らない飾り言葉の嘲笑の真っ只中にいたような気がする。複素数本来の主張は無視され、デカルトだのベクトルだのに母屋をどかどかと土足で踏み躙られてしまった。背景も分からず x+yi とおけばいいんだよ。こんな馬鹿にされた分野もなかったかもしれない。そして次期指導要領では完全に姿を消すことになってしまったが、もう世の中はまだ４年後のことなのに誰もが次の流行分析に躍起になり、複素数平面なんてまだあったの。それでも複素数は解法に意地張っているもんだから余計哀愁を誘ってしまう。

複素数はそりゃ行列のように最新ファッションじゃない。レトロ趣味と言われてしまえばそれまでである。でも古くて新しい学問でもある。複素数の概念が、電気や力といった物理学分野の現代化に果たした功績は大きい。

$w = z + \frac{a^2}{z}$ (a>o) の軌跡についての問題は意味も分からずよく出題されるが、実はきちっとした名前がある。Joucowski 変換。流体力学では知らぬ者はいない。かっこいいじゃないか。でも教育数学では、ｚが単位円であるときの軌跡は楕円であることの計算練習にしか評価されていない。一見するとチョーダサいのに実はエレガントだったりもするのだ。そして、その典型的なものが一次分数関数だったような気がする。

一次分数関数、別名一次変換。行列で表現できるからまた複素数は出鼻を挫かれてしまったが、この変換の中で唯一複素数が譲らなかったものがある。それが鏡像変換である。幾何でいう反転だが、そうみれば結局幾何の分野で解決できるのじゃないかということになるがけっしてそうではない。むしろ幾何の星の数ほどある定理の大半は複素数平面で解決できてしまう。反転もその一つに過ぎない。ところがこの反転の概念が残念ながら高校現場では生かせなかった。

$f：z \to \frac{1}{z}$

この変換が他の変換に比べて厄介過ぎるのだ。懐深い複素数の牙城の前に誰もが屈し、唾を吐き捨て他の道を選択してしまった。なぜこの道は険しかったか。それは無限への旅であるからである。

このレポートの表題は「メービウスのわだち」である。メービウス(M bius)とはもちろんあの「メービウスの帯」の考案者のことである。リボンの両端を掴んで一ひねり(二ひねりでもいいが)してつなぎ合わせると摩訶不思議な世界が生まれる。一面を辿っていくといつの間にか出発点に戻ってしまう。メービウスは裏表のない世界なのだ。この興味をそそる奇妙さを人々はほって置くはずもなく、妙な宗教の象徴に祭り上げられたり、アフガンバンドと名を変え、奇術の世界で脚光を浴びたりしている。

で、実はこのメービウスの名を冠しているのが、 $f：z \to \frac{1}{z}$ なのである。この変換をメービウス変換という。

メービウスはその帯の影に隠れてしまい、優れた数学者であったということは意外と知られていない。大体、メービウスが活躍した 19 世紀初頭は怪物が多すぎた。ガロア、アーベル、ブール、コーシー、ロバチェフスキー、ヤコービ、ハミルトン、ケーリー、ワイエルストラス、なんでこんなにいっぱいいるんだ。そうそう、あのガウスおじいさんもまだ健在であった。射影幾何学の完成者、トポロジーへのパイオニアとまでいわれた彼も、こんな怪物たちの前では確かに影は薄かったかもしれない。でも彼の功績はメービウス幾何学として確実に完成していくのである。

さて、メービウス変換に話を戻そう。この変換、すなわち反転の面白いことは、無限がゼロに繋がるということである。

OP・OQ=1

わずかこれだけの式の中に無限の定義がある。「猿の惑星」、「青い鳥」(メーテルリンク)のように、旅の果てが出発点だったりするのはよくある現実。そんな現実がまさにメービウスの輪なのである。だがそれは高校数学が $\frac{1}{o}$ という値に、不可侵の呪文をかけ、禁断の言葉としてしまつたことにより踏み込めなくなってしまった世界でもあるのだ。架空と現実。そのバランスもまたメービウスは弄んでいた。そう考えると確かにメービウス変換は恣意的ではあるが我々の侵入を拒んでいたような気もする。いみじくもメービウスはこういった。

数学においても音楽や絵画や詩の場合と同じことである。だれでも思慮分別があり勉強が好きならば、法律家や医者や科学者にはなることができるし、それぞれの分野で成功をおさめることができる。しかし数学者にはだれでもなれるものではない。ふつう程度の思慮分別や勉強好きでは、この場合、何の意味もないのである。

なんて強烈な言葉であろう。我々は彼によって新世界への扉を開くことを拒絶されてしまった。チョー軽い何の意味もない高校生にとっては何の意味もない言葉かもしれないが、「無限に遊ぶ」楽しみが高校数学からネバーエンディングストーリーのファンタージェンの世界のように淡く実体が薄れてきているのであるとしたら、我々が数学を学ぶ意味がそのうち本当に何の意味もなくなってしまうのかもしれない。

後年、ライプニッツ天文台の天文台長の職に就いた彼は、満天の夜の星の瞬きに、どんな夢をみていたのだろうか。

※このメービウスの帯が織成す世界を稲雲高校の大河内先生は、ヒルベルト空間なんかと比較してファンタジー空間と命名しました。このメービウス変換もコンピュータグラフィックで再現するとさぞや美しい模様が描けるかと思います。それは多分、藻岩高校と稲北高校のどちらかのＭ．Ｓ先生がやってくれると信じています。