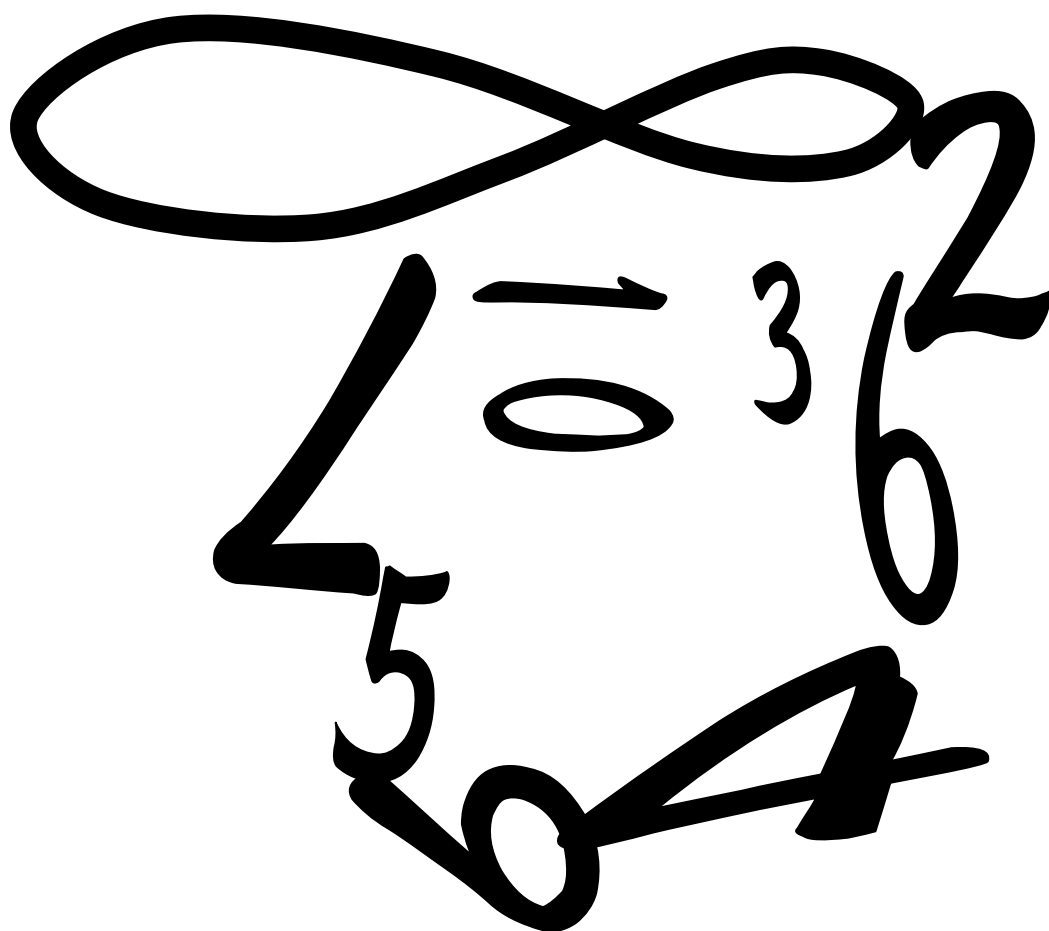


不思議数との出会いの覚書3

～新たな出会いのエピソード



リーゼント頭の時代に流されない

個性的な数の神様

「不思議数との出会いの覚書」～50 篇の素敵な出会いのエピソード～のあとがきで 50 篇といういい区切りと数との出会いがめっきり減ったことを理由に書くのを辞めていたのが、いつのまにか再開し気がついたら 32 篇(前回と合わせて 82 篇)になっていました。扱った数をあらためて確認してみると 1 桁の数は、

- 1…コラッツ予想
- 3…3 目並べ
- 4…終着を表す数
- 5…鳩の巣原理
- 6…輪廻転生の数
- 7…カレンダーマジック・さいころの目の和
- 8…永遠と無限を表す数
- 9…魔法数

数 2 以外はいつのまにかみな登場しています(どれもアブノーマルな紹介で)。

気付かずに同じ数を 2 度扱ってしまったこともあります。ネタが底をついてしまつて $128\sqrt{e980}$ とか、 e^π といったとんでもない数まで登場してきて、何でもありの状態。どんどんマニアックになり、そして強引に数に性質を押し付けるようになっているようで、数に足搔いていることを自覚している状況です。

多分、50 篇、すなわち全部合わせて 100 篇は書くことになるだろうと思っています。残り 18 篇ですが、100 篇を書き終えたらまたずるずると…、なんてことはないでしょう。

これだけ数たちを冒瀆し続けてきたのですから、百物語のようにすべて語り終わったらその後はきっと……。

$\sqrt{2}$ は直角を挟む 2 辺の長さが 1 である直角三角形の斜辺の長さですが、分数に表すことができない数です。

$\sqrt{2}$ の存在は、三平方の定理を証明したピュタゴラス学派は知っていたと言われています。しかし学派は万物の根元は数とみなし、自然界の創造物は数を表す粒子で構成されていると考えたため、分数に表すことのできない $\sqrt{2}$ は神の失敗数とし、忌み嫌いました。その存在は、「アロゴン:alogon～秘密にしておけ」と口外することを固く禁じ、漏らしたものは暗殺されたということです。でも $\sqrt{2}$ は連分数展開すると、

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

無限では分数に表現できることになりますがその場所での佇まいを人は目にすることはできません。だから不可侵の無限に触れようとすると、ときどき大きなしっぺ返しを受けることがあります。

例えば、方程式

$$x = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}} \quad (x > 0)$$

の解は何でしょう。両辺を平方すると、

$$x^2 = x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} = x + x = 2x$$

$x > 0$ ですから、 $x = 2$ となります。すなわち、

$$2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

であるわけです。同じように、

$$x^{++\dots} = 2 \dots \textcircled{1}$$

の正の解は、(左辺) = $x^2 = 2$ より、 $x = \sqrt{2}$ が得られます。それでは、

$$x^{++\dots} = 4 \dots \textcircled{2}$$

はどうなるでしょう。(左辺) $= x^4 = 4$ より、 $x^2 = 2$ ですから、 $x = \sqrt{2}$ 。ということは、

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}}} \dots\dots (*)$$

の値は、2なのか、それとも4なのか。不思議なことが起こっています。調べてみましょう。いま(*)の値をxとすると、

$$x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}} = (\sqrt{2})^x$$

となります。直線 $y = x$ と指数関数 $y = (\sqrt{2})^x$ の交点は、 $(2, 2)$, $(4, 4)$ のみで、この 2 数以外に解はなさそうですが(*)の値は相変わらず不明のままです。そこでこの直線と曲線を違う視点からみてみましょう。

$f(x) = (\sqrt{2})^x$ とします。 $x = \sqrt{2}$ の $f(x)$ の値は $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 。

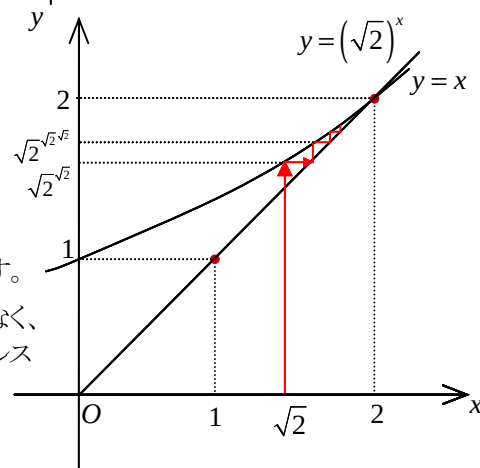
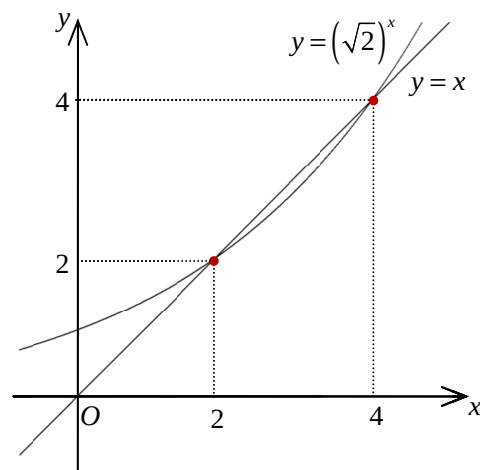
次に、この値に対する $f(x)$ の値は

$$f\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$$

この操作を続けていくと(*)が得られます。

右のグラフをみてください。 $x = \sqrt{2}$ と $y = f(x)$ の交点を通り、 x 軸に平行な直線と直線 $y = x$ との交点を求めます。この交点を通り y 軸に平行な直線と $y = f(x)$ との交点……と続けていくと、点は無限の領域に少しずつ近づき、点(2, 2)に吸い込まれていくのが分かります。すなわち、(*)の値は2になるのです。

神の失敗数の烙印を押された $\sqrt{2}$ はけっして人が安易に評価できるような数ではなく、むしろ、神の領域に踏み込み無限の迷路へと誘われた人間を待ち受けるミノタウルの如き数なのです。



1 から 1000 までの数で、各位の数の 3 乗の和を求めます。その値が元の数に一致しているものは何個あるでしょうか。
もちろん、最初に現れる数は 1 です。では次の数は何だと思えますか(タイトルから予想できますね)。

この計算には 1 桁の数の 3 乗の値が関わってくるので右表にまとめました。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^3	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729
n^3 の一位	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

この表から 1 桁の数では該当するものは 1 しかないことが分かります。2 桁の数では、数 5~9 の 3 乗は 3 桁の値になってしまいますので、0~4 で作られる 2 桁の数、 $4 \times 5 = 20$ (個) が候補になります。これを逐一調べてみると該当する数は見つかりません。

次に 100~199 までの 3 桁の数をみてみましょう。3 桁の数 N は、 $N = 100 + 10a + b$ ($0 \leq a, b \leq 9$) で与えられ、各位の数の 3 乗の和は、 $1 + a^3 + b^3$ になります。これが N に一致すればいいわけです。まず、一位が一致する場合について表を用いて調べてみましょう。 $100 + 10a + b \equiv 1 + a^3 + b^3 \pmod{10}$ より、 $b \equiv 1 + a^3 + b^3$ となります。

ここで、6~9 は、3 乗が 200 以上のため各位の数として用いることはできません。すなわち、 $0 \leq a, b \leq 5$ に限定されます。

$b = 0, 1, 4, 5$ のとき、3 乗の値の一位の数は元の数と等くなります。すなわち $b^3 \equiv b \pmod{10}$ より、

$$b \equiv 1 + a^3 + b \quad a^3 + 1 \equiv 0 \pmod{10} \quad \text{すなわち} \quad a^3 \equiv 9 \pmod{10}$$

$0 \leq a \leq 5$ より、これを満たす a はありません。

$b = 2, 3$ のとき、3 乗の値の一位の数は $10 - b$ になります。すなわち、 $b^3 \equiv 10 - b \pmod{10}$ より、

$$b \equiv 1 + a^3 + 10 - b \quad a^3 \equiv 2b - 11 \equiv 2b - 1 \pmod{10}$$

$b = 2$ のとき $a^3 \equiv 3$ よりこれを満たす a はありません。

$b = 3$ のとき $a^3 \equiv 5$ 、すなわち $a = 5$ となります。

以上のことより、3 乗の和で一位の数が元の数と一致するのは 153 しかないということになります。この数の各位の数の 3 乗の和が 153 に一致しなければ 199 までの数の中には条件を満たすものはないのです。恐る恐る……

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$$

一致しました!!!!!!。

一見単純そうな「3 乗の和が一致」という条件は、実は結構厳しい条件なのです。

実際、1~1000 までの中で、この条件を満たすものは、

$$1, 153, 370, 371, 407$$

この 5 つの数しかなく、3 桁で最初に登場するのが 153 なのです。

なお、条件を

「 n 桁の自然数で、その各位の n 乗の和が元の数に等しい数」と変えてみるとどうなるでしょう。

$n = 1$ のときは、1 から 9 の自然数は全て満たしています。

$n = 2$ のときは、このような数は存在しません。

$n = 3$ のときは、先ほどの 153, 370, 371, 407 の 4 つの数が該当することになります。

$n = 4$ のときは、1634, 8208, 9474

10 から 9999 までに 7 個しかない極めて稀な数であり、これらの数はナルシスト数と命名されています。このナルシスト数は有限個しかありません(他の有名数は稀に出現してもその個数は無限個であることが多い)。それは、1 桁の数の n 乗が非常に大きな数になることから予想できます。 n 桁の最大数である $10^n - 1$ に対して各位の n 乗の和は $n \times 9^n$ ですが、十分大きな n については、この値は n 桁の最小数 10^{n-1} より小さくなってしまいます。例えば $n = 100$ のときは、

$$10^{100-1} - 100 \times 9^{100} = 100 \times (10^{97} - 9^{100}) > 0 \quad (\log_{10} 9^{100} = 200 \log_{10} 3 \doteq 200 \times 0.4771 = 95.42)$$

となります。ナルシスト数の全個数は 87 個であることが証明されています。このように数全体からみれば本当に極めて稀に出現する数であり、 n 乗の和が自分に戻るわけですから、自分を自分で愛でたくなる気持ちは分かりますね。

そしてその中でも 153 にはさらに凄いい性質があるのです。

「3 で割り切れる数に対して、各位の数の 3 乗の和を求め、さらにこの操作を続けると必ず 153 になる」というものです。例えば

$$18 \rightarrow 1^3 + 8^3 = 513 \rightarrow 5^3 + 1^3 + 3^3 = 153 \text{ (2回の操作)}$$

$$132 \rightarrow 1^3 + 3^3 + 2^3 = 36 \rightarrow 3^3 + 6^3 = 243 \rightarrow 2^3 + 4^3 + 3^3 = 99$$

$$\rightarrow 9^3 + 9^3 = 1458 \rightarrow 1^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 = 702 \rightarrow 7^3 + 0^3 + 2^3 = 351 \rightarrow 3^3 + 5^3 + 1^3 = 153 \text{ (7回の操作)}$$

100000 以下の数を調べてみると、最大 14 回の操作で 153 に収束することが分かります。すなわち、すべての 3 の倍数は、ほんの僅かな操作回数で 153 にひれ伏してしまうです。

153 は鼻高々のとびっきりのナルシストというわけです。

25

………オーダーを均質化した数

1 から 10 までの自然数を、5 個ずつの 2 つのグループに分けます。

次に、1 段目に A グループの数字を小さい順に左から右へ並べ、

2 段目に、B グループの数字を大きい順に左から右へ並べます。

そして、3 段目には、左から順に各列の 1 段目と 2 段目にある 2 数を大きい数から小さい数を引いた値を入れていきます。

右がその一例です。

さてここで、3 段目にある数の和を求めてください。右表では、

$$8 + 5 + 1 + 3 + 8 = 25$$

あなたの計算結果はどうでしょう。25 になっていませんか。

不思議ですね。そしてこの 25 の正体はいったい何なのでしょう。

もう少し表を注意してみてください。各列の大きい数から小さい数を引くわけですが、その「大きい方の数」の枠に色を塗ってください。その結果は、A 段または B 段がすべて塗られているか、そうでない場合は、B 段では左から順に塗られ、ある列からは残りすべては A 段の枠が塗られていませんか。そして塗られている枠の数は、

6, 7, 8, 9, 10

ですね。この辺に秘密がありそうです。

まず、色の塗られ方ですが、A 段は左から小さい数の順に並んでいて、B 段は左から大きい数の順に並んでいるから左に進むうちにどこかで A 段のものと B 段の数の大きさが逆転することは分かりますね。

ここで、B の左端か A の右端のどちらかは 10 になりますが、B の左端を 10 としましょう(A の右端が 10 のときは、A 段と B 段を交換すればいいのです)。B 段は右へ進むと数は小さくなり、B 段の右端の数は 1 以上 6 以下の数に制限されます(B 段で、値の減り方の最小であるものは $10 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ となる場合だからです)。同様に A 段の右端の数は 5 以上 9 以下となります。

A 段の右端が 5 のときは、

(A 段) $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ (B 段) $10 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6$

となり、B 段すべての枠に色が塗られます。A 段の右端が 5 以外の数 6, 7, 8, 9 のときは、B 段の右端の数は A 段の右端の数より小さくなり A 段の右端の枠に色が塗られます。では、それはどんな数になるでしょう。

簡単です。B 段の数が左から $10 \rightarrow 8$ と変化すると、A 段の端は B 段で飛ばされた 9 が配置されてその枠が塗られます。

B 段の数の変化をみると、例えば $10 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow \dots$ の順に小さくなれば、A 段の右端からは B 段で飛ばされた数 9, 7, 6, … の順に配置されるのです($\dots \leftarrow 6 \leftarrow 7 \leftarrow 9$)。これから、A 段は右端から色が塗られ、B 段は左端から色が塗られ、どこかの列で色が塗られる段の境目ができることになります。ところが列の数は 5 列ですから、A 段または B 段から選ばれる大きい方の数は、6, 7, 8, 9, 10 になってしまうのです。

したがって、例えば A 段には 6 以上の数、B 段には 5 以下の数を配置しても条件は保たれ、各段の大きさの順も適当でいいことになります。そこで右表のように並べてみると、各列の 2 数の差はすべて 5 になります。よって、その和は、

$$5 \times 5 = 25$$

となるのです。

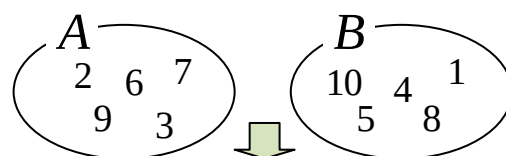
この性質は数を 1 から $2n$ にしても成立します。1 ~ n と $(n+1)$ ~ $2n$ の 2 つのグループに分けたとき、求める和は、

(2 つのグループの最小値の差) $\times$ (グループの個数) で求められ、

$$(n+1-1) \times n = n^2$$

になります。

このことを用いるといろいろな問題や面白いパズルが作れそうですね。



A	2	3	6	7	9
B	10	8	5	4	1
差	8	5	1	3	8

A	2	3	6	7	9
B	10	8	5	4	1
差	8	5	1	3	8

A	6	7	8	9	10
B	1	2	3	4	5
差	5	5	5	5	5

Ex1) 次の数を同じ個数の 2 つのグループに分け、1 段目は左から小さい順、2 段目は左から大きい順に並べて 3 段目に各列の大きい数から小さい数を引いた値を入れます。3 段目の数の和を求めなさい。

(1) 1 から 50 までの数

$1 \sim 25$ と $26 \sim 50$ の 2 つのグループに分けると、 $(26-1) \times 25 = 625$

(2) 12 個の奇数 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23

$1, 3, 5, 7, 9, 11$ と $13, 15, 17, 19, 21, 23$ のグループに分けると、 $(13-1) \times 6 = 72$

Ex2) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 の 10 個の偶数を 5 個ずつの 2 つのグループに分け、1 段目は左から大きい順、2 段目は左から小さい順に並べます。3 段目は、各列の大きい数を小さい数で割った数を記入します。3 段目の数の積を求めなさい。

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 252 \quad (\text{数が偶数のため必ず約分ができて規則性が見えなくなるのがポイントです})$$

バラバラなグループに分けられていても大小の比較をすることで、自然にオーダーができ、でもそのオーダーも最終的には均質化されてしまうわけで、なんとなくこの性質は自然界の有り様によく似ていますね。

お金を8%の複利で預けると、元金が2倍になるのは何年後になるか、すぐに分かりますか。
これを速算で求める資産運用(倍増)の法則といわれる関係式があります。

$$r\% \text{ の複利で } n \text{ 後に資産が } 2 \text{ 倍になるとき、次の関係が成立する。}$$

$$rn = 72$$

これから、 $8n = 72$ より、 $n = 9$ 。9年後に元金は2倍になります。72という数が登場するこの関係式は「72の法則」ともいわれ、金融界では有名な法則だそうです。その72を導出するには、元金を M とすると、

$$M \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n = 2M \quad \dots\dots(*)$$

これより、 m を求めればよいことになります。

$$\left(1 + \frac{r}{100} \right)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(\frac{r}{100} \right)^{n-k}$$

ここで、 $\frac{r}{100}$ が小さな値とみなせば、

$$\sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(\frac{r}{100} \right)^k \doteq 1 + {}_nC_1 \frac{r}{100} + {}_nC_2 \left(\frac{r}{100} \right)^2 \doteq 1 + \frac{rn}{100} + \frac{1}{2} \left(\frac{rn}{100} \right)^2$$

すなわち、 $\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 2$ $\left(x = \frac{rn}{100} \right)$ と近似できます。 $x^2 + 2x - 2 = 0$ を解くと、

$$x = -1 \pm \sqrt{3} \quad x > 0 \text{ より、} x = -1 + \sqrt{3} \doteq -1 + 1.732 = 0.732$$

以上より、 $rn = 100 \times 0.732 = 73.2$

72ではなくちょっと微妙な値になっています。実は計算の過程には3回の近似が用いられており、その度に等式の精度は落ちているのです。そうであるなら73.2よりは72の方が約数も多いため暗算に適しているから、さらに近似してもいいんじゃないか…、ということになったようです。大事な資金の運用計算なのに、随分いい加減な感じもします。

では、大仰に構えた「72の法則」の精度はどの程度のものなのでしょう。

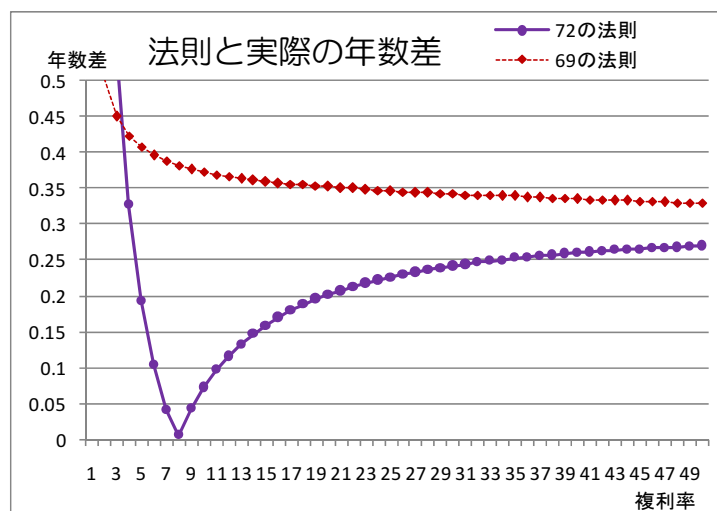
(*)の式からもう一度調べてみましょう。

$$\log \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n = \log 2 \text{ より、} n \log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = \log 2$$

$$\text{これから、} n = \frac{\log 2}{\log \left(1 + \frac{r}{100} \right)} \quad \dots(**)$$

金利 r を変化させて、実際の年数との差の絶対値を求めてみたのが下表および右のグラフです。

グラフより $r = 7, 8, 9, 10, 11$ ではその誤差はあまりないことが分かります(特に8%の利率はほぼ一致します)。しかし、それ以外の値では随分差が開いてしまうものもあります。 $r = 100$ のときは、当然1年で2倍になりますが、72の法則では0.72。 $r = 1$ のときは、実際は69.7年なのに72の法則では72年。この2年の差は大きいのではないのでしょうか。



複利率	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	15	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	100
実際の年数	69.661	35.003	23.45	17.673	14.207	11.896	10.245	9.006	8.043	7.273	6.642	4.959	3.802	3.106	2.642	2.31	2.06	1.865	1.71	1.475	1.306	1.179	1.08	1
法則の年数	72	36	24	18	14.4	12	10.286	9	8	7.2	6.545	4.8	3.6	2.88	2.4	2.057	1.8	1.6	1.44	1.2	1.029	0.9	0.8	0.72
差の絶対値	2.339	0.997	0.55	0.327	0.193	0.104	0.041	0.006	0.043	0.073	0.097	0.159	0.202	0.226	0.242	0.253	0.26	0.265	0.27	0.275	0.277	0.279	0.28	0.28

しかし、低金利の今の時代では、年利 $7 \leq r \leq 11$ など望めそうにもなく、「72の法則」は時代遅れの感は否めません。そこで、 $x \doteq 0$ のときの近似式である $\log(1+x) \doteq x$ を用いて(**)をもう一度計算してみましょう。

$$\log \left(1 + \frac{r}{100} \right) \doteq \frac{r}{100} \text{ より、} n = \frac{100 \log 2}{r} \text{ これより、} nr = 100 \log 2 = 69.3$$

グラフをみると、「72の法則」よりは全体としての精度は高くないのですが、69.3から得られる「69の法則」は金利5%以下ではたしかに有用です。これからの時代は「69の法則」が金融界を席卷するかも…でも、ちょっとまってください。もともと72の法則は速算の必要性から生まれたものです。あなたの服のポケットやバッグの中には携帯やスマートフォンが入っていませんか。今は人差し指一本で簡単に正確な値を叩き出せる時代。72や69の法則はすでにアナログ時代の産物なのかも知れません。

久しぶりに娘とランプに興じているS氏。1ゲームが終わった時、とびっきりの笑顔で娘が話かけてきた。

「ねえ、お父さん、お願いがあるんだけど」。

なんだ、こいつ突然ランプやらないっていつてきたのは魂胆があつてのことだったのか。

「今月ちょっとお金使いすぎってしまったの。お小遣いの前借りできないかなあ」

最近親子の会話が少なくなり寂しさを感じていたS氏だったので娘からのゲームの誘いはちょっと嬉しかった。なのに下心あつてのことと分かり可愛さ余って憎さ2倍程度。父親の表情から気持ちを察してか、

「じゃあ、ゲームで私が勝ったらお願いできない。ねえ、いいでしょう」

物事を勝敗だけで白黒つけようとする娘の安易な姿勢にまたカチンときたS氏。娘は多分お父さんが手心を加えてくれるだろうと思っているのだろう。

ここは世の中の厳しさをビシッと教えこまなければ。

S氏は不承不承ながら娘の挑戦を受けることにした。

「ゲームの内容は私に任せてね」

娘はテーブルの上に、ハート、ダイヤ、スペード、クラブの1から6までのカード24枚を並べた。

「お父さんと私が交互にカードを1枚ずつ取り、2人が取ったカードの数を足していくの。合計が31になるカードを取ったほうが勝ち。先手はお父さんからでいいわ」

何仕切っているのだ。誰に似たやら。だいたいこれはゲームと呼ぶにはお粗末なもので先手が有利になるのは確かだ。こいつ本当にお父さんが手を抜いて負けてくれると思っているな。その甘ったれの性根を叩き直してやる。

S氏の頭の中が目まぐるしく回転しだした。最初の1枚が肝心だ。合計が25以上になっていると残り1回で1から6のカードのどれかを選べば合計31にできる。だから選んだカードで合計が24になっていれば、次にカードを選ぶ娘の勝利はなくなる。同様に考え、選ぶカードを遡って調べていけば、合計が17,10になるように7を減じたカードを選べばいい。ということは最初に選ぶカードは3ということだ。なんだほんとうに先手必勝じゃないか。

そこでS氏はまず3のカードを取った。娘は3のカードを選び和6、次にS氏が4を選んで和は目的の10になった。

この調子で続けていけばいい。娘3で和13、S氏4で和17、娘4で和21、S氏3で和24。ここでS氏は勝利を確信した。それにしてもまったく知恵を絞ろうとしない娘、誰に似たんだろう。ちょっと娘が不憫に思えてきた。

娘は、本人は知らないだろうけど敗北が確定する1枚を選ぶ。カードの数は4。これで和が28か。さあ最後に3のカードを選んで終了だ。ハートの3は…ない。スペード・クラブ・ダイヤ…えっ、ええ!。どれもない。4枚ともない。

顔を上げると、娘のとびっきりの笑顔があつた。こいつ、最初から和を31にしようなんて考えていなかったな。

和が3,10,17,24になるように私がカードを選ぶことを知っていて、3のカードをすべて使い切ることが目的だったのか。主導権を握っていると信じこませるように主導権を握られ、カードの選び方まで支配されていたんだ。

世の中の厳しさをビシッと娘に叩きこまれたS氏であつた。

では先手必勝であるにはS氏はどのカードを選べばよかったのでしょうか。

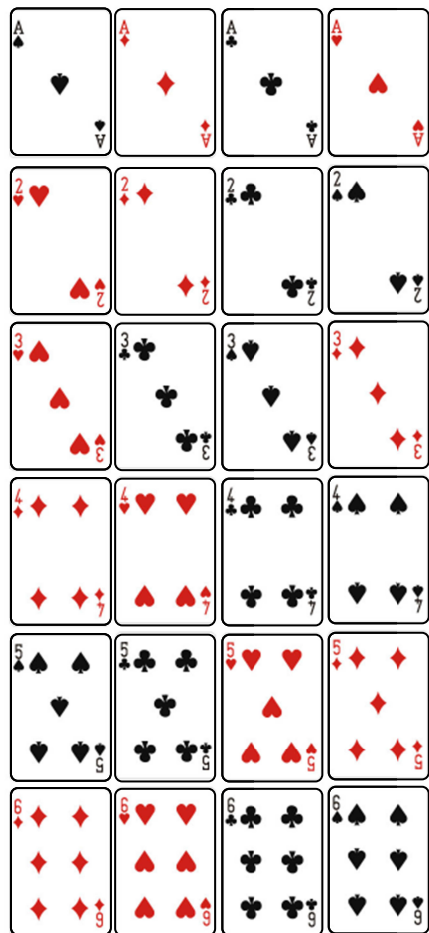
たとえば5のカードを選ぶとします。そのとき娘が2を選べば和は7になるのでS氏は3を選び和を10にします。以降は和が17,24,31になるよう相手のカードに合わせて選べばいいのです。同様に娘が選ぶカードが1,3,4のときは、S氏は和が10になるように選び、娘が6のカードを選んだら、和が17になるように選び、主導権を握ります。

では、娘が5を選んだ場合はどうすればいいでしょう。これで和は10になり娘に主導権が握られた形になります。そこでS氏はカード5を選び続けます。カード5が4枚選ばれれば娘はもう5を選ぶことができないので、娘はギブアップをするか、主導権はS氏に移ることになります。

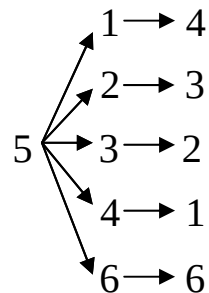
(これがS氏に対して娘がとった戦法です)。

ではS氏が他の数字のカードを選んだ場合の勝敗はどうなるのでしょうか。考えてみてください。

結局、今回の話題の数は31ではなかったわけです。1から6のカードの数字に対して、その枚数より1つだけ多い数字7がゲームの背後で活躍しており、31から7の倍数を引いた数のカードを先に手に入れた方が勝利の方程式を得ることができます。その駆け引きで7はラッキーナンバーにもアンラッキーナンバーにも変わってしまうのです。



	父	娘	父	娘	父	娘	父
カード	3	3	4	3	4	4	3
合計	3	6	10	13	17	21	24



5→5→2→5→2→5→2

144 は 12 の平方数ですが、各位の数を並び替えた 441 もまた 21 の平方数です。このように平方数にはその各位の数を並び替えてもまたある数の平方数になっているものがあります。

$$16^2 = 256 \Rightarrow 625 = 25^2 \quad 37^2 = 1369 \Rightarrow 1936 = 44^2 \quad 314^2 = 98596 \Rightarrow 99856 = 316^2$$

しかし、これらの平方数の中でも 144 は面白い数の配置になっています。

$$12^2 = 144 \Leftrightarrow 441 = 21^2$$

お分かりでしょうか。12 と、12 の十の位と一の位を入れ替えた 21 は、その平方数の位の並びもまた同様に入れ替わっているのです。このような性質をもつ 2 桁の数はもう一つあります。

$$13^2 = 169 \Leftrightarrow 961 = 31^2$$

では、3 桁の数で、百、十、一の位の数をそれぞれ一、十、百の位と入れ替えた時、平方数も同様に入れ替わるような数はあるでしょうか。

3 桁の数を

$$M = 100x + 10y + z \quad (1 \leq x, z \leq 9, 0 \leq y \leq 9)$$

とします。このとき各位のを入れ替えた数は、

$$N = 100z + 10y + x \quad (1 \leq x, z \leq 9, 0 \leq y \leq 9)$$

平方数を求めると、

$$\begin{aligned} M^2 &= 10000x^2 + 2000xy + 100(y^2 + 2xz) + 20yz + z^2 \\ &= 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \quad (1 \leq a, e \leq 9, 0 \leq b, c, d \leq 9) \end{aligned}$$

このとき対になる平方数は、

$$\begin{aligned} N^2 &= 10000z^2 + 2000yz + 100(y^2 + 2zx) + 20xy + x^2 \\ &= 10000e + 1000d + 100c + 10b + a \end{aligned}$$

と表すことができます。ここで a と e は、1 の位または最高位の数を表してしますが、4 から 9 までの平方数で 1 の位と 10 の位が等しいものはないことより、1 桁の数となります。さらに、 $a = x^2, e = z^2$ より、 a, e は平方数ですから、1, 4, 9 のいずれかの数です。すなわち x, z は 1, 2, 3 のいずれかです。また、 M^2 および N^2 の各位の数をみると、 $2xy = b, y^2 + 2zx = c, 2xz = d$ でなければならないことも分かります。

$$0 \leq 2xy \leq 9 \quad \text{より、} 0 \leq y \leq \frac{9}{2x}$$

$$0 \leq y^2 + 2zx \leq 9 \quad \text{より、} 0 \leq y^2 \leq 9 - 2zx$$

これから $y = 0, 1, 2$ となります。

また、 $x = z$ の場合は M, N は同じ数になるため、 $x < z$ とすると、 x, y, z の組は

$$(x, y, z) = (1, 0, 2), (1, 1, 2), (1, 2, 2), (1, 0, 3), (1, 1, 3), (1, 2, 3), (2, 0, 3), (2, 1, 3), (2, 2, 3)$$

この中に求める数があります。そこで実際に、平方を計算すると、

M	102	103	112	113	122
M ²	10404	10609	12544	12769	14884

5 つの数が見つかりました。

同様に、もっと大きな数について調べてみると、4 桁は 18 個、5 桁は 41 個、6 桁は 102 個あります。

そして、これらの各位の数は 0, 1, 2, 3 のいずれかであり、その 4 つの数字がすべて用いられることはありません(たぶん)。

6 桁の数を例として挙げましょう。

$$111211 = 12367886521 \Leftrightarrow 12568876321 = 112111$$

さて、この面白い性質の最初に登場する数が、 $12^2 = 144$ と $21^2 = 441$ であったわけです。

その 144 と 441 は他にも面白いパフォーマンスを披露してくれます。

$$144 = (1 + 4 + 4) \times (1 \times 4 \times 4) = 12^2$$

$$441 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 21^2$$

さらに 12 と同じ性質をもつ $13^2 = 169$ 、 $31^2 = 961$ も巻き込んで、

$$\frac{13 \times 10^2 - 31}{9} = 141 \quad \frac{13 \times 10^3 - 31}{9} = 1441 \quad \frac{13 \times 10^4 - 31}{9} = 14441 \quad \frac{13 \times 10^{13} - 31}{9} = 14444444444441$$

左辺の分子の値が 1299999...9999969 と表されることがこのパフォーマンスを演出しており、数 1 と 4 の対称に配置される規則性は無限に続いていくのです。

このように数 12 は、数とその平方数がまるで鏡を立てたときにお互いに鏡像としてみえる性質をもち、144 の振る舞いは、まるでその予告編を演じているようにも思えるのです。

右図の立体の体積を求めてください。

図の立体は、「1 辺の長さが 2 の立方体から、1 辺の長さが 1 の立方体をくり抜いた図形」ですから、その体積 V は、

$$V = 2^3 - 1^3 = 7$$

となりそうです。でも本当にそうでしょうか。もう一度、よく、図をみてください。気が付きましたか。実はこの図は次のようにも見えるのです。

1 辺の長さ 2 の立方体の 1 つのカドに 1 辺の長さ 1 の立方体をめり込ませた図形

小さな立方体が目の前に飛び出てきましたか。

では、この場合の体積を求めてみましょう。

大きい立方体と小さい立方体が共有する面は正三角形になりますが、この正三角形の面に沿って 2 つの立方体を切り離してみます。

そうすると大きい立方体は、右図のようにカドを切り落とした立体になりますが、切り落としたカドは三角錐で体積 V_1 は、

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$$

で与えられます。これより、

$$V = 2^3 - V_1 + 1^3 - V_1 = \frac{26}{3}$$

となります。

この問題は、人間の視覚認知は如何にあやふやであるかを教えてくれます。

さきほど切り抜いたカドの図形である右図の V_1 についても、もう一度よく見て下さい。

この図形はあなたの目にはどのように映っていますか。

点線で表現されている辺はないので、この図形の 3 つの面はすべて見えていることにはなりますが、あなたの視線はそれを 2 つの視点で捉えているはずです。

「視線が頂点 A にあるならば、あなたは三角錐を上から見下ろす鳥瞰的な視点で図形を捉えています。」

「視線が三角形 ABC にあるならば、あなたは三角錐の面を下から見上げる俯瞰的な視点で図形を捉えています。」

ほとんどの人の視点はこの 2 つかと思いますが、さらに、次のように見ることもできます。

「視線が辺 BC にあるならば、あなたは辺 BC が床にある不安定な状態の三角錐を横から見る虫瞰的な視点で図形を捉えています。」

たぶん、この 3 つめの視点を意識して見ようとする人はいないと思います。それは人の視点は「安定を好む」からなのです。人は意識の中で、図形が理想の配置になるように再構築しているのでしょう(実はさらにもうひとつの視点がありますが分かりますか)。

さて、この不安定な視点ということでは、先ほどの立方体についても、もう一つの見え方があります。分かるでしょうか。

目を凝らすというより、視線をおぼろげにしてみると

「天井の隅に張り付いている立方体」

が浮かんでくるはずです。まだ見えませんか。よほどあなたの目は不安定である状態を拒否しているんですね。そういう人はこのページを逆さまにしてみてください。どうです、安定した図形が見えてきましたね。

そして、この場合の立体の体積は 1 になります。

ところで、このような立体の見え方は、大きい立方体と小さい立方体がそれぞれどう捉えているかに依ります。

大きい立方体は出っ張り、小さい立方体は引っ込む

大きい立方体は出っ張り、小さい立方体は出っ張る

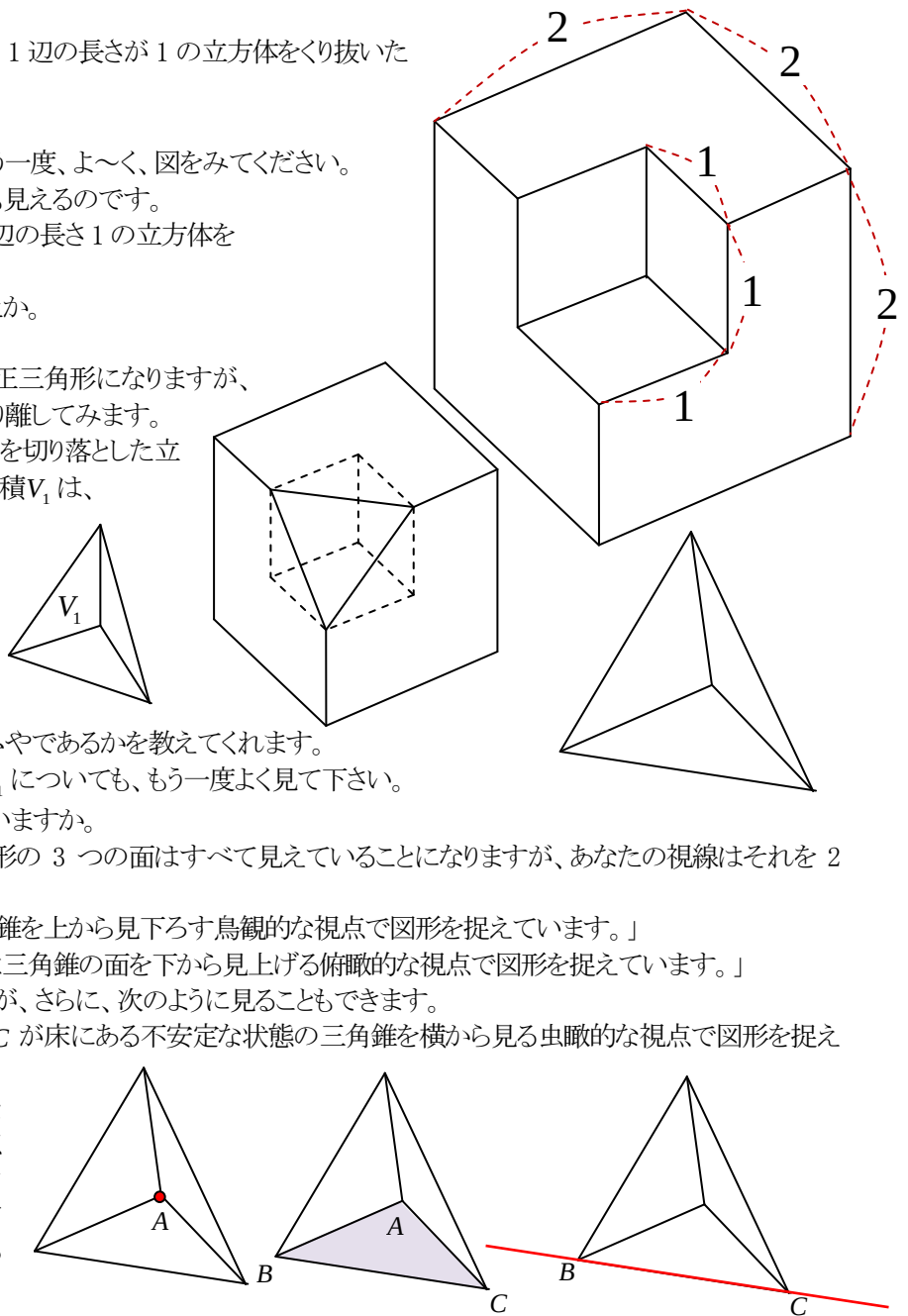
大きい立方体は引っ込み、小さい立方体は出っ張る

そう捉えることで、視点の切り替えスイッチが入り、3 つの図形が見えてくるのです。

では、スイッチで

大きい立体は引っ込み、小さい立体は引っ込む

とするとどうなるでしょう……。これはまだ人が認知することのできない進化の視点なのでしょうか。



小さい頃、3 目並べ(Tic Tac Toe)にハマった人は多いことでしょう。

ルールは、図のような 3×3 の 9 つのマスの目がある盤にプレイヤーである 2 人が○と×を交互に書き込みます。最初に、縦横斜めのいずれかに自分が書く記号(○,×)を書き並べた方が勝者になります。

このゲームは盤など用意しなくても紙と鉛筆(あるいは地面と棒)があればいつでもできます。さらに先攻と後攻が書く○×の数は最大でそれぞれ 5 手、4 手ですから勝敗までに要する時間は 1 分足らずであり、手軽にできるゲームとして昔から世界中で遊ばれています。

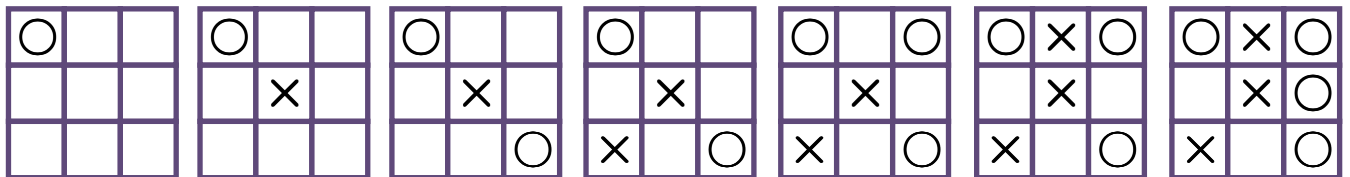
イギリスのモリス、フィリピンのタパタン、ケニアのシシマ、中国の三子棋などがそうですが、面白いことに「一直線上にコマを並べると勝ち」とすることは、それぞれの国が独自に考案したルールなのです。このゲームの最古のものは、古代エジプト時代のボードゲーム「ナインメンズモリス」といわれ、「真夏の夜の夢」(シェイクスピア)の第二幕第二場にも登場します。

さてゲームの勝敗は、先攻と後攻どちらが有利であるかは気になるところですが、置ける最大コマ数から先手が有利であることは明らかです。では後攻は不利かというところでもないのです。このゲームは、先攻と後攻が「最善の置き方」に従いゲームを進めると、常に引き分けに持ち込めることが知られています。

その「最善の置き方」は次のとおりです。

- ① 2 つ並んでいれば、3 つめのマスに置く。
- ② 相手が 2 つ並んでいれば、その 3 つめのマスに置く。
- ③ 2 段目の中央のマスに置く。
- ④ 隅のマスに置く。

①は勝つために攻めること、②は負けないために守ることであり、当たり前のことです。③、④のマス目が確保できるかどうか勝敗の鍵を握りますが、「最善の置き方」で攻め凌ぎ合いを進めると 9 つのマスがすべて埋まり引き分けになるのです。ただこれはあくまで双方が「最善の置き方」をした場合です。先攻が③ではなく④を置き、後攻が「最善の置き方」をすると、先手が勝ってしまうこともあります。ただその場合も、後攻は「注意深く最善の置き方」をすると引き分けに持ち込めます。



このように三目並べは引き分けになる確率が高いため、1 回のゲームで勝敗が決まることは稀です。「最善の置き方」を心がけゲームの回数を重ね、集中力が切れてどちらがミスをするときに決着がつくのです。お手軽ではあるけど持久戦ゲームでもあるのです。そこで、三目並べの改良ゲームも作成されています。例えば、三目並べのルールを次のように変更します。

2 人がそれぞれ 3 つの○と●をもち、三目並べの要領に交互に並べます。3 つとも並べて勝敗が着かない場合は、交互に盤上に置かれた○と●を空いている上下、左右のマスに移動させ、一直線上に並べた方を勝ちとする。

この三目並べをオヴィディウスのゲームといいます。日本では「みつならべ」として知られており、タパタン、シシマは盤を改良したものであり、さらにルールを複雑にし難易度を高めたものがナインメンズモリスなのです。

そして、このオヴィディウスのゲームは、先攻○の第 1 手を、盤上の 2 段目中央におくことで先手必勝になります。後攻●の第 1 手は、上段の左隅か上段の中央として考えると、先攻の第 2 手の置き方で右番の配置になるように後攻の手を操作することが可能になります。

○と●が 3 個ずつ右図のように置かれた後は、上下と左右にコマを 1 マス移動し、ゲームを進めますが、先攻○は残り 2 手で勝つことができます。

このゲームは、最初の○●の 3 つずつの置き方についてもルールが必要なのです。

1983 年公開の映画「WarGames」(米)は、大きな話題となりました。仮想空間での世界戦争シミュレートゲームが、パソコンの暴走により現実の核戦争の危機を引き起こしそうになるという内容でしたが、そのラストで、クラッカーである主人公は米ソのコンピュータにアクセスし、三目並べのゲームを組み込みます。対戦を始めた両国のコンピュータシステムは、「最善の置き方」で応酬し、引き分けを繰り返すうちにやがて「勝者はいない」ことを学ぶのです。

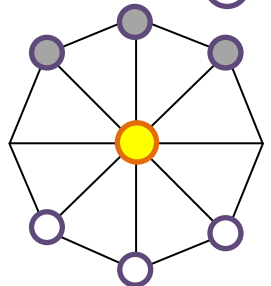
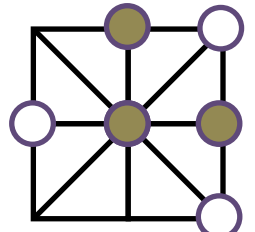
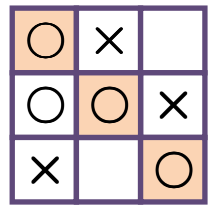
数 3 は、社会を作る数と言われます。夫婦 2 人に生まれる一粒種は家族を平和にします。2 人の後の 3 人目の子どもの誕生は、こどもたち 3 人の情緒と生活を安定させます。3 本足の椅子がガタつくことなく床に固定されるように、三位一体を表す数 3 は、いつでも最善の方法を模索し選択しているのです。

【タパタンの遊び方】

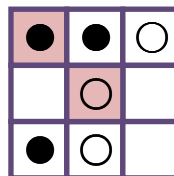
2 人がそれぞれ 3 つのコマを持ち、順に好きな格子点に置く。
置き終えたら、順に自分のコマを線で結ばれた隣の格子点に動かす。ただし、すでにコマのある格子点には動かせない。
自分のコマを先に一直線上に並べた方を勝ちとする。

【シシマの遊び方】

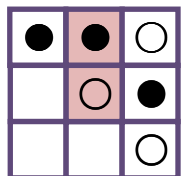
2 人が○か●のコマを決め、図のように置く。2 人が順に、コマを線に沿って空いている点に動かす。中央のシシマにも動かすことはできるがすでにコマのある点には動かせない。
自分のコマを先に一直線上に並べた方を勝ちとする。



後攻 1 手め
上段の左隅



後攻 1 手め
上段の中央



毎月 22 日は何の日か知っていますか。

正解は、「ショートケーキの日」。ショートケーキが日本で初めて売られた記念日かというそうではありません。カレンダーで 22 日の上(前週の同じ曜日)に位置するのは 15 日。だから「イチゴが上に載っている日」なのだそうです。ケーキ屋さんが考えたちょっとしたウィットある美味しい日なのです。

カレンダーの日には週 7 日を 1 行として配置されるため、曜日を表す各列の中の日には、公差 7 の等差数列になります。

この性質を用いた簡単なカレンダー・マジックを紹介しましょう。

カレンダーのある月から、縦 3 列、横 3 行を選びます。選んだ正方形の中には 9 つの日にちがありますが、その和を 9 つの中から一番小さい日にちだけを知ることと求めることができるでしょうか。

例えば、右図の正方形を選ぶときの和はどうなるでしょう。

すべてを足さなくとも、最小数である 8 をみるだけで瞬時に 144 になることを知ることができるのです。まず正方形内の中央にある日にち 16 に注目します。この日数を 9 つの日にちから引いてみましょう。数の配置のしくみがみえてきます。正方形内の日にちの和が 0 になることが簡単に分かるでしょう。ということは、ももとの日にちの和は、減じた 16 日の 9 つ分ですから $9 \times 16 = 144$ になります。では、中央の数 16 と一番小さい日にち 8 との関係はどうなっているのでしょうか。16 日は、8 日を 1 日進め、その 1 週間後ですから、 $8 + 1 + 7 = 16$

すなわち、一番小さい日にちに対して中央にある日にちは 8 を加えたものということになります。以上のことから、「最小数に 8 を加え 9 倍」を計算することで和が簡単に求められるのです。例えば、一番小さな日にちが 3 日であれば、作られる正方形内の日にちの和は、 $(3 + 8) \times 9 = 99$ となります。

次に、この原理を用いてもう少し複雑なマジックを考えてみましょう。

カレンダーのある月の日にちを、縦 4 列、横 4 行になるように囲み 16 個選びます。一番上の行の中から適当な日にちを選び、その日にちと同じ行(週)と同じ列(曜日)にある日にちすべてに×をつけます。次に 2 行目の週では、×のついていない日にちを選び、同様に、同じ行と列にある日にちに×をつけます。3 行目、4 行目についても同じルールで日にちを選びます。結局、各週から 4 つの日にちを選んだことになりますが、この 4 つの数の総和を最初に囲んだ 16 個の日にちを見るだけで瞬時に求めることができるでしょうか。

各週の日にちはどう選ばれるか分からないわけですからその和を予測することは難しいように思われます。そこで実際に下図のように選んでみましょう。この場合、8 日、13 日、23 日、28 日の順に選ぶので、和は、 $8 + 13 + 23 + 28 = 72$ となります。

さて、一見するとバラバラに日にちを選んでような見えたのが、書き抜いてみると、同じ行と同じ列を消すことにより、実は各週から選ばれる曜日はみな異なっていることが分かります。

✕	✕	8	✕
13	14	15	16
20	21	22	23
27	28	29	30

→

✕	✕	8	✕
13	✕	15	16
✕	21	✕	23
✕	28	✕	30

→

✕	✕	8	✕
13	✕	15	16
✕	✕	22	23
✕	28	✕	30

→

✕	✕	8	✕
13	✕	15	16
✕	✕	22	23
✕	28	29	30

その関係を見やすくするために、2 行目、3 行目、4 行目の各週の日にちから、それぞれ 7, 14, 21 を減じてみましょう。右図のように、各週の日にちはすべて 1 週目と同じになり、和は、各週からどのように日にちを選んでも必ず $6 + 7 + 8 + 9 = 30$ になることが理解できます。これに先ほど減じた日数の和、 $7 + 14 + 21 = 42$ を加えればいいわけですが、これでは直接選んだ 4 つの数を足した方が計算は速いわけで、瞬時というわけにはいきませんね。でもよく考えてください。各週からどのように日にちを選んでもいいのであれば、正方形の左上の隅から右下の隅の対角線方向に選んでもいいのです。このとき、ある週の翌週の日にちは、1 日進め、さらに 1 週進めた位置にあることより 8 を加えた日にちになります。これから、対角線上に並ぶ数は、公差 8 の等差数列になり、その和は

6	7	8	9
6	7	8	9
6	7	8	9
6	7	8	9

「対角線の両端にある最小数と最大数を加えたものの 2 倍」

になります。すなわち、 $(6 + 30) \times 2 = 72$ 。これででためらに選ばれているように思える和が瞬時に求められるのです。

1 年 365 日は、7 で割ると、 $365 = 7 \times 52 + 1$ であり、52 週と 1 日分になります。7 で割り切れればすっきりするように思えますが、そうすると毎年元旦は同じ曜日になってしまい、何か 1 年がマンネリ化してしまいそうです。1 日分ずれるからこそ曜日の変化を楽しめ、一年の計は元旦にありと決意し、新年に気持ちを新たにすることができるのかもしれない。数 7 は、人間の背中をほんのちょっと押してくれているようです。

216 は 6 の立方数ですがこれといって面白い性質はないように思えます。でも

$$6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$$

と連続する整数の立方数の和として分解できる凄い奴なのです。

同じような関係は $5^2 = 4^2 + 3^2$ にみることができますが、連続した整数 x, y, z, w で、 $x^n + y^n + z^n = w^n$ と分解できるのは 216 だけなのです。このように、ある数の n 乗が幾つかの n 乗した整数の和になる性質としてはピュタゴラスの定理があります。

ピュタゴラスの定理を満たす 3 つの整数の組は、奇数 $2k-1$ を平方した数を連続する 2 整数に分ける方法が有名です。

$$(2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = (2k^2 - 2k) + (2^2 - 2k + 1) \Rightarrow (2k-1)^2 + (2k^2 - 2k)^2 = (2k^2 - 2k + 1)^2$$

たとえば、 $5^2 = 25 = 12 + 13$ より、 $5^2 + 12^2 = 13^2$ 。さらに、 $3^2 = 9 = 4 + 5$ であることより、 $13^2 = 12^2 + 5^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2$ 3 つの平方数の和として表すことも可能です。一般に、円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $y = mx - 1$ の交点の x, y 座標は有理数であることより、ピュタゴラスの定理を満たす 3 整数 x, y, z (ピュタゴラス数)は、

$$x = 2m, y = m^2 - 1, z = m^2 + 1 \Rightarrow (2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$$

となります。この関係を 3 次元としてみると、球と直線の交点を求めることにより、 $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ を満たす整数の組は、

$$x = 2s, y = 2t, z = s^2 + t^2 - 1, w = s^2 + t^2 + 1 \Rightarrow (2s)^2 + (2t)^2 + (s^2 + t^2 - 1)^2 = (s^2 + t^2 + 1)^2$$

3 次元ピュタゴラス数が得られます。例えば、

$$s=2, t=3 \text{ のとき、} 4^2 + 6^2 + 12^2 = 14^2 \text{ より } 2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$

$$s=2, t=5 \text{ のとき、} 4^2 + 10^2 + 28^2 = 30^2 \text{ より } 2^2 + 5^2 + 14^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2 = 15^2$$

4 つの平方数の和も表現できますが、実は、曲線と直線の交点から有理数解を得る方法は、 n 次元に対しても有用です。

$$x_1 = 2s_1, x_2 = 2s_2, x_3 = 2s_3, \dots, x_{n-1} = 2s_{n-1}, x_n = s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_{n-1}^2 - 1, x_{n+1} = s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_{n-1}^2 + 1$$

とすると、

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = x_{n+1}^2$$

が成立し、 n 次元ピュタゴラス数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ が得られます。例えば、

$$s_1=1, s_2=2, s_3=3, s_4=5 \text{ のとき、} 2^2 + 4^2 + 6^2 + 10^2 + 38^2 = 40^2 \text{ より、} 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 19^2 = 20^2$$

$$s_1=1, s_2=2, s_3=3, s_4=4, s_5=5, s_6=6, s_7=7 \text{ のとき、} 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 45^2 = 46^2$$

それでは、3 乗数を 3 つの 3 乗数の和で表現するにはどうすればいいでしょう。次の関係式を用います。

$$x(x-2y)^3 + y(2x-y)^3 + y(x+y)^3 = x(x+y)^3$$

この式で、 x, y 自体を 3 乗数とすればよいのです。

例えば、 $x=3^3, y=1^3$ として代入すると、

$$3^3 \times 25^3 + 1^3 \times 53^3 + 1^3 \times 28^3 = 3^3 \times 28^3 \text{ より、} 28^3 + 53^3 + 75^3 = 84^3$$

また、 $x=2^3, y=1^3$ とすると、

$$2^3 \times 6^3 + 1^3 \times 15^3 + 1^3 \times 9^3 = 2^3 \times 9^3 \text{ より、} 12^3 + 15^3 + 9^3 = 18^3。ここで両辺を 3^3 で割ると、$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

数 216 の美しい関係式が得られました。では次の関係式を満たす整数の組はあると思いますか。

$$x^3 + y^3 = z^3 \quad \cdots \textcircled{1} \quad x^4 + y^4 + z^4 = w^4 \quad \cdots \textcircled{2} \quad v^5 + w^5 + x^5 + y^5 = z^5 \quad \cdots \textcircled{3}$$

②はその存在はまだ証明されてはいません。①はスイスの数学者オイラー(Leonhard Euler)が存在しないことを証明しました。オイラーは①を拡張し、 n 乗数は、 $(n-1)$ 個の n 乗数の和として表せないことを予想しました。しかし、近年、③は、

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

がコンピュータ計算により見つけられています。しかし、②についてはまだ解決されてはいないのです(4 つの 4 乗数で表される唯一の 4 乗数は、 $353^4 = 30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4$ が見つけられています)。

ところで、オイラーが存在しないことを証明した①は、オイラーより 100 年前のフランスの数学者フェルマー(Pierre de Fermat)の次の予想に端を発しています。

「3 以上の自然数 n に対して、 $x^n + y^n = z^n$ を満たす、自然数の組 (x, y, z) は存在しない」

フェルマーは、この証明に関して

「私は真に驚くべき証明を見つけたが、この余白はそれを記すには狭すぎる」

と遺稿の蔵書に書いています。定理の単純さとフェルマーの挑発とも思える書き置きは、数世紀にわたり、「フェルマーの最終定理」として、数学者の心を魅了し続けました。そして、ついに、360 年後の 1995 年、イギリスのワイルズ(Andrew John Wiles)により、「フェルマー・ワイルズの定理」として予想が正しかったことが証明されたのです。そのことは、同時に整数の組の存在を信じたアマチュア数学者の淡い夢が潰えた瞬間でもあります。

立方数 216 のもつ性質は、フェルマー予想のひとつの過程の中で導かれたものですが、フェルマーの非存在の整数組に対して、その存在は美しいものです。「確かにここにいるよ」。私達にまだ信じることの希望を残してくれているのです。

18

……復元を繰り返す数

18 の約数 1,2,3,6,9,18 の積は、

$$1 \times 2 \times 3 \times 6 \times 9 \times 18 = 18^3$$

ここで、

$$18^3 = 5832$$

ですが、各位の数の和を求めると、

$$5 + 8 + 3 + 2 = 18$$

18 に戻ってしまいます。18 は過剰数でその約数が多いことがこんな演出をしているのでしょうか。

18 の累乗で、同じように 18 に戻ってしまうものがないか調べてみましょう。

まず、18 の 5 乗です。

$$18^5 = 1889568$$

桁の中に 18 がちょっと顔を出します。ここでは和でなく各位の数の積を求めてみます。

$$1 \times 8 \times 8 \times 9 \times 5 \times 6 \times 8 = 138240$$

そして各位の数の和を計算すると、

$$1 + 3 + 8 + 2 + 4 + 0 = 18$$

18 に戻ることができました。6 乗はどうでしょうか。

$$18^6 = 34012224$$

今度は、各位の数の和を求めてみます。

$$3 + 4 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 18$$

簡単に 18 に戻りました。7 乗についても、

$$18^7 = 612220032$$

各位の数の和は、

$$6 + 1 + 2 + 2 + 2 + 0 + 0 + 3 + 2 = 18$$

このように、18 の累乗で、3 乗、6 乗、7 乗は各位の和が元の数 18 に一致しますが、このように「累乗した各位の数の和が元の数に等しい」性質を有する数はそれほど多いわけではありません。1 を除けば、

$$3 \text{ 乗} \Rightarrow 8, 17, 18, 26, 27 \quad 4 \text{ 乗} \Rightarrow 7, 22, 25, 28, 36 \quad 5 \text{ 乗} \Rightarrow 28, 35, 36, 46 \quad 6 \text{ 乗} \Rightarrow 18, 45, 54, 64$$

僅かな個数であり、その中でも 18 のように 3 乗、6 乗、7 乗で 3 回も顔を出すのは稀なものです。

さて、ここまできたら、8 乗も計算してみましょう。

$$18^8 = 11019960576$$

各位の数の和は、

$$1 + 1 + 1 + 9 + 9 + 6 + 5 + 7 + 6 = 45$$

随分大きな値になってしまいました。さすがにこれを 18 にするにはちょっと厳しそう。では、0 を除く各位の数の積はというと、

$$1 \times 1 \times 1 \times 9 \times 9 \times 6 \times 5 \times 7 \times 6 = 102060$$

これを先ほどの各位の数の和 45 で割ると、 $102060 \div 45 = 2268$

2268 の各位の和は、 $2 + 2 + 6 + 8 = 18$

これはいくらなんでもこじつけでしょうか。

9 乗はというと、

$$18^9 = 198359290368$$

各位の数の和は、

$$1 + 9 + 8 + 3 + 5 + 9 + 2 + 9 + 3 + 6 + 8 = 63$$

63 の各位の数の積は 18 ですね。もうそろそろ終わりにしましょう。最後は 10 乗。

$$18^{10} = 3570467226624$$

0 を除く各位の数の積を求めると、

$$3 \times 5 \times 7 \times 4 \times 6 \times 7 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 2 \times 4 = 20321280$$

さらに、積の値の各位の数の和は、

$$2 + 0 + 3 + 2 + 1 + 2 + 8 + 0 = 18$$

これでお終い……といいたところですが、4 乗を飛ばしていましたね。

$$18^4 = 104976$$

どうすれば 18 に戻るでしょうか。(各位の数の和の積と各位の積を考えてみてください)。でも 4 乗の場合は 18 に戻ることなどどうでもよくなるような不思議な性質があるのです。この各位の数の並びをみて何か気が付きませんか。18 の 3 乗の値、

$$18^3 = 5832$$

と比較してみると、凄いことが起きているのが分かるでしょうか。なんと 3 乗と 4 乗の各位の数をみると、0 から 9 までの 10 個の整数がただ 1 回だけ現れているのです。こうなると、もうこじつけや偶然と言えるでしょうか。神様のちょっとした悪戯としか思えないのです。

数10には多くの性質がありますが、今回の話題はその性質とはまったく関係なく、あるパズルの条件が10になるというだけです。人間社会を10進法で取仕切っている数10には甚だ失礼な話なのですが……。

そこで問題です。

紙の上にある9つの点を連続した折れ線で結ぶとき、少なくとも何本の直線が必要でしょうか。

有名なパズル問題ですから、挑戦したことがある人も多いことでしょう。パズルを一筆書きの問題とみると、4隅の4点は、縦横斜めの3本の直線の交点のため、奇点は4つあります。オイラーの一筆書きの定理(奇点の個数は0,2のときだけ一筆書きは可能)より、一筆書きは不可能であることが分かります。したがってパズルを解決するには柔らかな発想が要求されるのです(それゆえにパズルなのですが)。

では、解答を示しましょう。図のように折れ線の傘をつくると4本の直線で結べます。

パズルを解決できなかった人の多くは、結ぶ線分を9点で作られる正方形の周および内部に限定してしまったのではないのでしょうか。9つの点を見る目は、無意識に点を結び、正方形の枠を捕っているのです。しかし、問題のどこにもそんな制限などありません。図形から直線をはみ出すことにより、奇点の数は2個になり、一筆書きが可能になるわけです。これから、必要な線分の本数は4本というのがこのパズルの一般的な解答です。解答に続き感想として「思考に思い込みという制限を設けないようにする」とコメントしているものも多いようです。でも、思い込みは、「正方形の枠に限定する」という制限だけなのでしょう。

実は、まだ多くの思い込みがあるのです。幾つか挙げてみましょう。

○紙の上の点は大きさが異なるとはいっていない。半径のある円●としてみれば直線が円の内部の通り方により3本で可能。

○線に幅がないとはいっていない。9点を含むような太い線■を引けば1本で可能

○紙を切ったらダメとはいっていない。横に3分割にして切り、紙をつなぐと1本で可能。

○紙が平面上に置かれているとはいっていない。地球上にあるなら、各列の3点を経度線上に並べる。そうして、1列目を含む直線を、紙をはみ出して北極点まで結ぶ。次に北極点から2列目を含む直線を南極点まで結び、さらに南極点から3列目を含むように結ぶと3本で可能。

○紙を巻いたらダメとはいっていない。円柱に張り、1本の糸をらせん状に巻きつけその上に9点を置けば、1本で可能。

○紙を折ったらダメとはいっていない。1列目と3列目が2列目に重なるように紙を折れば1本で可能。

○直線が紙の上にあるとはいっていない。9つの点をマス目の中央になるように、紙を9つにたたみ、紙に垂直に直線を通せば1本で可能。

○直線が等間隔に並んでいるとはいっていない。2列目が1列、3列目と平行でないなら、1列目と2列目、2列目と3列目を通る直線は交わるので、3本で可能。

まだこれ以外にも、リミッターの掛かっている部分があるかも知れません。考えてみてください。

しかし、これらの解答は、点、直線、平面の定義およびその解釈を緩めたことによるものであり、「数学的」とであるとはいえないでしょう。点は大きさ・面積はないもの、線は太さのないものですから、本当はユークリッド幾何学での平面や直線で問題を考えるべきなのです。そうすると上述の解答で認められるものはどれでしょうか。

そこで、この問題を「数学の問題」としてアレンジしてみましょう。

右図の9点は、3点を含む直線を8本用いて結んでいます。点を適当に動かすことで、直線を10本用いて結んでください。

(解答)

1行目の各点と3行目の各点の交点を通るように、2行目の点を移動させると、右図のように、10本の直線を引くことができます。ただ、この点の配置で2行目の3つの交点は一直線上に並んでいるかということは、疑問ですね。このことを保証しているのは「中線連結定理」であることは明らかです。

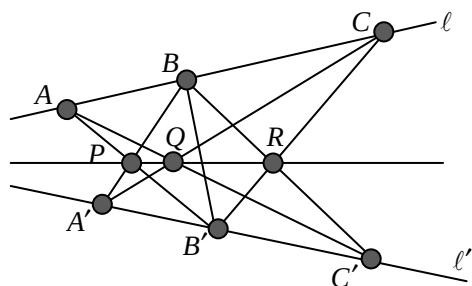
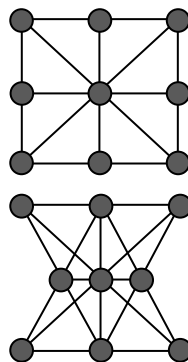
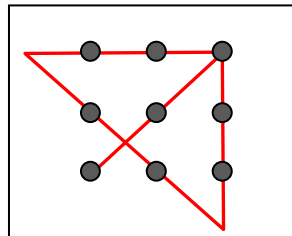
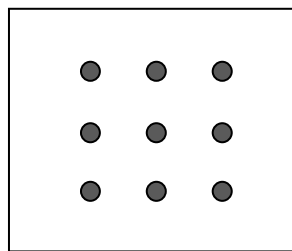
では、これ以外の解はないのでしょうか。

アレキサンドリアのパプスの知恵を借りてみましょう。

2直線 ℓ, ℓ' 上の3点をそれぞれ $A, B, C; A', B', C'$ とする。
線分 AB' と $A'B$, BC' と $B'C$, AC' と $A'C$ との交点を
それぞれ P, Q, R とすると、この3点は一直線上にある。

定理の証明は、メネラウスの定理の逆を用いて容易に得られます。パプスの定理により点を配置し、 ℓ 上の点 B を点 Q が線分 BB' 上にあるように動かすとパズルの一般解が得られます。

今の時代でも頭を悩ませるこのパズルは、パプスが活躍した4世紀の頃には数学の問題として既に解決されていたのです。数学って凄い学問ですね。



145 は、 $1^2 + 12^2 = 8^2 + 9^2 = 145$ であり、2 通りの平方数の和として表される数です。また、 $145 = 3^4 + 4^3$ も面白い性質がもしれません。しかし 145 の特筆すべき性質は、

$$145 = 1! + 4! + 5!$$

お分かりでしょうか。145 は、それ自身が各位の数の階乗の和として表されるのです。

このような性質の数をファクトリオン(factorion)といいます。

$n!$ は、自然数 $1 \sim n$ の積を表しますが、その値は

$$10! = 3628800$$

10 に対してびっくりするような大きな値になるため！マークを記号にしたようで、 $!$ はファクトリアル(factorial)と読みます。日本語では、 n から順に 1 ずつ階段状に減じて乗ずることから階乗といいます。階乗の値を縦に並べてみると、階段状に配置されるとみてもいいでしょう。ファクトリアルは「ひやくとおりのある」と洒落て読むこともあります。

これだけ大きく膨張する階乗の値ですから、実際の数値で示すことは難しいため、近似値で表現することがあります。オイラーと同世代であるスコットランドのスターリング(James Stirling)が考案したスターリングの公式(近似式)を紹介しましょう。

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

証明は、両辺に自然対数をとった $\log n! = n(\log n - 1)$ の左辺を積分により面積計算することで求められます。

しかし、この近似は n が大きくなると誤差も開き、精度としては高いものではありません。

そこで、スターリングの公式を、ウォリスの公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n n!)^4}{(2n+1)((2n!))^2}$$

を用いることで、次のように改良します。

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

この近似公式は、 n が大きくなればより精度が高くなり、 $n = 100$ のときは、実際の数値との比の値は 0.999 であり、ほぼ実際の値と一致するのです。そしてこれらの公式をみると、ウォリスの公式からは、円周率 π は階乗数により近似できることが分かり、さらにネイピア数 e は、

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

で得られるのです。

円周率 π 、ネイピア数 e のような超越数を表現できる階乗ですが、それでは、各桁の階乗の和として表されるファクトリオンはどれだけ存在するのでしょうか。

$1! = 1$, $2! = 2$ ですから、この 2 数はファクトリオンですが、自明過ぎて価値のないものです。では 1, 2 と 145 以外のファクトリオンはどれだけあるかという、

$$40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$$

唯一これだけなのです。数 145 は、1964 年に R.ドハーティがコンピュータ計算の検索により、見つけた最大のファクトリオンであり、これ以外には存在しないことも証明されています。

$(n+1)$ 桁の数 A を、

$$A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 \quad 0 \leq a_i \leq 9, a_n \neq 0$$

とします。

$$10^n \leq a_n \times 10^n \leq A = a_n! + a_{n-1}! + \cdots + a_1! + a_0! \leq 9!(n+1)$$

ここで、 $9! = 362880$ であることより、

$$10^n \leq 362880(n+1)。これを解くと、 $n \leq 6$ 。$$

7 桁を超えるファクトリオンは存在しないわけで、ドハーティが計算した 40 年前に比べ、いまでは、7 桁程度の演算であれば Excel の VBA では数秒で計算でき、40585 だけの出力をみることができます。ちなみに、同様に VBA を用いると、ファクトリオンより 1 不足する数は、

$$1466 = (1! + 4! + 6! + 6!) + 1 \quad 81368 = (8! + 1! + 3! + 6! + 8!) + 1$$

ファクトリオンより 1 過剰な数は、

$$372973 = 3! + 7! + 2! + 9! + 7! + 3! - 1$$

であることも簡単に求められます。

このようにファクトリオンに近い数もほとんど存在しないのです。超越数を表現したり、素数階乗では素数が無限個あることを証明したりと、多くの活躍の場を見出す階乗なのですが、自身を表すことは難しく、自己に厳しい孤高の数なのです。

男 A,B,C の 3 人と、女 W の 1 人が、2 人乗りのボートを借りて向島に渡ることにした。ボートを操縦できるのは A だけである。A は W に想いを寄せているので、W を B や C とは絶対に 2 人にしたくない。A はどのような順番で 3 人を運ばいいだろうか。

当然、最初にボートに乗せるのは W であり、A はボートの中でより 2 人の距離を縮めようとするでしょう。島に到着したら、一人で岸まで戻り、折り返し B を乗せて運びます。島についたら、一人で戻ってしまうと B と W が一緒にいる時間ができるため、二人を離すため、W に「途中でイルカの群れが泳いでいたよ。見てみない。」とでもいって、ボートに乗せ、一緒に岸まで戻ります。岸についたら、W を降ろし、C を乗せて島まで運んだら、全速力で岸に戻り、最後に W を乗せてからゆっくりとデート気分で遊覧をすればいいのです。

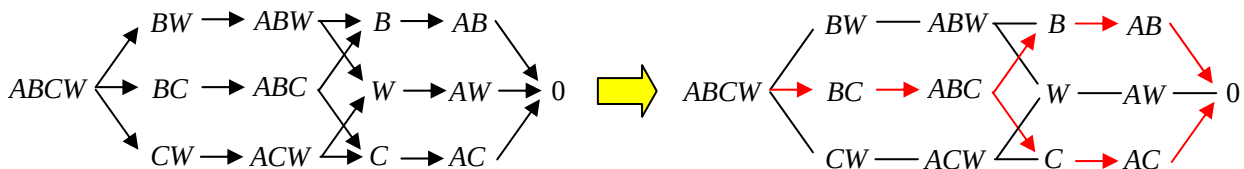
この問題の出典は古く、8 世紀の頃に「ある農夫がオオカミとヤギとキャベツを川向うまで舟で運ぶにはどうすればいいか」(オオカミはヤギを食べ、ヤギはキャベツを食べる)という内容で当時の大帝への娯楽用問題としてお抱えの数学者が考えたものであり、川渡り問題と呼ばれています。

古典的な問題ではあるのですが、題材として近代数学の一分野に関わる重要な概念が含まれています。

4 人の男女を点、ボートの行き来を線とみなすと、この問題は岸に残る男女の組合せである点をどのように線で結ぶかということになります。点の組合せは、 2^4 から、A のみの場合を除くと 15 通りあり、 $ABCD \Rightarrow 0$ にすることができれば完成です。

一番最初に渡るのは 4 人のうちで A とあと一人ですから、岸に残る人の組合せは 3 通りあります。A が戻ってきたあと、2 回目は、A とさらに 1 人が減るため 3 通り。このように組合せを考え 0 に導きます。その経路の中から BW および CW の組合せは認められないため、関係する点および線を削除し、W の位置を考慮すればよいのです。

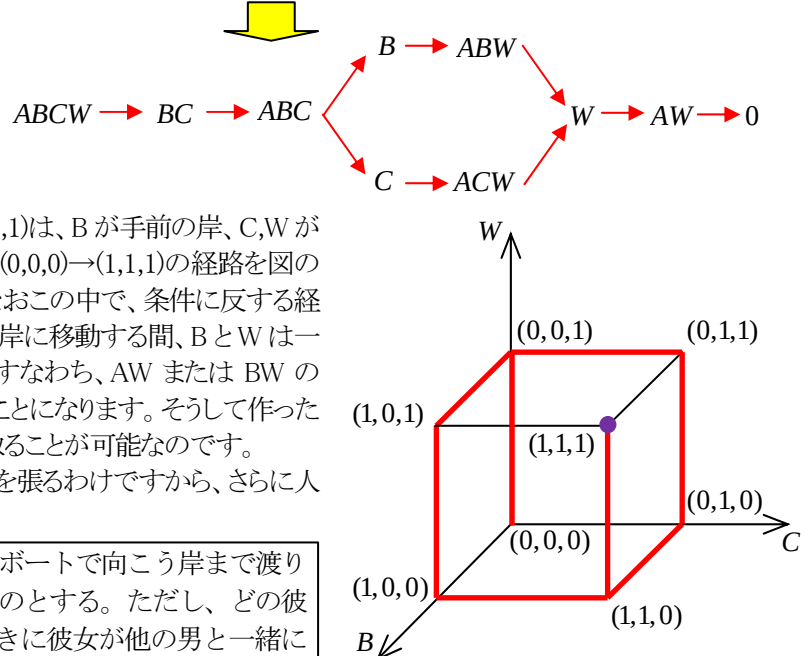
このように、点(node)と線(edge)をつないでできる図形を「グラフ」といい、グラフを用いて種々の問題を解く数学の分野を「グラフ理論」といいます。グラフ理論は、「ケーニヒスベルクの橋の問題」をオイラーが一筆書きで解いたことを起源として研究が続けられたものです。



ところで、この問題は、点と線の配置を空間的に捉えることで、鮮やかな解答を用意することができます。

点 A は、常に線の上を移動しているため考える必要はないので、残りの B,C,W を成分とする空間 (B,C,W) を作ります。各成分が 0 のときは手前の岸に、1 のときは向こう岸にいるとしましょう。例えば、 $(0,1,1)$ は、B が手前の岸、C,W が向こう岸にいることを意味します。そうすると問題は、 $(0,0,0) \rightarrow (1,1,1)$ の経路を図の立方体の辺の移動で求めればよいことになります。なおこの中で、条件に反する経路は除きます。例えば、 $(1,0,1) \rightarrow (1,1,1)$ は、C が向こう岸に移動する間、B と W は一緒にいることになるため認められないということです。すなわち、AW または BW の行き来の端点の数 0,1 が一致している辺は通れないことになります。そうして作った経路が右図であり、これから容易に移動方法を読み取ることが可能なのです。

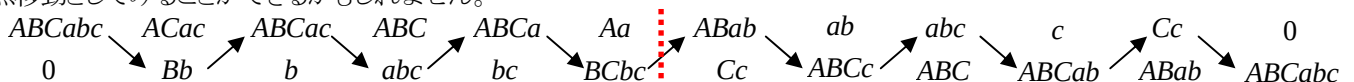
ただ、この方法は、BCW の 3 人に対し 3 次元空間を張るわけですから、さらに人数が増えると応用することはできません。



3 組の男女のカップル A-a, B-b, C-c が 2 人乗りのボートで向こう岸まで渡りたい。ボートは 6 人全員が漕ぐことができるものとする。ただし、どの彼氏もみなヤキモチであるため、自分がいないときに彼女が他の男と一緒にいることは絶対に認めない。このわがままな要求を満たし、全員が川向うまで渡るためにはどのようにボートに乗り移動すればいいだろうか。

この問題は前述の川渡り問題から遡ること 50 年前にパズル誌に掲載されたものです。こちらの問題の方が先に考案されたことになるのです。前述の問題はこの問題を皇帝のために初級レベル用にアレンジしたということでしょうか。

さて、条件としては人数が増えただけでなく人間関係も複雑になっています。これも点と線を結び経路を作ると解答が浮かび上がってきます。その 1 つが次に示す経路であり 11 回の行き来で全員が川向うに渡ることができます。ただ、この経路をよくみると、 $Aa - BCbc$ から $ABab - Cc$ へと変わる箇所対称的な移動に転じていることが分かります。ちょっと工夫すると空間の点移動としてみることもできるかもしれません。



「オーメン」(リチャード・ドナー監督)は、35 年前に公開されたオカルトブームに火をつけた映画。6 月 6 日 6 時に頭に 666 の数字を刻まれて誕生した悪魔の子ダミアンの物語です。666 は、新約聖書の最終巻である「ヨハネの黙示録」(アポカリプス)の中の 13 章 18 節に記載される海よりいでた第二の獣に従うモノたち(人間)に刻印された数字であり、この数字は数秘術ゲマトリアでは「獣の数字」といわれています。人の存在そのものに悪魔の刻印を押しているのです。

6 は神が完全な数と考える 7 より 1 少ない不完全な数であり、それを 3 つ連ねて、666 は甚だ不完全な数(人間)という意味をもたせており、反キリスト教の象徴数として扱われます。キリスト教を迫害したネロ皇帝の名前をヘブライ語で表した数値は 666 になります。マルチン・ルター、アドルフ・ヒトラーなどもラテン語、ローマ数字などで読み替えていくと数値 666 になるようですが、読み替えは、どうしても関連付けることは可能であるため、「都合のいい解釈」ともいえます。

666 を構成している 6 は、自身を除く約数の和は、 $6 = 1 + 2 + 3$ であり、最小の完全数です。6 は数としては完全でありながら、不完全な数の一部として嫌われ、相矛盾している有様が、如何にその解釈が適当であるかを物語っています。

したがって、666 の数の性質についても、適当な理由をつけることで、みつけだすことも可能ということです。

例えば、べき乗数との関係をみてみましょう。

自然数の和では、 $666 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + (6 \times 6)$

2 乗数の和では、 $666 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + (6 \times 6)^2}{1 + 6 + 66}$

3 乗数の和では、 $666 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3$

その一部をみると、 $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$

さらに、6 乗数では、 $666 = 1^6 - 2^6 + 3^6$

このように 666 はべき乗和として表すことができますが、そのべき乗数の配置はあまりにも美しいのです。

さらに、素数を小さい順に 7 つ抜き出し、その平方の和を求めてみましょう。

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2$$

ここまでくると、こじつけであるとは言いがたくなります。

次に、666 を 6 進数で表してみましょう。 $666 = 3030_{(6)}$ これから、

$$666 = 3 \times 6^3 + 3 \times 6 = 6^3 + 6^3 + 6^3 + 6 + 6 + 6$$

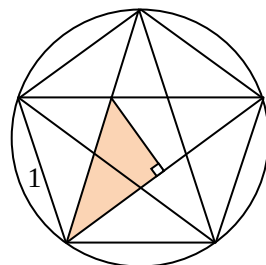
666° の三角比の値はもっと驚くべき結果を導きます。 $666^\circ = 7 \times 90^\circ + 36^\circ$ ですが、 36° は円に内接する正五角形の対角線を結んでできる五芒星形(ペンタグラム)の頂角の大きさです。正五角形の一边の長さを 1 とするとき、対角線の長さは、自然

界でもっとも美しいと言われる黄金数 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ で与えられます(対角線の長さを x とし、トレミーの

定理を用いると、 $x^2 - x - 1 = 0$ の解として得られます)。右図の直角三角形に三角比を考えると、

$$\sin 666^\circ = -\cos 36^\circ = -\frac{1}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

666° の正弦の値は黄金数の $-\frac{1}{2}$ 倍。地上界と悪魔界の出入口であるペンタグラムから黄金数が



生まれ、獣の数 666 の中に封じ込められているのです。三角比は円周率 π と深い関わりをもちますが、円周率の小数点以下の 144 桁までの各桁の数の和は 666 になります。3 つの 6 で示される 666 は、神の左手、悪魔の右手、どちらなのでしょう。

次に 666 の平方を計算してみましょう。 $666 \times 666 = 443556$

なにも起こっていないように思えますが、6 を連ねた $666 \dots 666$ の平方した結果を並べて書いてみると、右のような数のピラミッドが作られます。どの数も偶数桁になりますが、半分に分け上位桁と下位桁の和を求めてみます。例えば、

$$444443555556 \Rightarrow 444443 + 555556 = 999999$$

6 をひっくり返した 9 が連なるのです。なお、この性質は、9 についてもみることができます。

$$9999^2 = (10000 - 1)^2 = 100000000 - 20000 + 1 = 99980001 \Rightarrow 9998 + 0001 = 9999$$

このような 666 の不思議さ、不可思議さに魅入られた数学者クリフォード・A・ピッツバーク氏は、著書「オズの数学」で、2 種類のレギオン数(Legion's Number)を命名しました。レギオンはローマ軍団転じて、軍団の意であり、666 は悪魔の軍団の数ということになります。第一種レギオン数は 666^{666} ですが、多倍長計算ソフトで実行させると、

$$666^{666} = 27154 \dots 98016$$

1881 桁の大きな数が得られます。第二種レギオン数は $666!^{666!}$ 。同様に多倍長計算ソフトの実行ボタンを押すと、画面上に砂時計が回り始め、パソコンがフリーズしてしまいました。フリーズが融けるとき、いったい何が画面に現れるのでしょうか。恐ろしいものを呼び出してしまったのかも知れません。

(パソコンを現代文明の野獣であると主張する人もいます。アルファベット A ~ Z を 6 の倍数 $6n(n=1, 2, 3, \dots, 26)$ に対応させます。そして、Computer のアルファベットを数字に置き換えると、文字に対応する数の和は………)

$$66 \times 66 = 4356$$

$$666 \times 666 = 443556$$

$$6666 \times 6666 = 44435556$$

$$66666 \times 66666 = 4444355556$$

$$666666 \times 666666 = 444443555556$$

$$6666666 \times 6666666 = 44444435555556$$

$$66666666 \times 66666666 = 4444444355555556$$

$\frac{12}{5}$ (2)

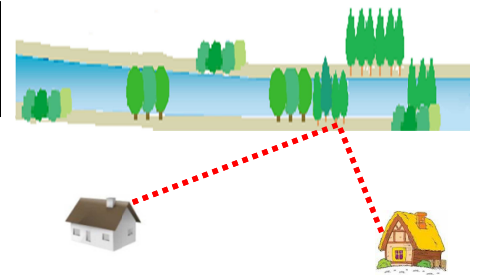
…調和から最短経路を導く数

2数、2と3の平均には

$$A = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5 \quad G = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6} \div 2.449 \quad H = \frac{2 \times 2 \times 3}{2+3} = \frac{12}{5} = 2.4$$

などがあり、左から順に、相加平均(A)、相乗平均(G)、調和平均(H)といい、 $A \geq G \geq H$ という関係が成立しています。

調和平均は、経路を往復したときの速度の平均や、音の高さの平均などに用いられますが、最短経路を求める次のような問題にも応用することができます。



ロバで水を運ぶわけで、井戸もないずいぶん昔の話であることが分かりますね。ロバの問題といわれるこのパズルは、みつる君の家をA、お祖母ちゃんの家をBとし、水を汲む川岸の地点をPとすると、 $AP + PB$ の長さの最小値を求める最短経路問題ですが、その解答もよく知られています。

川岸である直線 ℓ に関する点Aの対称点を A' とします。

点 A' と点Bを結ぶ直線と ℓ との交点を P_0 としましょう。

すると、水を汲み適当な地点Pに対して、 $AP = A'P$ であることより、

$$AP + PB = A'P + PB \geq A'P_0 + P_0B = A'B$$

点 P_0 で水を汲むときが最短距離であり、ベストということが分かりますね。

でも問題文では、最短距離を求めよとはいっていないことにも注意してください。例えば、お祖母ちゃんの家に行くまで要する時間の問題とみれば、水を背に乗せたあと、ロバはゆっくりと歩くことになるわけですから、ロバの背に水袋を乗せている時間が最小になる場合がベストとみることもできるのです。すなわち、点Bから川岸である直線 ℓ に下ろした垂線との交点を答えとしてもいいのではないのでしょうか。動物愛護にもなりますし。

まあ、そんな解答のオチも考えられるのですが、ところでこの問題、最短経路を求めるにしてもちょっと首を傾げる点があるのです。それは、みつる君は川の中にある点 A' の位置をどうやって知ればいいのでしょうか。原理は分かっても実際には川の中に入らないと点 P_0 の位置はわからないのです。そこでみつる君にも理解できるように点 P_0 の位置を探してみましょう。

点Aおよび点Bから直線 ℓ に垂線を引き、その足をそれぞれC,Dとします。直線ADと直線BCとの交点をEとし、点Eから直線 ℓ に下ろした垂線の足をPとするとこの点Pが川の水を汲む位置になります。

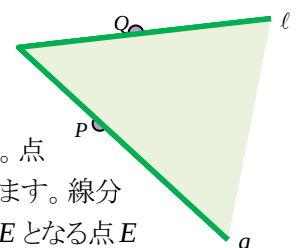
点Aを通り直線 ℓ に垂直な直線と、直線BPとの交点を A' 、線分ABと直線PEとの交点をQとします。

$$\triangle BCA \sim \triangle BEQ \text{ より、} AC = kQE \quad \triangle DCA \sim \triangle DPE \text{ より、} AC = kPE$$

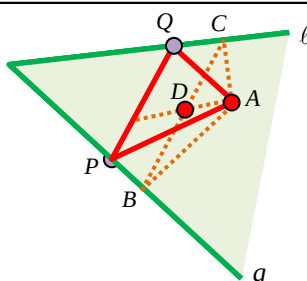
$$\text{これから } PE = EQ. \text{ また、} \triangle BCA \sim \triangle BEQ \text{ より、} A'C = kPE$$

以上より $AC = A'C$ となり、点 A' は直線 ℓ に関する対称点になります。

ところで、図のPQの長さですが、線分ACとBDの調和平均で与えられます。そして、このとき $CP : PD = AC : BD$ ですから、実は、みつる君は、点Eを求めなくても、CD間の岸辺を歩き、 $AC : BD$ の比になる地点を探せばいいだけだったのです。



$AP + PQ + QA$ が最小となる最短経路の問題として考えましょう。点Aから直線 g, ℓ に垂線を下ろし、その足をそれぞれB,Cとします。線分BC上の適当な点Dをとり、線分ADのDの延長上に $AD = DE$ となる点Eをとります。点Eを通り、直線BCに平行な直線が直線 ℓ, g と交わる点をP,Qにすればいいのです。その理由は、点Aの ℓ, g に関する対称点を考えてみれば分かります。



1/7

…三角形に隠れている循環小数

$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857\cdots$ であり、循環節の長さ6の循環小数です。

循環節の数142857に、1から6までの数字を掛けると各位の数の順番が入れ替わり、数字たちがポルカを踊り出します。

$\frac{1}{7}$ を22倍した値は $\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} = 3.142857\cdots$ であり、円周率の良い近似を与えます。

$\frac{1}{7}$ を24倍した値 $\frac{24}{7} = 3.42857142857142857142\cdots$ にも、142857が現れますが、スラングでは「24hours/7 days a week」の略語でもあり、24時間(1日)と7日(1週間)、常に(always)、いつも(anytime)の意味になります。セブン・イレブンは本当は、 $7/24$ ということになるのでしょうか。

さて、今回の話題ですが、その $\frac{1}{7}$ の面積を作り出す比の値についてです。

三角形 ABC の各辺 BC, DA, AB を $2:1$ の比に内分する点をそれぞれ D, E, F とする。このとき、線分 AD, DE, CF によって囲まれてできる三角形の面積は、もとの三角形 ABC の面積の何倍になるか。

$\frac{1}{7}$ が答えになりますが、 $2:1$ の比の値からどのように得られるのかをみてみましょう。

図の三角形 PQR の面積は、三角形 ABC から、 $\triangle ABQ, \triangle BCR, \triangle CAP$ を減ずると求められますから、 $AQ:QD$ が分かればよいことになります。これはメネラウスの定理を用いると簡単に得られます。メネラウスの定理は、

「三角形の各辺を内分・外分する点を中継しながら、辺の両端点(頂点)の比の積を求めて一周すると、値1になる」

というものです。 $AQ:QD$ を求めるわけですから、辺 AD の内分点が Q であるとみて、 A を出発点として、移動します。点 Q を中継して点 D についたら、今度は C に行くために外分点 B を経由します。点 C から点 A に行くには内分点 E を経由します。これで最初の点 A に戻ることができました。式で表してみましょう。

$$\frac{AQ}{QD} \times \frac{DB}{BC} \times \frac{CE}{EA} = 1 \quad \text{これより、} \quad \frac{AQ}{QD} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = 1 \quad \therefore AQ:QD = 6:1$$

$$\triangle ABQ = \frac{6}{7} \triangle ABD = \frac{6}{7} \times \frac{1}{3} \triangle ABC = \frac{2}{7} S \quad (S = \triangle ABC)$$

$$\text{同様に、} \triangle BCR = \triangle CAP = \triangle ABQ = \frac{2}{7} S \quad \text{です。} \therefore \triangle PQR = \triangle ABC - (\triangle ABQ + \triangle BCR + \triangle CAP) = S - \frac{2}{7} S \times 3 = \frac{1}{7} S$$

求められましたね。でもメネラウスの定理は素晴らしい美しい定理なのですが慣れるまでちょっと使いにくいかもしれません。そこで、別の視覚的な方法を考えてみましょう。

頂点 A, B, C, P, Q, R を通り、三角形 PQR の各辺に平行な直線を引くと、右図のように $\triangle PQR$ と合同な13個の三角形ができます。そこでその面積を S とします。ここで、例えば $\triangle BCR$ は平行四辺形 $BSCR$ の面積 $4S$ の半分ですから $2S$ 。

$\triangle CAP, \triangle ABQ$ も $2S$ ですから、 $\triangle ABC$ の面積は $7S$ になります。

同様に考えることで、三角形 ABC の各辺を $m:n$ の分けるときにも、 $\triangle PQR$ の面積と $\triangle ABC$ の面積 S との比を求めることができます。実際に計算すると、

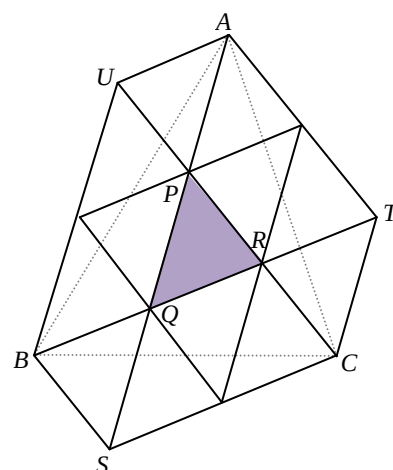
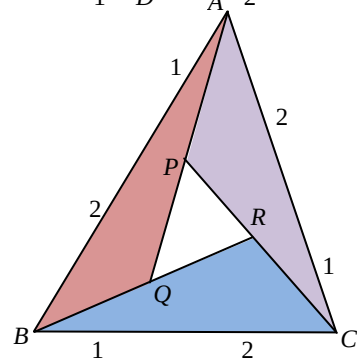
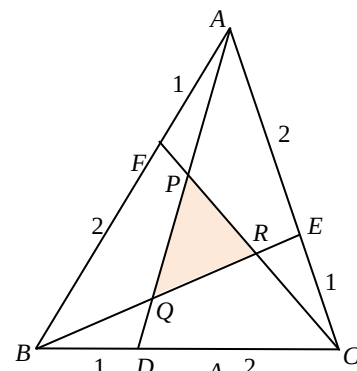
$$AQ:QB = (m+n)n:m^2$$

となることから、

$$\triangle ABQ = \frac{(m+n)n}{m^2+mn+n^2} \triangle ABD = \frac{(m+n)n}{m^2+mn+n^2} \times \frac{m}{m+n} \triangle ABC = \frac{mn}{m^2+mn+n^2} S$$

$$\triangle PQR = \left(1 - \frac{3mn}{m^2+mn+n^2}\right) S = \frac{(m-n)^2}{m^2+mn+n^2} S = \frac{(m-n)^3}{m^3-n^3} S$$

$\frac{1}{7}$ の分子、分母はそれぞれ、 $(2-1)^3=1$ 、 $2^3-1^3=7$ で与えられていたのです。



$P(n) = n^2 - n + 41$ としましょう。

$P(1) = 41$ 、 $P(2) = 43$ 、 $P(3) = 47$ 、 $P(4) = 53$ 、 $P(5) = 61$ 、 $P(6) = 71$ 、 $P(7) = 83$ 、 $P(8) = 97$ 、……

これらの数はすべて素数を表しています。素数である41に連続する2整数の積 $(n-1)n$ を加えると新たな素数が生成されるのです。もう少し調べてみましょう。

$P(31) = 971$ 、 $P(32) = 1033$ 、 $P(33) = 1097$ 、 $P(34) = 1163$ 、 $P(35) = 1231$ 、……

確かに素数です。でも、すべての素数を生成しているわけではないようです。 $P(4) = 53$ と $P(5) = 61$ の間には59がありますし、いくつも素数が抜け落ちています。さらに、この式は $P(41)$ で破綻してしまうことは明らかです。

なぜなら、 $P(41) = 41 \times 41 - 41 + 41 = 41^2$ になるからです。

この式 $P(n)$ は、オイラーが見つけたものですが、もちろんオイラーも素数を生成する万能式とは思っているはずもなく、同様の式はオイラーが好んだ数17を用いた $n^2 - n + 17$ でも $n=16$ まで成立します。さらに多項式 $n^2 - 81n + 1681$ は $n=80$ まで素数を生成することができるのです。素数全体を1変数の2次の多項式として表現することは不可能なのですが、1970年にユーリ・マチャセヴィッチは正の値をとるものが必ず素数になる19変数の多項式を見つけています。しかしその多項式もすべての素数のみを生み出す式ではないのです。

素数の研究の歴史は、紀元前300年ごろのユークリッドの時代から始まり、素数が無限に存在することの証明はユークリッド原論に示され、デュドネは「ギリシアの数論でもっとも美しい定理」と賞賛しています。

素数の個数が有限個であるとし、そのすべてを $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ とします。このとき、 $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ なる数 p を作ると、 p は、 p_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$)で割ると余り1になりますから割り切れなく、 p も素数ということになります。これから素数は無限個存在することになります。

またユークリッドは、 $M_p = 2^p - 1$ が素数であるとき、 $\frac{M_p(M_p + 1)}{2} = (2^p - 1) \times 2^{p-1}$ は完全数であることも証明しています。

$$(1 + M_p)(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{p-1}) - M_p \times 2^{p-1} = 2^p \times \frac{2^p - 1}{2 - 1} = 2^p(2^p - 1) - 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

このように、素数が無数にあることや素数の一部が完全数であることは、紀元前にユークリッドが証明したために、後世は、素数と完全数の関係、自然数の中での素数の散らばり具合といったことが研究対象となっけていきます。

M_p が素数である p については、1664年にフランスの数学者メルセンヌは、 $19 < p \leq 257$ のときは、 $p = 31, 67, 127, 257$ であることを予想します(素数である M_p をメルセンヌ数といいます)。1772年、 $p=31$ について、スイスの数学者オイラーは、その証明をしますが $p=257$ についてはさらに100年の時を経てリュカ(フランス)の成果(反例)まで待たなければなりません。

なお、オイラーから遡ること100年前、フェルマー(仏)は、 $F_n = 2^{2^n} + 1$ は素数であると予想しましたが、オイラーは $F_5 = 641 \times 6700417$ の反例をみつけています。また、オイラーは偶数の完全数は $2^{p-1}(2^p - 1)$ で与えられることも証明しています。新たな素数の発見は完全数の発見にもつながっていくのです。

また、素数のでたらめのように配置されるその散らばりの分布について、ガウス(独)やル・ジャンドル(仏)は、素数の個数 $\pi(n)$ は、 n が大きくなると、 $\frac{n}{\log n}$ に近づくことを予想します(素数定理)。この証明に取り組んだ末に、1859年、リーマンは数学

史上もっとも重要な未解決問題といわれる「リーマン予想」にたどり着くのです。一方、素数定理については、1896年、アダマー(仏)やプサン(ベルギー)により、解析的な方法を用いて解決されています。

このように人間は2300年以上の間、素数の秘密に近づこうと研究を続けていますが、ユークリッドの頃からそれほど大きな進展があるとはいえないのです。北アメリカには13年あるいは17年周期で、大量発生する蟬がいます。その周期が素数であるため「素数ゼミ」ともいわれますが、その体内時計は素数の時間を刻み、周期を守りその最小公倍数を大きくすることで交雑をなくし、大量発生します。その圧倒的な量をもって天敵の攻撃による絶滅を防いでいるのです。自然は人間ではなく蟬というちっぽけな虫に素数の秘密を解き明かしたのかも知れません。

41に話を戻しましょう。スタニスラフ・ウラム(ポーランド)は自然数を四角いらせん状に配置していくと、素数の多くは対角線上に現れることを発見しました。ウラムの螺旋において中心を41にして以降の自然数を螺旋に配置してみましょう。 $p(n) = n^2 - n + 41$ の値は、対角線上に次々と現れてきます。オイラーは $P(n)$ に素数の秘密の一旦を垣間見たのでしょうか。オイラーが見つけた美しい素数の関係式があります。

$$\frac{2^2}{2^2 - 1} \times \frac{3^2}{3^2 - 1} \times \frac{5^2}{5^2 - 1} \times \frac{7^2}{7^2 - 1} \times \frac{11^2}{11^2 - 1} \times \frac{13^2}{13^2 - 1} \times \frac{17^2}{17^2 - 1} \times \frac{19^2}{19^2 - 1} \times \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

素数により、宇宙の深淵に横たわる究極数 π が表現されるのです。オイラーは、宇宙の秘密を解明する鍵は素数であると信じ、宇宙に向かって無限に伸びる素数階段を渡そうとしたのです。

140	139	138	137	136	135	134	133	132	131
105	104	103	102	101	100	99	98	97	130
106	77	76	75	74	73	72	71	96	129
107	78	57	56	55	54	53	70	95	128
108	79	58	45	44	43	52	69	94	127
109	80	59	46	41	42	51	68	93	126
110	81	60	47	48	49	50	67	92	125
111	82	61	62	63	64	65	66	91	124
112	83	84	85	86	87	88	89	90	123
113	114	115	116	117	118	119	120	121	122

■世の中(数の世界では)、それ自身を除く約数の和がそれ自身になる 6 のような完全数がもてはやされるけど、オレ 220 だって凄いいんだけ。素因数分解すると $220 = 2^5 \cdot 5 \cdot 11$ だから、オレを除いた約数の和は、

$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+5)(1+11) - 220 = 284$$

になる。だからどうしたって?。オレのマブダチの 284 は、 $284 = 2^2 \cdot 71$ だから、 $(1+2+2^2)(1+71) - 284 = 220$

どうだい。俺達は互いに認め合う中で、自分自身も和の中に含めると、約数の和が 504 で等しくなる。オレたちはこんなに強い絆で結ばれている。完全数なんて所詮、自分を自分でしか評価できないナルシストだろ。オレ達「友愛数」グループは聖書にも「ヤコブが兄のエサウに友愛のしるしに贈った羊の数が 220」といったように取り上げられる由緒ある数なんだ。オレのメンバーは、(1184,1210)、(2620,2924)、(12,285,14,595) を始めとして 1000 組以上あるんだぞ。

■わたし 12496 ですが、「友愛数」は「完全数」をひとりよがりの数みたいな言い方するけど、私にいわせればどっちもどっちよ。1000 組以上仲間がいるっていったって、お互い交流はまったくないでしょ。それだったら完全数と大した違いはないわ。ちなみに私が所属する「社交数」グループでは、私達の自分自身を除く約数の和は、お互いを表し友達の輪を作っているの。

$$12496 \rightarrow 14288 \rightarrow 15472 \rightarrow 14536 \rightarrow 14246 \rightarrow (12496)$$

私たちはまだ 212 グループしかないけど、数 14316 なんかは 28 の社交鎖をもった大所帯なのよ。構成する総数なら友愛数なんかとは比べ物にならないわ。

■それもまた、どっちもどっちだな。僕は 103340640。友愛数は無二の親友というけど、それってお互いの意見を言い合ったら終わってしまうだろ。一方、社交数のように人数が多すぎると収集がつかなくなり、集団も群れになってしまう。

「社交数」グループは 28 の社交鎖を自慢するけどまだ 1 組しかないよな。ほとんどが 4 社交鎖の組ばかりで、3 つの社交鎖の組って入会者がだれもないって聞いている。だから「架空の鎖」(crowds:存在しない)なんて揶揄されてしまう。やっぱり、一番理想的なのは 3 つの数で構成されている場合だと思う。3 つの数は三位一体、お互いが理解でき、バランスのいい社会を作ることができる。僕の親友は、123228768 と 124015008 だけど、僕達の一つの数の約数の和は、残り 2 数の和に一致するんだ。例えば、僕の約数の和 247243776 は、

$$247243776 = 123228768 + 124015008$$

となっている。僕たちほど、深い信頼関係で結ばれている数は他にはないと思うよ。

■それはどうでしょう。あなたたちグループの大きな欠点をわたしは知っている。あなたたちってみんな偶数同士、奇数同士の組ばかりでしょ。男組とか女子会とか、そりゃ仲間内でワイワイやるのは楽しいかもしれないけど、それで終わってしまうのは不健全だわ。やはり数(人)として、偶数と奇数の間にも友情を育まなければいけないと思う。自己紹介が遅れましたが私は 48。 $48 = 2^4 \times 3$ であることから、私の約数の和から 1 と私自身を除いたものは、

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3) - (1+48) = 75$$

私の連れ合い 75 を紹介するわ。 $75 = 3 \times 5^2$ より、同じように和を求めると、 $(1+3)(1+5+5^2) - (1+75) = 48$

約数の和は友愛数と同じで等しく互いに相手を表現しているけど、私は偶数で、彼は奇数。私たちは友愛数から孤独な 1 を除いたことで、生涯の伴侶を見つけることができたの。私たちのグループは「婚約数」といいますが、仲間には、

$$(140,195)、(1575,1648)、(1050,1925)、(2024,2295)$$

みんな異性同士の組よ。でもね、わたしたちと似ているグループで自分自身を除いた数にさらに 1 を加えた数が相手を表している「拡大友愛数」って集団もあるのよね。

$$(6,160,11,697)、(12,220,16,005)、(23,500,28,917)、(68,908,76,245)$$

といったメンバーなんだけど、新たに 1 を加えていつでも自我を主張するなんておかしい。そんな不倫集団と一緒にはいしないわね。

■そんなに、偶数とか奇数とか種類に拘ることが大事なことなんだろうか。「婚約数」にしても、まだ偶数同士、奇数同士の組が入会していないだけということだろ。いまのご時世、同性同士のカップルが誕生したっていいじゃないか。大事なのはお互いを信じ尊重する気持ちではないだろうか。私達は 714 と 715。「ルース=アーロン・ペア」と 2 数で 1 つのニックネームで呼ばれる。私達はそれぞれ、 $714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17$ 、 $715 = 5 \times 11 \times 13$ と素因数分解できるけど、1 と自分自身を除く約数の和は、 $2+3+7+17=5+11+13$ 、等しくなる連続する 2 数なんだ。ちなみにニックネームは、人間界のベースボールというゲームで、ベーブ・ルースという選手が 1935 年に作ったホームラン記録 714 本を 1974 年にハンク・アーロンが 715 本を打って塗り替えたことに由来している。私達は連続する 2 数だから必ず偶数と奇数の組み合わせになるけどそんなことは気にしていない。お互い支えあって何か結果を残すことに価値を見出している。例えば、私達 2 数を掛けると、 $714 \times 715 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 = 510510$

連続する 7 つの素数の積(素数階乗)になる。きみたちの中でそんなことができる奴はいるか。

■でも、その 7 つの素数の平方の和は、 $2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2 = 666$ 。それにベースボールで 700 本以上打っているのは 3 人で、残りの 1 人であるホームラン王のバリー・ボンズは 6 試合で連続してホームランをうち 666 本になったということだろ。オタクらには黒い噂もあるって聞いている。えっ、僕の名前は何かって。僕は……。

数たちの自慢話はまだまだ続きそうです。

128√e980

…愛を告白する数

計算しようとは思わないでしょうが、その値は

$$128\sqrt{e980} = 6606.4818843256\cdots \quad (e \text{ はネイピア数})$$

となります。この計算結果が何を表すかという、値に意味は何もありません。しかしこの数は「愛を告白する数」としてインターネット上では話題になっているのです。値に意味はないのになぜ?、ということは後ほど触れるとして、愛を表現している方程式としてよく知られているものはあります。

$$x^2 + (y - \sqrt[3]{x^2})^2 = 1$$

この方程式をグラフとして描画するとどんな図形が現れるか予想できますか。

右が描画したものです。ハートマーク、数式があなたに代わり愛を語ってくれましたね。

この方程式は「愛の方程式」(The Love Formula)と呼ばれています。

なお、右図のグラフは方程式の等号(=)を不等号(≤)に変えています。この場合、「愛の不等式」になってしまい、愛が壊れそうな予感がします。ハートの内部は塗らないほうがいいのかもかもしれませんね。

数式を用いて愛を表現することは、愛が人間という種族の最大の感心事であるため、いろいろと試みられているようです。

$$y = \sqrt{1-x^2} + a|x| \quad y = -\sqrt{1-x^2} + a|x|$$

今度は2つの式ですが、先ほどよりは分かりやすく、式の中には円の方程式 $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ が含まれています。

さらに変数 a の値を変えることにより、ハートの形(丸み)が変化します。 $a=1$ のときは、理想的なハートマークであり、 $a>1$ のときは尖った愛、 $a<1$ のときは愛が丸く膨らんでいきます。そして、 $a=0$ のときは円(満)になるのです。

この変化は、まるで、男女を表している二人の愛の方程式が、寄り添い愛を紡いでいく様にみえないでしょうか。

なお、2つの方程式は、

$$x^2 + (y - a|x|)^2 = 1$$

と一つにまとめられますが、野暮というものでしょう。

このようなグラフはハート形曲線といい、その式表現も様々です。ちなみに google ではお茶目な微笑ましいサービスを提供しています。検索画面で次の式を入力し、検索ボタンを押してください。

5

何が現れるかは実際にやってみてのお楽しみ。古風ゆかしき恋文も、IT時代ではサプライズの告白になるようです。

さて、次のように愛の形を表す式もあります。

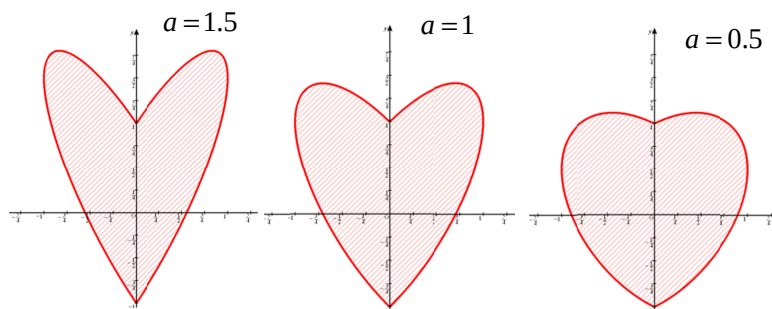
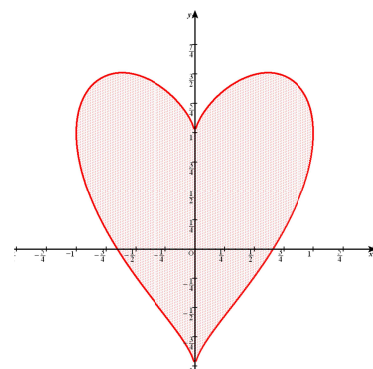
$$\frac{1}{2} < \left\lfloor \text{mod} \left(\left\lfloor \frac{y}{17} \right\rfloor 2^{-17[x]-\text{mod}(\lfloor y \rfloor, 17)}, 2 \right) \right\rfloor$$

$\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す関数であり、floor function(床関数)といいます。日本では $[x]$ (ガウス記号)として用いられます。

この数式は、Jeff Tupper(トロント大学の教授)が考案したもので、Tupper's Self-Referential Formula といいます。日本語に訳すと「再帰公式」となりますが、関数を表示させると、そのグラフの一部にこの数式自体が描画されるのです。右図は、Wolfram MathWorld で公開している実際の画像です。数式が自らを表現してしまうって驚くべきことではないでしょうか。

このことから Self-Referential Formula は、言い換えればナルシストの数式であり、Self-Love(自己愛)とみなすこともできるでしょう。人は自らを愛せなければ他人も愛せないものです。この数式は無限に広がり描画されたグラフの中に再帰的に自己を再現するのです。そう捉えると、グラフそのものが愛そのものを表していると考えてもいいのではないのでしょうか。

それでは最後に表題の数がどうして「愛を告白」しているのかお教えしましょう。白紙の紙を用意してください。その紙で数の上半分を覆ってみます。ルートの中の e (ネイピア数)が隠れてしまわないようにしましょう。よくみてください。英語で綴られた「愛の告白」が浮かび上がっていませんか?



$$\frac{1}{2} < \left\lfloor \text{mod} \left(\left\lfloor \frac{y}{17} \right\rfloor 2^{-17[x]-\text{mod}(\lfloor y \rfloor, 17)}, 2 \right) \right\rfloor$$

91=7×13 であり7も13も素数です。このように2つの素数の積で表される数を半素数(semiprime number)といいます。

半素数は簡単に作れますし、不思議でもなく、珍しくもないでしょう。そういった神秘的な性質はすべて素数がいいとこどりしてしまっています。1309=7×11×17 ですが、このように3つの素数の積で表される数を楔数(sphenic number)、といっても「だからなに」といわれてしまうかもしれません。ちなみに、91を和で表現すると、

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13=91$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=91$$

$$3^3+4^3=91$$

こんなに羅列しても、これも「まあ、面白いね」で終わってしまいそうです。このようなべき乗の性質は666がもっと神秘的に力強く主張していました。数91ひとつでは力不足のようなので、それなら91,93,95と、連続する3つの奇数を並べてみましょう。

$$93=3\times 31 \quad 95=5\times 19$$

数93,95も、半素数です。3つの半素数が並んで、3人(数)寄れば…となりますが、さて何を意味するのでしょうか。

実は、この3数は、連続する3つの奇数ですべて「素数でない数」の最初の3組を表しています(さらに、3つとも半素数)。奇数を小さい順に並べると、

$$1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41,43,45,47,49,51,\dots$$

となりますが、なかなか「素数でない連続する3数」は登場しません。ところが一旦、91からの3つがその姿をみせると、次は、

$$115,117,119,121,123,125$$

いっぺんに堰を切ったように6つの数が連続して現れます。なお、この中で半素数で3連続するのは119,121,123です。

そして、次に現れるのは、

$$141,143,145,147$$

半素数であり連続するのは141,143,145です。このように、素数でない奇数はどんどん勢力を増し、5つの連続する奇数であり、さらにすべてが半素数である

$$213,215,217,219,221$$

といったものまで調子に乗って振る舞い始めます。

これに対して、素数で3連続するもの(当然、奇数で)は、どうかというと、3,5,7の1組しかありません。

前述した奇数を小さい順に並べた数の列をみてください。3から始めて2つ置きに3の倍数が現れることが分かります。これから、3,5,7の1組以外で、3数(以上)が連続して現れることはないのです。

では「連続する素数でない3つの奇数」はどれだけあるのでしょうか。

実は、無数に存在しますが、その証明は簡単にできます。 n を奇数($n\geq 3$)として、次の3数を考えます。

$$2n(n+2)(n+4)+n$$

$$2n(n+2)(n+4)+(n+2)$$

$$2n(n+2)(n+4)+(n+4)$$

$2n(n+2)(n+4)$ は偶数で、 $n, n+2, n+4$ はみな奇数よりこの3数は奇数であり、順に共通因数 $n, n+2, n+4$ をもつことより素数ではありません。すなわちこれから素数でなく連続する3奇数が作れます。

例えば $n=3$ とすると、213,215,217という具合です。同じように、4つ連続する場合は、

$$2n(n+2)(n+4)(n+6) \text{ に、} n, n+2, n+4, n+6 \text{ を加えた 4 数}$$

であり、 m 個連続する場合は、

$$2n(n+2)(n+4)(n+6)\dots\{n+2(m-1)\} \text{ に、} n, n+2, n+4, n+6, \dots, 2(m-1) \text{ を加えた } m \text{ 数}$$

とすると得られます。

また、

$$2n(n+2)(n+4) \text{ に対して、} n, n+2, n+4 \text{ を引いた 3 数}$$

とすると、さらに小さな「連続する素数でない3つの奇数」がみつかり、 $n=3$ とすると、203,205,207であり、このような方法で得られる連続する3奇数は、加減のそれぞれにより、(203,205,207)と(213,215,217)のようにpairで現れることになります。

このように見ていくと、「連続する素数でない3つの奇数」と大上段に構えた割には、どんどん萎んでいき、その希少価値も薄れていくようです。

では、数91は、このような方法で作ることは可能かという、

$$4n(n+2)(n+4) \text{ に対して、} n, n+2, n+4 \text{ を加えた 3 数}$$

を考えて、 $n=1$ とすることで得られます。実際に代入すると、

$$90=4\cdot 1\cdot 3\cdot 5+1, 93=4\cdot 1\cdot 3\cdot 5+3, 95=4\cdot 1\cdot 3\cdot 5+5$$

これから、93と95については、その式から素数でないことは分かりますが、91は式だけからは判別できません。

そう考えると、素数でない連続する3つの奇数である最初の数91は、なかなかどうして、頑張っているのではないのでしょうか。

半素数と、まるで半人前の素数のように言われながら、虎視眈々と活躍の機会を伺いながら、一気に攻勢に転じているのです。なお、半素数は、近年、RSA 暗号の公開鍵として、注目を浴びてきています。陽の目をみるまでは諦めてはいけないということなのでしょう。

数13は忌み数であり、嫌われ者です。

北欧神話では、13人目は招かれざる神ロキ、キリスト教神話では、13人目は天使(であったころの)サタン、そして、「最後の晩餐」では、13番目の席についたのはユダであり、このように13番目に登場する人や神は異端者として扱われます。ただ、それは13番目に位置する神や人に問題があるのであって、数13に罪があるわけではありません。それにも関わらず、例えば旅行する場合を考えてみると、空港へ着くと13ゲートはなく、飛行機に乗ると座席番号13番はなく、ホテルへ泊まると12階の上は14階で、13号室は使われず、旅行日を13日の金曜日にして湖に出かけようなんてことは避けたいところでしょう。このように人間社会は13を排除しようとする傾向にあり、「それ、イジメだろ」とさえ疑いたくなります。確かに60進法時間のこの世界では、私達は、24時間、12ヶ月といったように数12を基準にして生活を送っているため、その次の数13は非調和的で馴染まないといえます。13が素数であることも馴染まない理由ですが、素数の積が数12を形成しているわけでもあります。7も素数ですが、こちらは、13とは対称的なナイスガイとして扱われ厚遇されています。結局、人間が安易に自然数の序列から数13に13番目というレッテルを貼ってしまったことに問題があるのでしょうか。正の奇数やフィボナッチ数列「1,1,2,3,5,8,13,21…」の序列では数13は、7番目のラッキーな位置にあります。そう考えれば自然数の序列の7番目の数7がラッキー数である根拠も13と同様に脆いといえます。

実は、ラッキー数(幸運数:lucky Number)と命名されている数のグループは存在しています。

正の奇数列の2番目の3に対して、奇数列から3の倍数に位置にある数を取り除きます(下図②)。次にこの列から3番目にある数7に対して、7の倍数の位置にある数を取り除きます(下図③)。同様に次には4番目の数9に対して、9の倍数の位置にある数を取り除くことを続けていくことで生成される数列の項の値を、数学者スタニスワフ・ウラム(ポーランド)はラッキー数と命名しました。何がラッキーかという、ヨセフスの生き残り問題(日本では継子立て)の抽出法に似ているからなのですが、それよりも素数列を求めるエラトステネスの抽出法に近いといえます。エラトステネスは数列の第 n 項の数の倍数がある項をふるいにかけたのに対して、ウラムは第 n 項の数の倍数である項をふるいにかけたのです。なお、ラッキー数の分布は素数に近いものが得られることが知られています。そしてこの序列で5番目に位置するのが数13なのです。

①	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	...	
②	3		7	9		13	15		19	21		25	27		31	33		37	39		43	45		49	51		55	57		61	63		67	69	...	
③	3		7	9		13	15			21		25	27		31	33		37			43	45		49	51		55	57			63		67	69	...	
④	3		7	9		13	15			21		25			31	33		37			43	45		49	51		55				63		67	69	...	
⑤	3		7	9		13	15			21		25			31	33		37			43			49	51		55					63		67	69	...
⑥	3		7	9		13	15			21		25			31	33		37			43			49	51							63		67	69	...

幸運はフォーチュン(fortune)の英訳でもありますが、フォーチュン数(運命数:Fortunate Number)といわれる数もあります。それは、素数を小さい順に並べるとき、 n 番目までの素数 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ の積 $p(n) = p_1 p_2 p_3 \dots p_n$ に対して $p(n) + m$ が素数になるような最小の自然数 m ($m \geq 2$)で生成される数のことです。

例えば、 $n=1$ のときは、 $p(1)=2$ であり、 $2+m$ が素数になるような最小の m は、4,5,6,7,…を考えると5が素数より、 $m=3$ 。これが最初のフォーチュン数です。 $p(2)=2 \cdot 3=6$ では、8,9,10,11,12,…だから、11が素数より $m=5$ 。以下このように続けて抽出していきます。なお、 $m \leq p_n$ のとき、 m は p_k ($k=1, 2, \dots, n$)の積で表されることより、 $p(n) + m$ は素数ではありません。すなわち $m > p_n$ に対して考えればいいことになります。

例えば $n=4$ のときは、 $p(4)=2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7=210$ だから、 $m \geq 8$ を調べると、218,219,220,221,222,223,…。223が素数より、 $m=13$ 。数13は4番目のフォーチュン数なのです。同様に抽出を続けると、次の数列が得られます。

3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 37, 47, 59, 61, 67, 71, 79, 89, 101, 103, 107, 109, 127, 151, 157, 163, 167, 191, …

さて、この抽出方法ですが、ユークリッド原論の中にある「素数は無数に存在する」ことの証明に似ています。素数の個数が有限個であり n 個であるとすると、 $p(n)+1$ は新たな素数であり矛盾が生じ背理法により証明できるわけですが、フォーチュン数は、その次に現れる素数までの個数を示しているのです。なお、フォーチュン数はすべて素数であることが予想されています。このように、数の序列の規則性により、数13は、

4番目のフォーチュン数、5番目のラッキー数、6番目の素数、7番目のフィボナッチ数であり、不吉というよりむしろ幸運な数の序列に含まれる数なのです。

60進法の中で数13は非調和であると述べましたが、1年は52週であり、これを $4 \times 13=52$ とみれば、13週を節目に春夏秋冬が移り変わるわけです。数13は、四季の彩りを変える数であり、非調和どころか、調和を演出しているとも言えるのです。(ランプは、4つの種類のカードがそれぞれ13枚あり、 $4 \times 13=52$ 枚で1組ですが、これから対等性のある無数のゲームが生み出されることも面白いのではないのでしょうか)。

また、1週は7日ですから、 $52 \times 7=364$ 。すなわち52週は364日で、1年365日より1日足りません。1日を陽が照っている時間とするならば、その間の夜の日数は $13 \times 4 \times 7=364$ 日ということになります。この夜が漆黒の闇の世界か、それとも月明かりに浮かぶ淡い光を湛える世界とみるかで数13はガラリとその装いを変えます。

月光を弦にアルペジオを奏でたくなる夜、ピーター・パンやティンカー・ベルが点滅する星の光の間を縫い飛翔しているようなロマンチックな寓話の世界の住人が数13であることを願いたいものです。

19は8番目の素数であり、その逆数は(整数 n に対して)最大の循環節 $n-1$ をもつ小数として知られています。また、

$$19^5 + 19^2 + 19^1 + 19^3 + 19^5 + 19^6 + 19^4 + 19^0 = 52135640$$

の計算をみると、計算結果の右辺は、左辺の各指数の左からの並びに一致しているという面白い性質もあります。

でも数19を有名にしたのは次の問題でしょう。

「Aha, その全部と七分の一とで、十九になる」

ここで用いられているAha(アハ)は、わかった、なるほど、といった驚きや喜びを表す感嘆詞ではありません。「多数」「量」といった「変数」の意味であり、それを x とおいて問題を式で表せば、

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

となります。この問題は今から3700年前のエジプトのアーメスのパピルス(Papyrus)に記載されているものです。

1857年、エジプトで転地療養をしていた考古学者、ヘンリー・リンド(スコットランド)は、ナイル湖畔のルクソールという村の店で偶然このパピルスを見つけました。リンド氏の死後、パピルスは大英博物館に寄贈され、以後、リンド数学パピルス(Rhind Mathematical Papyrus 略称RMP)と呼ばれ、世界中の数学者、考古学者の研究の中心となります。パピルスは、「算術(RMP1-40)」、「幾何(RMP41-60)」、「雑題(RMP61-87)」の3つの章からなり、上述の問題は「算術」の中にある「アハ(量)の問題」(RMP24-29)の巻頭を飾っています。そしてこの問題は、人間がその歴史の中で最初に解いた代数問題であり、この時代にすでに代数が存在していたことは驚くべきことといえるでしょう。

また、「雑題」のRMP79には次の問題が掲載されています。

7件の家では7匹ずつの猫を飼っている。
それぞれの猫は7匹ずつのネズミを捕る。
それぞれのネズミは麦の穂を7本ずつ食べる。
それぞれの麦の穂からは7ヘカット(容積単位)の麦がとれる。
では、これらの数の合計はいくらか。

(答え)

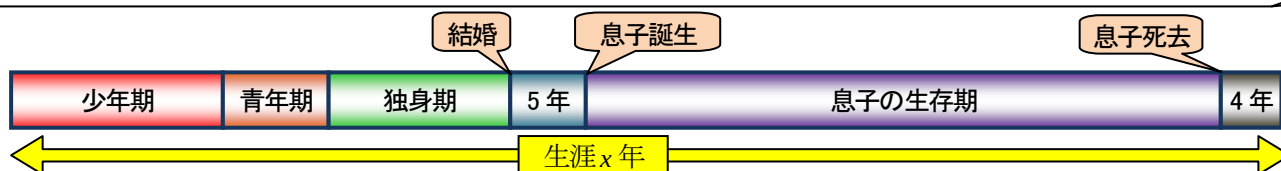
$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = \frac{7(7^5 - 1)}{7 - 1} = 19607$$

※RMPの解答は等比数列の和の公式は用いていません。

猫、ネズミ、麦の穂といった異なるモノの数の合計をとることはナンセンスかも知れませんが、この問題が一級品のパズルであることは疑いのないことです。その発想には等比数列の概念がすでに芽生えているのです。

ところで、代数を体系的にまとめたのは、代数の父と呼ばれるディオファントス(Diophantus)といわれています。ギリシア時代の数学者で没年は不明なのですが、84歳まで生きたということは分かっています。彼の弟子の一人が記したギリシア詩歌集の1篇が生涯を詠んでいるのです。

ディオファントスは、その生涯の6分の1を少年期、12分の1を青年期として過ごした。その後、生涯の7分の1を経て結婚し、5年後にひとり息子を授かった。しかし、その子は父の一生の半分しか生きずにこの世を去った。その悲しみの4年後にディオファントスも亡くなった。



ディオファントスの生涯を x 年として、式で表すと、

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

となり、 $x=84$ が得られます。これから、次のような伝記が綴られます。

少年期14年、青年期7年を過ごし、独身12年の後に結婚(33歳)し、38歳で息子が誕生するがディオファントスが80歳のときに息子は亡くなる。そして、84歳でディオファントスもその生涯を閉じた。

この問題は、リンド・パピルスの代数問題と大した違いもない簡単な1次方程式であり、その答えも12と7の最小公倍数から容易に予想はできてしまいます。ディオファントスは、このように単純な方程式で自分の伝記を記したことに天国で憤慨しているかもしれません。彼はディオファントス方程式という複雑な不定方程式を研究したことでも知られており、その研究により、方程式は特定問題の数の関係式を導くことから、数のすべてを類別する整数論という純粋理論へと発展していくのです。

そして、17世紀、フランスのデカルトは、未知数を今日普及している記号や符号で表す記号代数学を確立し、代数は一気に花開くのです。

代数(Algebra)はal-jabr(まとめる)を語源とし、中世では、代数学者(algebraist)は「骨をまとめる人」、すなわち外科医と同意語でした。デカルトがディオファントスを、ディオファントスがリンド・パピルスを知っていたかどうかは分かりません(あまりに年代の開きがあるのです)。しかし、代数の本質の部分は、骨の中の遺伝子情報として、数千年の時の流れの中で途切れることなく脈々と受け継がれていたのかも知れません。

電卓で数字遊びをしてみましょう。

電卓の数字の配列は右図のようになっていますね。

数字のボタンを押すルールを決めて、2桁の数を4つ作り、その和を求めます。

例えば、4隅の4つの数字を2回ずつ押すルールを決めると、4つの数11,33,77,99になり、その和は、

$$11+33+77+99=220 \quad \cdots\textcircled{1}$$

になります。4隅の各数字に対して、2番目に押す数を5にすると、

$$15+35+75+95=220 \quad \cdots\textcircled{2}$$

4隅の次の数を上下にある数字にすると、

$$14+36+74+96=220 \quad \cdots\textcircled{3}$$

4隅の次の数を左右にある数にしても、

$$12+32+78+98=220 \quad \cdots\textcircled{4}$$

最初の数を4隅ではなく、真中の5にしてみましょう。上下と左右の数を次に押すと、

$$52+54+56+58=220 \quad \cdots\textcircled{5}$$

2,6,8,4の並びをぐるぐる回してみても

$$26+68+84+42=220 \quad \cdots\textcircled{6}$$

このように、あるルールを決めて2桁の数の和を求めると220になることが多いようです。

面白いと思いませんか。ではどうして220という数が得られるのか調べてみましょう。

各数から5を引いた数-4~-1を配置してみます。

右図のようになりますね。ここで、先ほどの幾つかのルールを当てはめてみます。

まず、2桁の数を十の位と一の位に分けて、それぞれの和を求めてみましょう。

①の十の位は、1,3,7,9ですが、これは-4,-2,2,4に対応するのでその和は0になります。

だから、一の位も0です。

②、③、④も十の位は同じ数なのでその和は0です。それぞれの一の位の和は

$$\textcircled{2} 5+5+5+5 \rightarrow 0+0+0+0=0$$

$$\textcircled{3} 4+6+4+6 \rightarrow -1+1-1+1=0$$

$$\textcircled{4} 2+2+8+8 \rightarrow -3-3+3+3=0$$

もう分かりましたね。⑥についても

$$\text{十位 } 2+6+8+4 \rightarrow -3+1+3-1=0$$

$$\text{一位 } 6+8+4+2 \rightarrow 1+3-1-3=0$$

このように、規則正しいルールを設定すると、十位、一位ともにその和は0になることが多いのです(その和が0になるようにルールを設定しているといった方がいいかもしれませんが)。

次に、元の数に戻すために、すべての数に5を加えると、

$$\text{十位の数の和 } 5 \times 4 \times 10 = 200$$

$$\text{一位の数の和 } 5 \times 4 = 20$$

になるので、元の数の総和は220ということになります。

さて、この原理は、3桁の4つの数の和についても応用できることが分かります。

例えば、4隅の数字をそれぞれ3回叩き、3桁の数を作るとその和は、

$$111+333+999+777=2220$$

中央の5を含むように、対角線、縦、横の和を求めると、

$$159+357+456+258=2220$$

中央の5を含まないように、縦、横の和を求めると、

$$123+369+987+741=2220$$

その他にも、

$$222+444+666+888=2220$$

$$111+333+999+777=2220$$

$$456+654+258+852=2220$$

真ん中の数字5がルールのkeyになっていることが分かりますね。

4桁の数はどうでしょうか。

2×2の正方形の中の数を隅を起点にして反時計回りにして4桁の数を作り、その和を求めると、

$$5412+5236+5698+5874=22220$$

5を除いた数の囲みの中から、隅の数を起点にして、反時計回りに4数選んで4桁の数を作り、その和を求めると、

$$1236+3698+9874+7412=22220$$

4桁の6数字を加えるルールを設定すると、さらに不思議度はアップしますね。この原理は数7で紹介しているカレンダーマジックにも応用ができます。ルールのある数の並びは秩序をもたらす、何か人間社会と同じですね。

7	8	9
4	5	6
1	2	3

2	3	4
-1	0	1
-4	-3	-2

3912657840

艶かしい小町数

10桁である四十億近くのこの大きな数にどんな意味があるかは、数字の並びで分かるかと思います。
0から9までの数字を1つずつ並べてできる数であり、このような数を小町数といいます。

小町数の総数は10桁めが0のものを除くと、

$$10! - 9! = 3265920 \text{ 個}$$

これだけたくさんある小町数の中で、表題の数にどんな特徴があるでしょう。

この数は1から10までのすべての数で割り切れるといったら驚きますか。

でも、それほど大したことではないのです。なぜならこのように割り切れる小町数は、11459個もあります。

1から10の各数を素因数分解すると、右表のようになります。

このことから、1から10までのすべての自然数で割り切れるためには、小町数は因数 $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ があればいいことが分かります。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	2^2	5	$2 \cdot 3$	7	2^3	3^2	$2 \cdot 5$

すべての小町数の各位の数の和は1から9までの和より45です。各位の数の和が9の倍数であればもとの数は9の倍数より、すべての小町数は9の倍数になります。また、10で割り切れるためには1の位は0になります。

$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ から $3^2 \cdot 2 \cdot 5$ を除くと $2^2 \cdot 7 = 28$ 。すなわち、下二桁が10の小町数が28で割り切れればいいのです。

ここで、4の倍数の判定は下2桁が4の倍数であり、7の倍数の判定は、下位から3桁ずつ順に奇数番目は加え偶数番目は引いた数が7の倍数であることから、この条件を満たす小町数は、結構な個数になることは予想できるのです。

もっとも小町数の総数に対しては0.35%であり、割合としては小さいのですが。

さて、その11459個の中でもこの小町数の性質は傑出しています。

数の並びから適当な場所の2桁をとってみましょう。

39, 91, 12, 26, 65, 57, 78, 84, 40

9個の2桁の数が得られますが、元の小町数は、これらのどの2桁の数でも割り切れるのです。

小町数を素因数分解してみるとその理由が分かります。

$$3912657840 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 13 \times 19 \times 449$$

どの2桁の数も合成数であり、その因数はこの素因数分解の中にみつけることができます。

三百万個以上もある小町数には、このような個性的な数がいろいろあります。幾つか紹介しましょう。

2438195760は、何と1から18までのすべての数で割り切れます。当然、2倍した数もその性質を満たすことになりますが、その数は、4876391520、やはり小町数になっています。この性質をもつ小町数は他に、

4753869120, 3785942160

が知られています。

小町数にちょっと足りない(0が使われていない)987654321は、小町数を生みます。

$$987654321 \times 2 = 1975308642$$

3の倍数以外の数2,4,5,7,8を掛けたものはみんな小町数になります。

小町数は素数ではありませんが、素数を誘う小町数もあります。

小町数1234567890に1を加えた数1234567891は素数です。そして、2数の並びをつないだ12345678901234567891は素数であり、さらには1234567891234567891234567891も素数といったら信じられるでしょうか。

次の3つの小町数は、三人小町です。

9876543210, 1234567890, 8641975320

その理由は、

$$9876543210 - 1234567890 = 8641975320$$

2つの小町数の差が残りの小町数を表します。

ここで、小町数1234567890の末尾の0を先頭に移して0123456789としてお色直しをします。

$$9876543210 - 0123456789 = 9753086421$$

また新しい小町数がふらふらと寄ってきました。

数の先頭に0がある場合も(ネオ)小町数として許すと、0429315678は際立った性質を披露します。

$$0429315678 = 04926 \times 87153 = 07923 \times 54186 = 15846 \times 27093$$

小町数が小町算により表現できるのです。

このように、いろいろな小町数が千紫万紅で咲きほこるのですが、単独の小町数の性質としては、3912657840は凄いのと思うのです。この小町数の性質は、言い換えると、「その約数が数の並びにすべて見えている」とみることができます。そのため、小町数3912657840はヌード小町とも名付けられているのです。そして、このようなヌード小町は、他には存在しないのです。

ちなみに、9517634280は素因数分解すると、 $9517634280 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17 \times 19 \times 1063$

この小町は、1から12までの数で割り切れます。また、数の並びから適当な2桁の場所を選ぶと、下2桁の80を除いてすべての数で割り切れます。残念ながら、最後の1枚がめくることができないのです。命名するならばセミヌード小町ということになりましょうか。

誰ですか？、こちらの小町の方が艶かしいと思っているのは、

$\frac{1}{2}$ (2)

等価のバランスをとる数

確率 $\frac{1}{2}$ は心理を揺さぶる数として紹介しました。でも、 $\frac{1}{2}=0.5$ とし、小数としてみると随分違った印象になります。

0.5 は 1 を基準とした半分の割合である数。 $\frac{1}{2}$ は 1 を同等・同質の 2 つのものに分ける半々(fifty-fifty)を示す数字です。

例えば、1 枚の硬貨を投げたときに表がでる確率 $\frac{1}{2}$ は、表と裏が等価値としてバランスをとっている状態とみることができます。表に対して裏は対義語(反対語)ですが、そのそれぞれがハーフという関係ではなく、語句として対等と捉えます。ところが、数学の確率として考えると裏は表の余事象であり、表の否定になるのですが、それは微妙なニュアンスを含みもってしまうのです。

硬貨を投げるとき、「表がでること」の否定は「表がでない」ことであり、それは「裏がでる」ということでしょうか。まず、表がでる状態を考えてみてください。投げた硬貨を床に落とすと硬貨は何回か跳ね小刻みに振動しながら硬貨の表面を上にしてやがて止まります。このことが硬貨の表がでるということです。そうならない状態はというと、もちろん裏面を上にして止まるということもありますが、ひょっとしたら床に垂直に硬貨が立つことも起こり得るのです。硬貨の厚みが十分あればその可能性はより高くなります。確率は「同様に確からしい」状態での試行ですが、硬貨を投げるときは実際の状態ではなく表と裏しかない理想の状態を想定し、事象の否定が事象の反対に転嫁し、そこにバランスをとる $\frac{1}{2}$ が生まれるのです。ところで、反対と否定の違いは何でしょうか。

反対は、語句・単語に対して意味が対をなすもの、逆を表すものであり、対義語(反対語)というように、もとの語句・単語の言葉に対して考えます。「白である」の反対は白に対して「黒である」ということになります。

これに対して否定は、語句や単語を否定するのではなく、形容詞、形容動詞、動詞、接続詞といったものを否定します。「白である」の否定は「白でない」であり、白以外の無数の色を示すため $\frac{1}{2}$ でのバランスはとれなくなります。

国語という言語は多くは反対を扱い、数学という言語は否定を扱います。ただ、整数に対して「偶数である」の否定は「偶数でない」ですが、整数は偶数と奇数のみで構成されることにより、「偶数でない」ことは「奇数である」ことであり、いつのまにか反対を述べています。また、表に対して裏のように、否定が対をなす 2 値しか認めないこともあり、否定の捉え方が危うくなるのです。

数学でも否定が $\frac{1}{2}$ を中心に据えることがあります。論理では、正しい、誤りが判断できる式や文章を命題といい、正しいものを真の命題、誤りであるものを偽の命題といいます。偽は真の否定であり反対でもあります。

いま、「○○ならば○○である」という命題、具体的には「人間ならば動物である」という命題を、

「動物ならば人間である」「人間でなければ動物ではない」「動物でなければ人間ではない」

このように書き換えます。それぞれをもとの命題に対して、逆、裏、対偶といい、実はもとの命題と対偶の真偽は必ず一致するのです。上の例で確認して下さい。では、「グイェットするならば痩せる」の場合はどうなるでしょう。

逆:「痩せるならばグイェットする」裏:「グイェットしないならば痩せない」対偶:「痩せないならばグイェットしない」

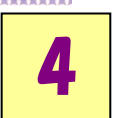
元の文章が命題かどうかは怪しいのですが、願望的な命題?とするならば、一番納得できないのはネガティブな表現である対偶でしょう。その原因は時間にあります。「グイェットするならば痩せる」ということは「いまグイェットをすればやがては痩せる」のであり、未来の予測を述べているのです。だから対偶は、痩せないことは現在とし、グイェットは過去のこととみて、「痩せないのはグイェットしなかったからである」。すっきりしましたね。

パズルをひとつ。

4 枚のカードがある。カードの片方の面には、数字が書かれていて、もう片方の面には犬と猫の絵が描かれている。いま、4 枚のうち、2 枚のカードは、3 と 4 の数字、残り 2 枚のカードは、犬と猫の絵が見える状態で机の上に置いてある。このとき、

「奇数のカードの裏は犬の絵である」

という仮説が正しいかどうかを調べたい。最初にめくるのは 3 のカードである。では、2 枚めはどのカードをめくればいいだろう。



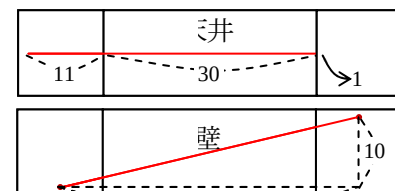
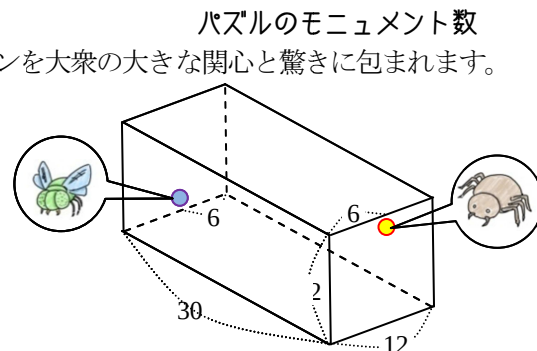
犬のカードではありません。「犬のカードの裏は奇数である」は逆を示します。逆は真なりという言葉に騙されてはダメですね。正解は、もちろん猫のカードです。

このように、ある命題に対して、否定を用いて得られる対偶は、等価の命題であり fifty-fifty の関係にあります。否定することがいつのまにか $\frac{1}{2}$ のバランスをとっているのです。

1905年1月18日。Daily Mail 紙が掲載したパズルにより霧の都ロンドンを大衆の大きな関心と驚きに包まれます。



方体の
下の中
床から
床を伝
の最短



読者の多くの解答は、蜘蛛は正方形の壁を上に進み、壁に垂直に天井を伝い、突き当りの正方形の壁を下に進むというものでした(あるいは、床に降り、また這い登ってもいい)。その場合の距離は、 $1+30+11=42$ (フィート)

しかし、パズル愛好家達は、この手の問題は厚紙の直方体を考えて2つの正方形の壁と手前の長方形の壁の部分を展開して蜘蛛と蠅を結べばいい、としたり顔に講釈し、その距離は、

$$\sqrt{42^2 + 10^2} = \sqrt{1864} = 43.174 \text{ (フィート)}$$

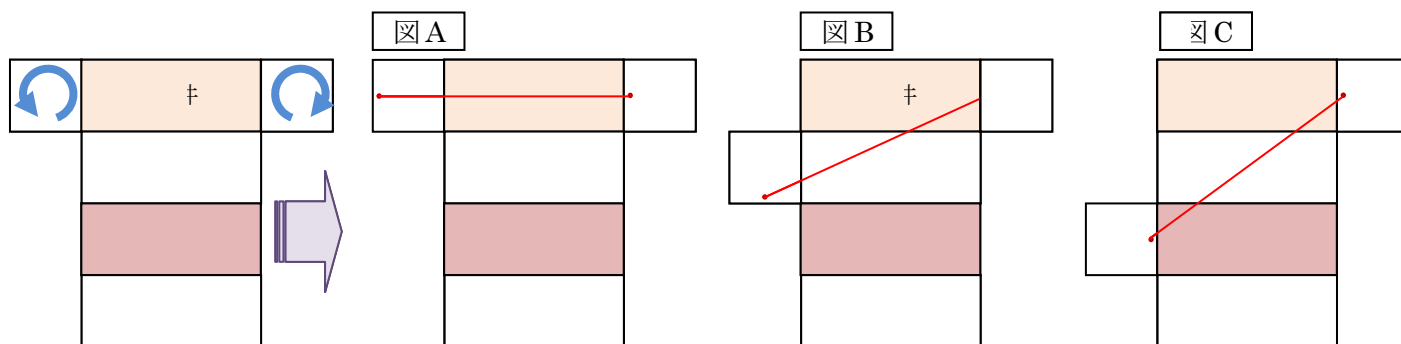
としますが残念ながら単純に天井を這うルートより長くなってしまい臍を噛むことになります。

結局、答えは 42 フィートという誰もが納得するつまらない結論に至ります。ところが、出題者であるパズリストのデュードニーが提示した答えはなんと 40 フィート。経路は、壁、天井、横壁、床、壁と、蜘蛛は立方体の6面中の5面を通過するという信じられないものだったのです。

直方体の展開図から蜘蛛と蠅を結ぶ直線を求める考え方に間違いはありません。しかし、その展開図の数は16通りにもなります。それは下左図のように、長方形を4枚縦に並べ、天井の両側に蠅と蜘蛛がいる正方形の壁を配置し、蜘蛛がいる右側の正方形は時計回り、蠅がいる左側の正方形は反時計回りに90°ずつ回転させて下の長方形に移してみると分かります。ここでは、蜘蛛の位置を天井から a フィート下、蠅の位置を床から a フィート上の位置に配置した展開図を考えてみましょう(a の取りうる値の範囲は、 $0 \leq a \leq 6$)。この中で、蜘蛛と蠅の相対的な位置が同じものについては除くと、その展開図の数は9通りになります。さらに、蜘蛛と蠅を直線で結ぶと展開図からはみ出してしまふ、ある展開図での距離は別のそれよりも明らかに長い、こういったものを除くと展開図の数は激減し下図のA,B,C図の3図だけになります。A,B,C図の最短距離をそれぞれ、 L_A, L_B, L_C とすると、

$$L_A = 42, \quad L_B = \sqrt{(36+a)^2 + (18-a)^2} = \sqrt{2a^2 + 36a + 1620}, \quad L_C = \sqrt{(30+2a)^2 + 24^2} = \sqrt{4a^2 + 120a + 1476}$$

で各図の最短距離は求められます。



したがって、 $a=1$ のときは、 $L_A = 42$ 、 $L_B = \sqrt{1658} = 40.719$ 、 $L_C = \sqrt{1600} = 40$ であり図Cが最短経路になるのです。

a の値によってどの図が最短経路になるか調べてみましょう。

$L_B < L_A$ のときは $a < 3.37$ 。 $L_C < L_B$ のときは $a < 1.65$ 、 $L_C < L_A$ のときは $a < 2.23$

これから、右表のように距離の大小関係が得られます。

アメリカのパズリストのサム・ロイドはデュードニーの好敵手として知られていますが、彼もこのパズルが随分気に入ったようで、 $a=3$ の場合を出題しています。今度は、図Bが最短経路で図Cが一番長くなります。ロイドのデュードニーに対する気持ちが垣間見えます。後に、デュードニーは自著「カンタベリー・パズル」に彼の有名問題と一緒にこの問題も再掲しています。その解説では、 $a=2, 3, 4, 5, 6$ の場合の解答を読者に委ねているのですが、これもまた、その読者の一人にサム・ロイドを暗に意識しているようで、その駆け引きは面白いものがあります。

$a=1$ の最短経路は読者をミスリードさせ、さらに経路は5面を通るという意外性があり、なおかつその結果は40フィートという整数値で得られます(この値は3,4,5のピタゴラス数の8倍になるよう工夫されているのです)。

数40はデュードニューというパズリストと彼の知的パズルを生んだモニュメントの数といえるのではないのでしょうか。

a の範囲	距離の大小
$0 < a < 1.65$	$L_C < L_B < L_A$
$1.65 < a < 2.23$	$L_B < L_C < L_A$
$2.23 < a < 3.37$	$L_B < L_A < L_C$
$3.37 < a < 6$	$L_A < L_B < L_C$

$$e^{\pi}$$

超越数の中の超越数

円周率 π やネイピア数 e は無理数(循環しない無限小数)ですが有理数を係数とする多項式の解としては得られません。このような無理数を超越数といいます。例えば、 $\sqrt{2}$ は $x^2=2$ の解なので超越数ではないフツウの無理数で、これを代数的数ともいいます。

2つの数の近似値は、

$$\pi = 3.141592653589723846\cdots \quad e = 2.718281828459045\cdots$$

ですが、では、この2数を組合せて作った数は超越数でしょうか。

2数の和 $\pi+e$ と積 πe は、少なくとも一方は超越数であることは1971年、ブルベイカー(D.Brubaker)により示されています。その証明は簡単なものです。

$$p = \pi + e, q = \pi e$$

とおき、 p, q はともに代数的数であるとします。

2次方程式 $x^2 - px + q = 0$ の解は、左辺を因数分解すると $(x - \pi)(x - e) = 0$ 。

これより、 $x = \pi, e$ となります。

代数的数を係数とする多項式の解は代数的数なのですが、 π と e は超越数(代数的でない数)ですから矛盾しています。すなわち、 p, q の少なくとも一方は超越数ということになるのです。ただ、この証明は1つの数が超越数で他方が代数的数または超越数であることをいっているだけで、 $\pi+e$ と πe のどちらがその超越数であるかは分かりません。

超越数の判定は難しいものなのです。では、2数を用いて作られるべき乗 π^e 、 e^{π} 、 e^e 、 π^{π} は超越数でしょうか。

この4つの数の大小関係は、関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ のグラフから見るができます。

$f(x)$ は $x=e$ で最大値をとることから、 $f(\pi) < f(e)$ 。

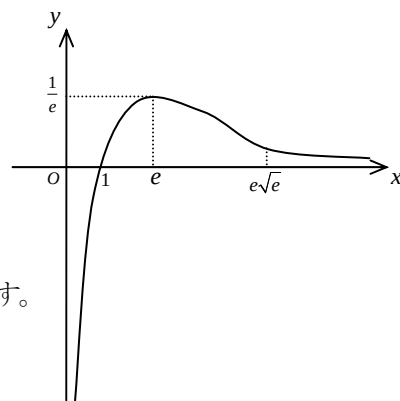
すなわち $\frac{\log \pi}{\pi} < \frac{\log e}{e}$ より $e \log \pi < \pi \log e$ 。これから $\pi^e < e^{\pi}$ となります。

また $e < \pi$ より明らかに、 $e^e < \pi^e$ 、 $e^{\pi} < \pi^{\pi}$ ですから、

$$e^e < \pi^e < e^{\pi} < \pi^{\pi}$$

この4つの数の中で唯一 e^{π} だけが超越数であることが次の定理により証明できます。

α を代数的数(ただし、 $\alpha \neq 0, 1$)、 β を有理数でない代数的数とすると、 α^{β} は超越数である。



ゲルフォントとシュナイダーにより独立して証明された指数関数の値の超越性に関する定理です。

この定理を用いると、 $\alpha=2$ 、 $\beta=\sqrt{2}$ とすると、 $2^{\sqrt{2}}$ は超越数ということになります。でも、 e^{π} は $\alpha=e$ 、 $\beta=\pi$ として適用することはできません。そこでさらに次の公式を用います。

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \cdots (*)$$

これは、複素解析で重要な働きをするもので、オイラーの公式といわれています。

特に $\theta = \pi$ であるとき、

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

円周率、ネイピア数、そして実数と虚数の単位である $1(0)$ と i がひとつの式の中に出現します。物理学者ファインマンは「至宝の公式」といいましたが、これは神が人間に与えた公式ともいえるのです。

$e^{i\pi} = -1$ の両辺を $-i$ 乗してみましょう。 $(e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}$ より、 $e^{\pi} = (-1)^{-i}$ 。

なんと不思議な結果が得られます。ここで $\alpha = -1$ 、 $\beta = -i$ とすると、 α は代数的数であり、 β は有理数でない代数的数ですから、 e^{π} は超越数であることが示されるのです。

ちなみに(*)において、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ とすると、 $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ 。両辺を i 乗すると、 $e^{\frac{\pi}{2}} = i^i$ 。

i の i 乗は実数になることも不思議ですね。

さて、 e^{π} は超越数であることが証明されましたが、その近似値を求めると、

$$e^{\pi} = 23.140692632779269005\cdots$$

数の並びをよくみてください。1の位と小数第1位、2位にチャッカリ円周率の3.14が顔を出していることが分かりますか。さらに見ていくと円周率の並びの一部926も見受けられます。そこで e^{π} と π の差を計算してみると、

$$e^{\pi} - \pi = 19.9990999\cdots$$

その値は整数20に限りなく近づきます。 e^{π} と π はともに超越数ですが、その差が超越数であるかは分かりません。でも、ちょっとこちら側の世界に近づいてくれているようで嬉しいと思いませんか。

6はそれ自身を除く約数1,2,3の和がもとの数6に等しい性質をもち、ユークリッドはこれを完全数と命名しました。6は自然数で最初に現れる完全数ですが、ギリシャ時代では他の意味においても完全であることの象徴でした。

ピュタゴラス学派が発見した最初のピュタゴラス数3,4,5は、三平方の定理である

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

を満たすだけでなく、その周の長さの半分は6であり、その面積もまた6になります。

ピュタゴラス学派は、最初の偶数2を女性数、根元の数である1を除く最初の奇数3を男性数と考え、その積である6を健康、愛そして結婚を表す数としています。互いに離れることのない結婚はまさに完全であることの象徴なのです。後世、聖アウグスティヌスは「6は完全ゆえに、神は世界を6日間で作り上げ、その6日間の神の仕事がなければ世界はたいらのままであったろう」と述べています。

女性数2と男性数3を1辺とする立方体の体積の積は、 $2^3 \times 3^3 = 216$ ですが、ピュタゴラスはこの数を神聖視したとされています。6の累乗は最後の桁が常に6になるため循環的な数であり、6の3乗である216日は受胎の後、胎児が母体に留まる最短の日数と考えられました。そして、古代ギリシャの書物には、ピュタゴラスの輪廻転生の周期もまた216日であると記されています。その転生で彼は過去に植物であったこと、動物であったことを主張し、自然界すべてのものが幸福になれると信じていました。さらには太陽系のすべての惑星(ピュタゴラスは宇宙をコスモスと名づけました)に生物が生息しており、地球から遠く離れるほどその生命体は人類より進化しているとも考えました。だから創始者であるピュタゴラスを学派の人達は地球外の高度な生命体(宇宙人)であると見ていたようです。

そして数は純粹であり、物質的な変化に影響を受けることのない神のように尊大であり、「万物は数である」とし、「数はもっとも知恵あるもの」と考えました。自然界のモノの基準である数は粒子(有理数)でなければならず、学派は粒子論を説くようになり、白い衣服をまとう教団へと転じていきますが、やがて無理数の発見により教義は決壊し滅んでしまいます。

しかしその思想は、ピュタゴラスの影響を受けたプラトンへと受け継がれます。プラトンの著書「饗宴」は、彼の師であるソクラテスに招かれた5人の客がギリシャ神話のエロス神を称える対話で進められる恋愛論ですが、6を神聖化した愛と結婚が語られるのです。著書「メノン」では、ソクラテスに「魂は不死であり、その輪廻の過程ですべてのことを経験してきており、学ぶことはそれを思い起こすことである」(アナムネーシス:想起説)と語らせ、ピュタゴラスの思想を発展させています。

また、プラトンの著書「国家」の第8巻には、後にプラトン数と呼ばれる不可解な数の記述がありますが、ここにも完全数6が隠されています。数3,4,5はそれぞれ、政治家、市民、法律を表し、これを3辺とする直方体の体積60は国家を意味すると考えました。その体積の4乗である12,960,000は国家の存続日数であり、この聖数がプラトン数であると後世の学者は分析しています。プラトン数は、年に換算すると36,000年(1年は360日とします)。これらのすべての数は6により形成されているのです。

そして数3,4,5の立方数の和は、

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

この等式は、1辺の長さ6の立方体は1辺の長さが3,4,5である3つの立方体に分割できることを示しています(実際、もとの立方体を8片に切り離すことで3つの立方体が組めることが知られています)。連続した3つの整数x,y,z,wに対して、

$x^n + y^n + z^n = w^n$ と分解することができるのは、 $6^3 = 216$ 以外にもなくこの美しい数216もまた聖数と考えられました。

なお、イスラム圏ではこの世を立方体の6面のカゴとみなし、人間はその中に捕らえられており、視覚、聴覚、触覚、味覚、嗅覚の五感と地、水、風、火の四大に束縛されて抜け出すことはできないと考えました。

また、ヘルメス神秘主義の六芒星形は、上向き、下向きの2つの正三角形を組合せて作られますが、上向きの三角形は、善・努力・創作の象徴、下向きの三角形は、物質・悪・破壊の象徴であると考えられ、これにより精神—物質、神—混沌、空間—時間の両極を示すことになり、宇宙が形成されると説いています。

どちらも、ギリシャ思想と比較すると、ネガティブな神秘性に包まれています。それでも世界の創造という面では同じ価値観に基づいているのです。

さて、近世、216を魔法陣の中に封じ込めたパズリストがいます。その名はデュードニー。

彼は、縦、横、斜めの積が一定になる3×3魔法陣で、その積が一番小さいものを発見しました。その積は6の3乗の216であり、右のような魔法陣が作られます。歴史(思想史)に登場する6に対する彼なりの解釈なのでしょうか。

もう一つ、6の不思議な性質を紹介しましょう。

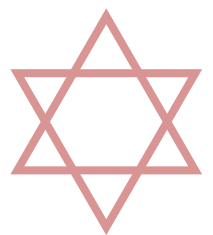
連続する3つの整数で一番大きな数が3の倍数であるものを考えます(連続する3整数は必ず3の倍数になります)。その最小のものは1,2,3であり、その和は $1+2+3=6$ 。これが完全数の定義でした。

最大数が3の倍数である連続する3つの整数で次に現れるのは、4,5,6ですが、その和は $4+5+6=15$ 。次に、15の各位の数の和を求めると、 $1+5=6$ 。また6になりました。ひょっとしたらと思いませんか。その予想を適当な数で調べてみましょう。例えば、214,215,216とします。

$$214 + 215 + 216 = 645 \Rightarrow 6 + 4 + 5 = 15 \Rightarrow 1 + 5 = 6$$

このように、各位の数の和を1桁になるまで計算することを行くと、その最終的な和は必ず6になるのです。プラトン数についても計算して、同じ結論になることを確認して下さい。

このように人類が数6を聖数化する以前に、既に神によって数6には輪廻転生のシステムが組み込まれていたのです。



12	1	18
9	6	4
2	36	3

239

169

……無理数に背伸びする有理数

$\frac{239}{169} = 1.41420110834\ldots$ 小数で表しその数の並びをみると、どこかで出会ったような気がしませんか。

「ヒトヨヒトヨニヒトミゴロ…」。

そうです。無理数 $\sqrt{2}$ の小数点以下位の値ですね。 $\frac{239}{169}$ は有理数による無理数の近似値として知られている数なのです。もちろん、小数第5位からは違ってしまっていますが、いい線いっているのではないのでしょうか。

この近似値は、次の写像により繰り返し x を代入することで求められます。

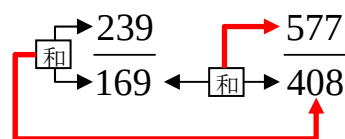
$$x \rightarrow \frac{x+2}{x+1} \quad (x = \frac{x+1}{x+2} \text{ とすると、} x(x+1) = x+2 \text{ より、} x > 0 \text{ のとき } x = \sqrt{2})$$

最初に x に代入する値として、 $\sqrt{2}$ に近い整数 $x=1$ を考えます。計算すると次の近似値が項の値として返されます。

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}, \frac{8119}{5741}, \frac{19601}{13860}, \frac{47321}{33461}, \frac{114243}{80782}, \frac{275807}{195025}, \ldots$$

これらの各項の値は簡単に求めることができます。

$$x = \frac{b}{a} \text{ としましょう。このとき、} \frac{x+2}{x+1} = \frac{\frac{b}{a}+2}{\frac{b}{a}+1} = \frac{(a+b)+a}{a+b}$$



これから、ある項からその次の項を求めるには、ある項の分子と分母の和を次の項の分母にし、その分母とある項の分子の和を分子にすればよいのです。このように求めて14番目の分数を小数にすると、

$$\frac{275807}{195025} = 1.41421356236379951288\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880\ldots$$

$\sqrt{2}$ の値と比較すると小数第10位まで正確な値が得られています。

ではこれよりもっと速く無理数の値に近似できる式はないのでしょうか。

$x=a$ のとき、 $\frac{x+2}{x+1} = \frac{a+2}{a+1}$ ですが、この値をまた $\frac{x+2}{x+1}$ に代入してみましょう。

$$\frac{x+2}{x+1} = \frac{\frac{a+2}{a+1}+2}{\frac{a+2}{a+1}+1} = \frac{3a+4}{2a+3} \quad \text{そこで次の写像を作ります。} x \rightarrow \frac{3x+4}{2x+3}$$

$x=1$ を初期値として順に計算していきましょう。

$$\frac{7}{5}, \frac{41}{29}, \frac{239}{169}, \frac{1393}{985}, \frac{8119}{5741}, \frac{47321}{33461}, \frac{275807}{195025}, \ldots$$

先ほどの近似の値が倍の速さで返されていることが分かりますね(倍返しです)。このように考えれば、3倍返し、10倍返しも作れそうですね。次にさらにこの近似値のスピードを速くしてみましょう。

紀元前に活躍した古代ギリシアの数学者ヘロンは次の近似値を得る写像を見つけています。

$$x \rightarrow \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$$

この写像は、相加相乗平均の関係 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ において、 $b = \frac{2}{a}$ として得られたものです。

$x < \sqrt{2}$ とすると、 $\frac{x}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ より、 $x < \sqrt{2} < \frac{2}{x}$ となります。これから、 x と $\frac{2}{x}$ の平均は $\sqrt{2}$ に近づいていくわけです。

$x=1$ から順次、項を求めてみましょう。

$$\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \frac{886731088897}{627013566048}, \ldots$$

この数列をヘロン数列といいます。その5番目の値は小数にすると1.414213562373095048801689623502…。

$\sqrt{2}$ に小数第23位まで一致し、さらにステップを繰り返すと近似値は速まります。こうなるともう100倍、1000倍返しの世界ですね。そして同様に $\sqrt{n}$ の近似も $x + \frac{n}{x}$ や $\frac{1}{2} \left(x + \frac{n}{x} \right)$ で求めることができます。 $\frac{239}{169}$ はこのような近似値の値の入口にある手頃な分数といっているでしょう。

奇数の平方同士の差は8の倍数になります。奇数を平方すると、

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1 \quad (n \geq 2)$$

すなわち「奇数の平方は8の倍数プラス1」です。その差を求めると、連続する2整数の積 $n(n+1)$ は偶数であることより8の倍数になることは明らかですが、このことを古代の人達はすでに知っており、このような数8の数学的性質や神秘性に関心と興味を持っていたようです。8の興味深い性質をもう一つ。

ナルシスト数は3桁の数では「各位の数の3乗の和が元の数に一致する数」であり、 $153(1^3 + 5^3 + 3^3 = 153)$ がよく知られています。8はナルシスト数ではありませんが、3乗してから各位の数の和を求めてみると、

$$8^3 = 512 \rightarrow 5+1+2=8$$

すなわち、8は「3乗の各位の数の和が元の数に一致する数」なのです。なんとなくナルシスト数に似ていますね。でもナルシスト数ほど自己愛的ではなく、もっと根源的な数であり、仮にリビドー数とでも命名しましょう。

17もその仲間です。

$$17^3 = 4913 \rightarrow 4+9+1+3=17$$

このような「3乗の各位の数の和が元の数に一致する」リビドー数はそれほど多いわけではありません。なぜなら、数が大きくなると3乗した数の各位の和がもとの数の大きさに追いつかなくなってしまうからです。

数 N は n 桁の数とします。 $10^{n-1} \leq N < 10^n$ ですから、 $10^{3n-3} \leq N^3 < 10^{3n}$ 。

このとき N^3 の各位の数の和が最大になるのは、 $(3n-1)$ 桁の数で各位の数がすべて9の場合です(3乗してそういう数があるとすればですが)。そのとき各位の数の和は、 $(3n-1) \times 9 = 27n-9$ になります。すなわち $N = 27n-9$ ということです。 N の最小数は 10^{n-1} ですが、 $n=3$ のとき最大数 N は $N=72$ であり、 N の最小数100より小さくなっています。このことより、このような数 N がある桁 n は $n=1,2$ の場合だけなのです。

次に N^3 は最大5桁の数なので、

$$N^3 = a \times 10^4 + b \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10 + e \quad (0 \leq a, b, c, d, e \leq 9)$$

とおきます。ここで $a+b+c+d+e=N$ であることより、

$$N^3 = a \times 10^4 + b \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10 + (N - a - b - c - d) \quad \text{より} \quad (N-1)N(N+1) = 9(1111a + 111b + 11c + d)$$

右辺は9の倍数より、 $N = 9k, 9k \pm 1$ の形の数であることがわかります。

以上より N の候補は、1,8,9,10,17,18,19,26,27,28, ..., 89,90,91,98,99の33個です。

これらの数に対して実際に計算すると、残りの仲間が見つかります。

$$18^3 = 5832 \rightarrow 5+8+3+2=18$$

$$26^3 = 17576 \rightarrow 1+7+5+7+6=26$$

$$27^3 = 19683 \rightarrow 1+9+6+8+3=27$$

結局、リビドー数は、1,8,17,18,26,27の僅か6個しかないので。

リビドー数は、特別な数である1を除けば、最初の数が8であり、3乗して各位の数の和を求め、その数をまた3乗し各位の数の和、これを繰り返すと無限に8が再生されていきます。8の文字は 90° 回転させると無限 ∞ を表します。ミトラ神秘主義においては、7つの門の次に開かれる神の山で8つめの門は光の国でありまさに無限の果であるわけです。キリスト教においても、キリスト復活は8日目であるため8は聖数として敬い、8は人間の体と魂に永遠なる至福を保証するとしています。

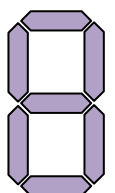
また、中国では、森羅万象を4つに分類しさらにそれを2つに分けるという考え方があり、八卦、八音、八方、八徳、八仙、八紘など8をひとまとめにすることが多く、家には永遠の繁栄と発展をもたらすものとして、赤い ∞ の紐を幾重にも合わせた縁起物の装飾品が飾られています。北京オリンピックの開催式は2008年8月8日午後8時08分の8尽くしの時間に開催されたことは大きな話題になりました。

無数の島からなる日本は、古代は大八州と呼ばれ、日本人も8を聖数と考えました。八百万の神、八岐の大蛇、八幡様といった神を示す言葉が多く残っています。漢数字「八」は末広がりの字体であることから永遠と繁栄を示す吉数であり、八百屋、八面六臂、八百八町、八重桜で用いられる8はたくさんということを意味するのです。

そして数八は「当たるも八卦、当たらぬも八卦」、「一か八かの勝負」、「口八丁手八丁」、「七転び八起」、「傍目八目」のように庶民の間に末広がりに広がっていきます。

このように、多くの国の歴史の中で8は信仰と生活に密接に結びついているのです。

8は2の3乗ですから、リビドー数でこれをさらに3乗することは2の9乗を計算することになります。数2はパソコンの基盤となる2進法を示す数です。8bitパソコンの開発競争からコンピュータは急速に発達し、世界は情報化社会の歩みを始めました。8は時代の寵児の象徴であり、アナログ社会からデジタル社会への転換を与えた数なのです。アナログ時代に数8は無限を表しましたがデジタル時代の数8はデジタルパネルの点滅で右図のように浮かびます。デジタル数8は0から9のすべての数を含み無限の繰り返しを映します。ここにも永遠があるのです。



ピタゴラス数は、直角三角形で各辺の長さがすべて整数である3数の組ですが、そのときの直角三角形の面積はもちろん有理数です。3辺の長さを a, b, c (c は斜辺)とすると、 $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ は有名なピタゴラス数ですが、このときの三角形の面積は6で整数になります。このように、直角三角形の3辺が有理数で、その面積 s が整数であるとき、整数 s を合同数といいます。ピタゴラス数は、 $a = m^2 - n^2$ 、 $b = 2mn$ とすると、

$$a^2 + b^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 \quad \text{よって、} c = m^2 + n^2 \text{ であり、} s = \frac{ab}{2} = mn(m^2 - n^2)$$

このようにピタゴラス数は幾らでも作り出すことができるので合同数も簡単に求められます。

$m = 2, n = 1$ のときは先ほどの $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ であり $s = 6$ 。 $m = 3, n = 2$ のときは、 $(a, b, c) = (5, 12, 13)$ となりこれも有名なピタゴラス数で、 $s = 30$ 。すなわち6と30は合同数です。

この合同数を探る歴史はとても古くは2000年以上前のギリシャ時代の文献にも記録があります。そして、現代でも未解決問題として研究されているのです。ナゼ?と思いませんか。合同数はピタゴラス数から幾らでも求めることができるのですからいったいどんな問題があるのでしょうか。それは、合同数は求められても、ある整数が合同数であるかどうかの判定が難しいからなのです。6は合同数ですが、ではその前後の数5,7は合同数でしょうか。

先ほどのピタゴラス数を求める式で、 $m = 5, n = 4$ とすると、 $a = 9, b = 40, c = 41$ となります。

このとき、 $s = 180$ 。だから180は合同数ですが、 $180 = 6^2 \times 5$ と因数分解できるので、 a, b, c をそれぞれ6で割ると、

$$a = \frac{3}{2}, b = \frac{20}{3}, c = \frac{41}{6}$$

このとき $s = 5$ より5は合同数なのです。5が合同数であることはフィボナッチ(1170-1240)が示しています。

7については、オイラー(1707-1783)が、

$$a = \frac{35}{12}, b = \frac{24}{5}, c = \frac{337}{60}, s = 7$$

を見つけ、合同数であることを示しましたが、この2人が活躍した時代には6世紀以上の隔たりがあります。

なお1は合同数ではないことをフェルマー(1601-1665)が証明し、その後、2,3,4も合同数でないことも分かりました。すなわち最小の合同数は5ということです。このように合同数は長い年月をかけて見つけ出されているのです。

では、ある数が合同数であることをどのように調べればよいのでしょうか。 a, b, c, s には次の関係が成立します。

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{4} = \frac{c^2 - 2ab}{4} = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - s \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + s \quad \dots\dots(*)$$

ここで、 $x = \left(\frac{c}{2}\right)^2$ とおくと、 $x - s, x, x + s$ はすべて平方数ですからその積も平方数です。その平方数を y^2 とすると、

$$y^2 = (x - s)x(x + s) = x^3 - s^2x$$

(x, y) はこの関数を表す曲線(楕円曲線といいます)上の有理点になります。

有理点 (α, β) が見つかれば、 $\alpha - s, \alpha, \alpha + s$ は平方数ですから、(*)より、

$$a = \sqrt{\alpha + s} + \sqrt{\alpha - s}, \quad b = \sqrt{\alpha + s} - \sqrt{\alpha - s}, \quad c = 2\sqrt{\alpha}$$

有理数 a, b, c が得られます。しかし、この有理点を求めるということが大変なのです。1983年、タンネルは合同数の判定をする次の定理を示します。

s が合同数ならば、「 $s = 2x^2 + y^2 + 32z^2$ の整数解の個数」の2倍は、

「 $s = 2x^2 + y^2 + 8z^2$ の整数解の個数」に等しい

この定理の逆も成り立つことが予想され、この2つの方程式の整数解を求めることで、ある整数 s が合同数であるかどうかの判定ができるのです。

さらに2以外の素数については、素数 p を8で割った余りが5,7であれば合同数で

あることがいえます。これから、素数157は、 $157 = 8 \times 19 + 5$ であるため合同数です。 $s = 157$ は合同数であるなら面積157である直角三角形の3辺の長さは何でしょう。20年ほど前にコンピュータ計算により初めて求められました。

$$a = \frac{6803298487826435051217540}{411340519227716149383203}, \quad b = \frac{411340519227716149383203}{21666555693714761309610}, \quad c = \frac{224403517704336969924557513090674863160948472041}{8912332268928859588025535178967163570016480830}$$

$a \doteq 16.5$, $b \doteq 19.0$, $c \doteq 25.2$ という大したことのない値ですが、有理数の分子・分母は信じられない程巨大な値になってしまうのです。

この古くて新しい合同数の研究の中でフェルマー予想が生まれたのです。そして有理点を求めるために数学では非常に重要な曲線である楕円曲線が研究され、フェルマーの定理の解決に大きな貢献を果たします。そして現在では、楕円曲線の暗号理論への応用が研究されています。「直角三角形の面積で辺が有理数のものってなに」、こんな素朴で単純な疑問に端を発し、2000年の時の流れは数学の大河となりさらに大海へといまでも滔々と流れているのです。

