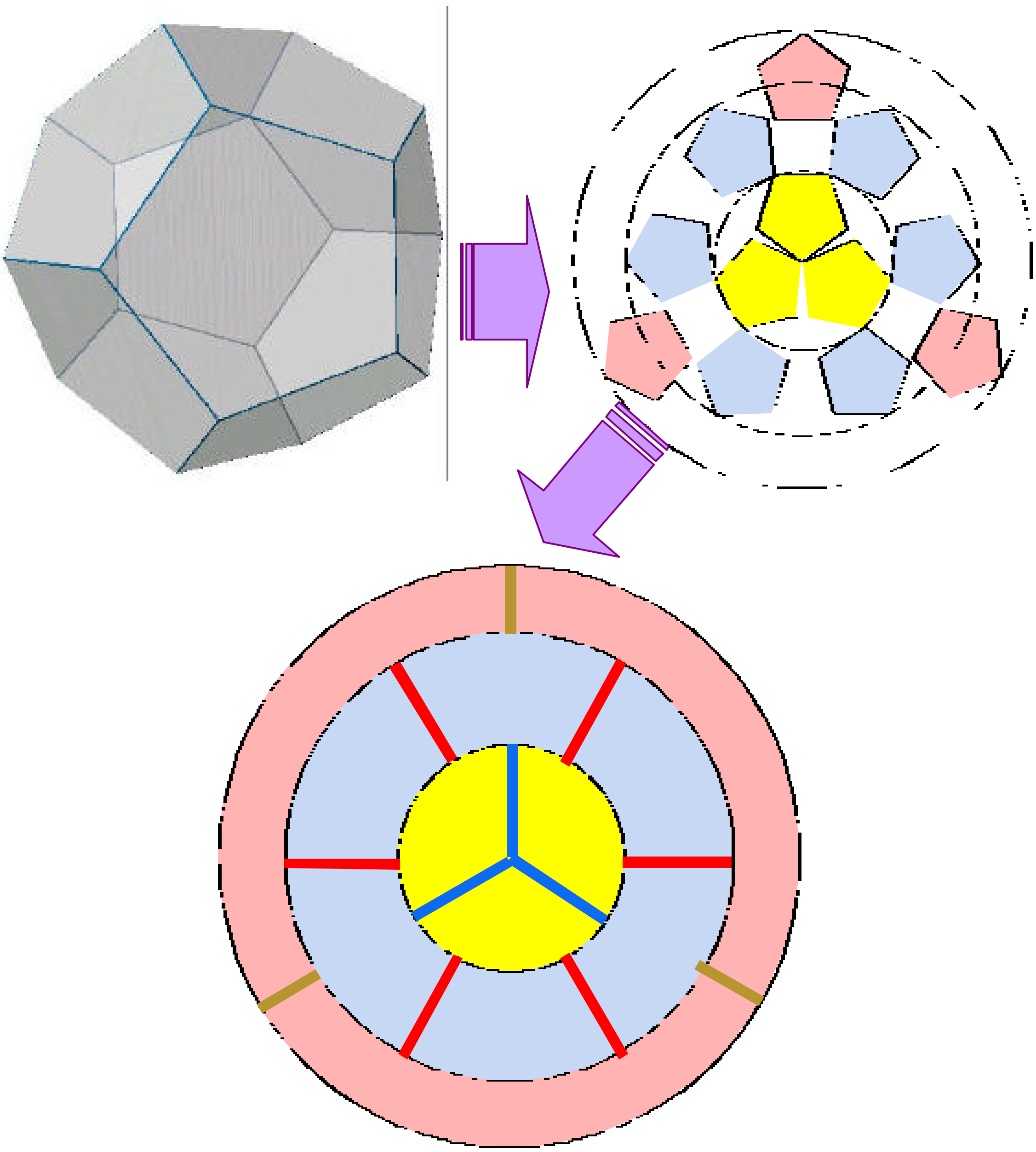
正多面体の思考の塗り分け

～ちょっと変えたn色問題～



札幌藻岩高等学校

中村文則

■■■　ついに～S 先生がやってしまった！　■■■

見学旅行の引率でどっぷり疲れて職員室に辿り着くと，机の上にレポートが置かれていた．触るとひんやりとした感触．すぐにＳ先生のものと理解した．いつものことながらＳ先生の周りには微妙なオーロラがある．極寒の地でしか見られぬ光の帯である．そのオーロラをまとったＳ先生が置いていったものである．

「正多面体の塗り分け」～ちょっと変わった n 色問題～．
「正八面体を異なる８色で塗り分ける方法は何通りあるか」.解答に行き詰った末に数学準備室に足を運び，Ｓ先生に助言をいただいた問題に関するレポートであった．Ｓ先生は５種類の正多面体(プラトンの多面体)の塗り分けを一般解としてまとめられた．神の領域に近いオブジェである正多面体ならば，その塗り分けもやはり美しくあらねばならないとの確信の元にその解決を見出している．キーワードは $n!$．面を選び色を順次塗っていくのではなく，色を塗り終えた($n!$)後に，頂点と軸から多面体のバランスを考慮してその配色の重なりを調べ，

(頂点の数)×(頂点の次数)

なる結論を得ている．ここで頂点の次数とは１頂点で接する辺の数である．

本レポートは，Ｓ先生の結論に別の側面から迫ろうとするものである．さらには，１３種類の準正多面体，いわゆる“アルキメデスの立体”についてもその塗り分けを考えてみる．

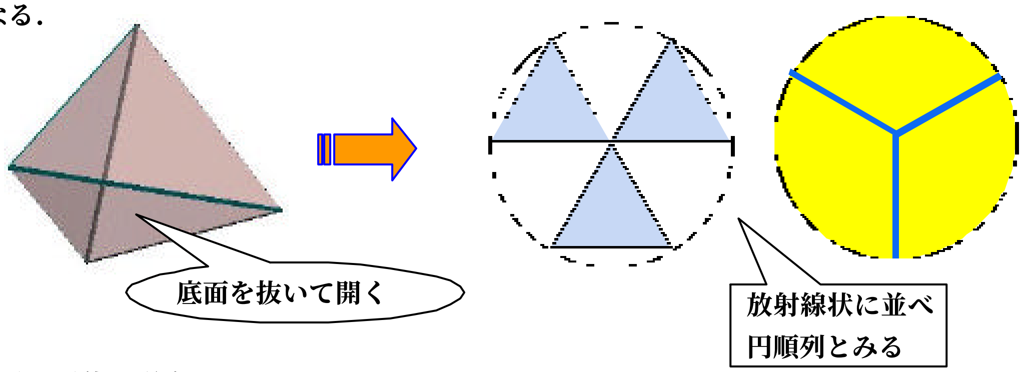
(1)　１面を切り抜いて展開する(立体図形から平面図形への変換)

１．正四面体の場合

「底面を固定する」とは，底面に適当な色を指定して「塗ってしまった」とみて，残りの３面を塗ることである．そこで，その底面を切り抜き，四面体を放射線状に展開した図形の塗り方を考えるとみなすこともできる．結局それは，円周を３等分して分けられる部分の円順列の色分けに一致する．よって

$(3-1)!=2$ 通り

となる．

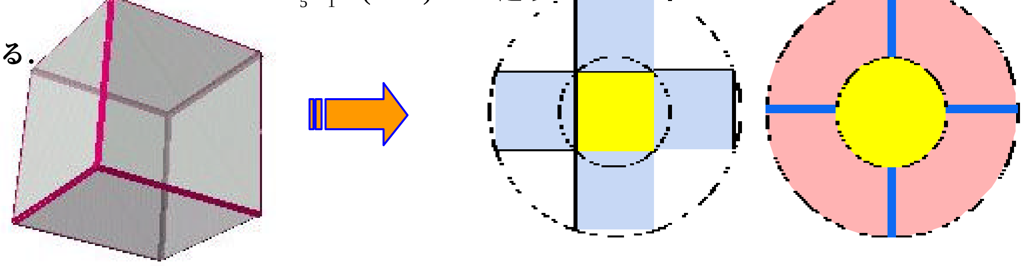


2. 正六面体の場合

正四面体と同様に，底面の正方形を抜いて展開すると，下図のような円周を４等分した図形の塗り分けを考えればよい．したがって，中央の円，４つの扇形の順に塗っていくと，

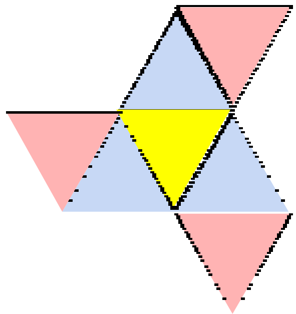
${}_5C_1\times(4-1)!=30$ 通り

となる．



3. 正八面体の場合

同様に底面を抜くと，この場合は右図のような風車の形に展開される．この図では，中央の三角形の外側に６つの三角形が配列されているように見えるが，これが誤った解法の要因となる．中央の三角形に続き，外側の６つの三角形を塗っていくと，

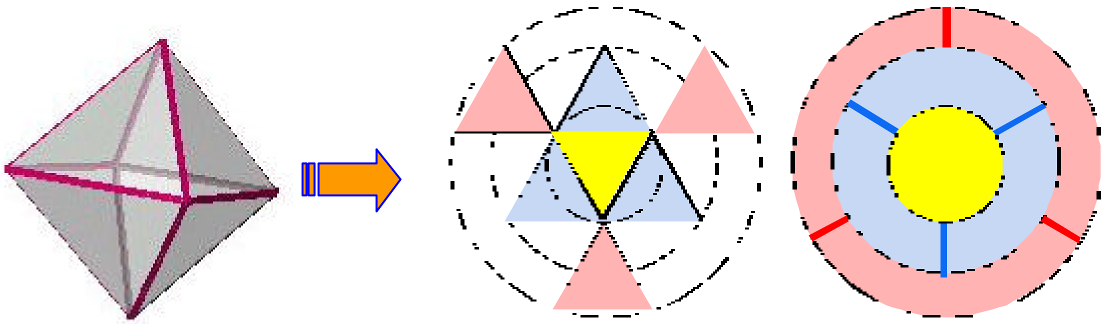


$_7C_1\times(6-1)!=840$ 通り

となるが，三角形の向きを考慮すると，中央の三角形と辺を共有している３つの三角形は，１頂点を共有する残りの３つの三角形とは同配列にすることはできないことがわかる．そこで,「展開する」ということをもっと柔軟に解釈してみよう．

「切り離して配列する」ことも展開するとみなし，下図のように放射線状に配列する．同心円が３つできるが，内側の円から塗っていこう．ここで２番目の円は円順列だが，固定して色を塗ることで一番外側の円は，ただの順列となることに注意する．したがって，

$_7C_1\times{}_6C_3\times2\times3!=1680$ 通り



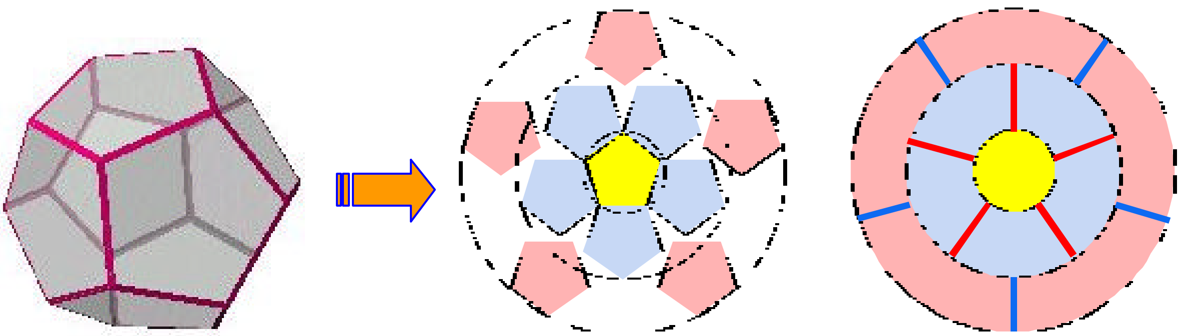
4. 正12面体･正 20 面体の場合

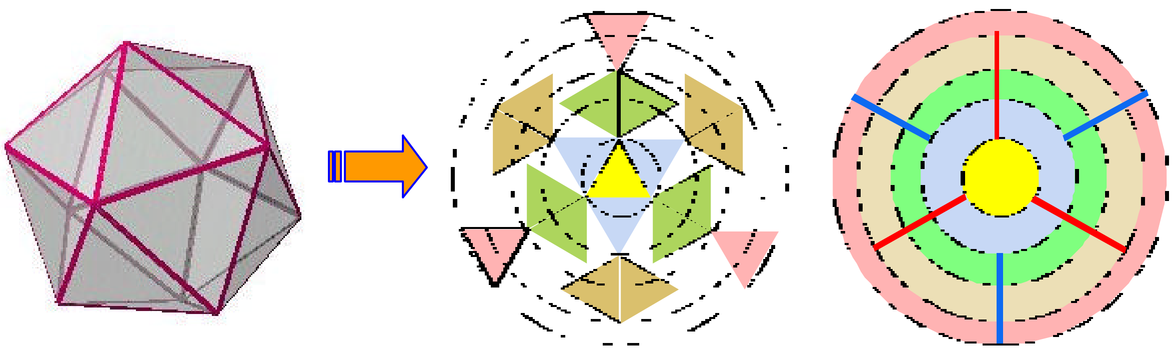
それぞれ塗り分け方は,

正 12 面体 → $_{11}C_1\times{}_{10}C_5\times4!\times5!$

正 20 面体 → $_{19}C_1\times{}_{18}C_3\times2!\times{}_{15}P_6\times{}_9P_6\times3!$

となる.





5. 正 n 面体の塗り分けの一般化

正 20 面体の展開図を見ると，内側から３つ，４つめに配列されている正三角形の向きはそれぞれ２種類あるから，これは同配列できないことになるが，前頁ではそれを無視した計算をしている．これは，内側から２番目の円の配列は，１つの三角形を固定することで，例えれば廻っている独楽の動きを止めてしまったわけで，それ以外の同心円の配列はただの順列とみなすことが可能となる．したがって，正 20 面体の塗り分けは，

$$ {}_{19}C_1 \times {}_{18}C_3 \times 2! \times 15! $$

としてもよいことになる．さらに，最初に内側から２番目の同心円を塗ってしまうと，

$$ {}_{19}C_3 \times 2! \times 16! $$

と簡単にまとめられる．これから，正 n 面体の塗り分けを求めてみよう．

正 n 面体の１つの面が正 m 角形であるとする．この正 m 角形のひとつを切り抜いて，そこから放射状に展開していくと，同心円の中心に１つの正 m 角形が置かれる．そして正 m 角形の辺の数 m だけ，その周りに正 m 角形が円順列として配列されることから，

$$ {}_{n-1}C_m \times (m-1)! \times (n-m-1)! \text{ 通り} $$

これが塗り分けの総数となる．

(2) 頂点の周りに放射線状に展開する(正多面体を独楽とみる)

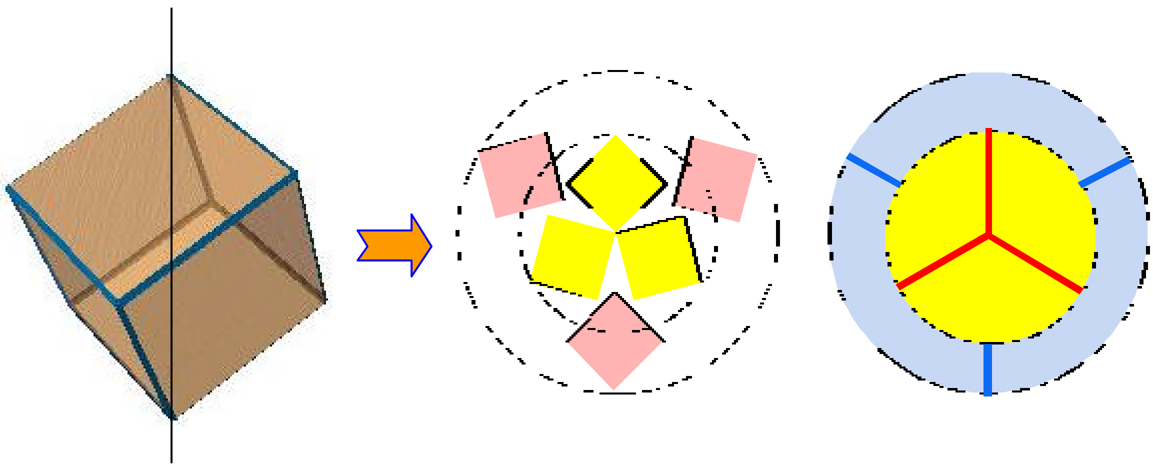
正多面体はどの頂点に対しても頂点を軸とする対称な図形となり，軸を回転の中心として独楽のように廻すことが可能となる．このことを利用して，正多面体の塗り分けを考えてみよう．

1．正六面体の場合

正六面体の１頂点を地面において独楽のように立て，頂点から放射線状に切り開くと下図のように配置される．したがってその塗り分け方は，${}_6C_3 \times 2! \times 3!$ 通りとなるが，正６面体の８つの頂点いずれにおいても同様の塗り分け方が考えられることより，その総数は，

$$ {}_6C_3 \times 2! \times 3! \times \frac{1}{8} = 30 \text{ 通り} $$

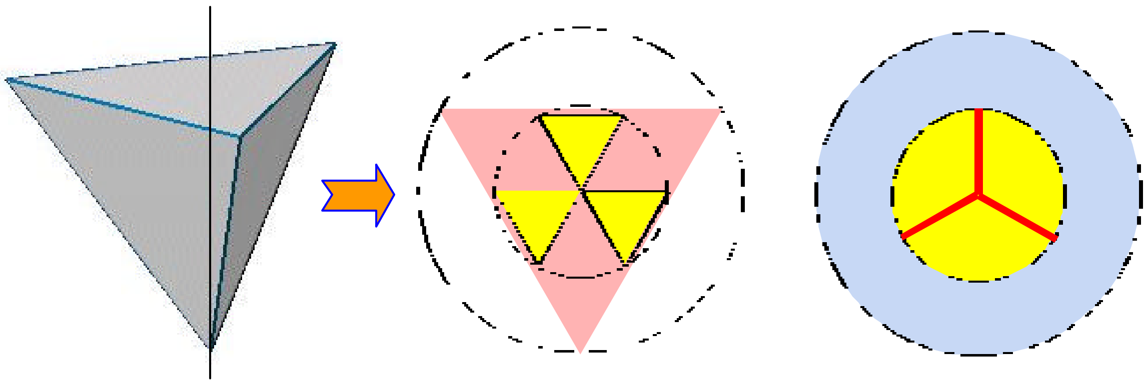
となる．



2.正4面体の場合

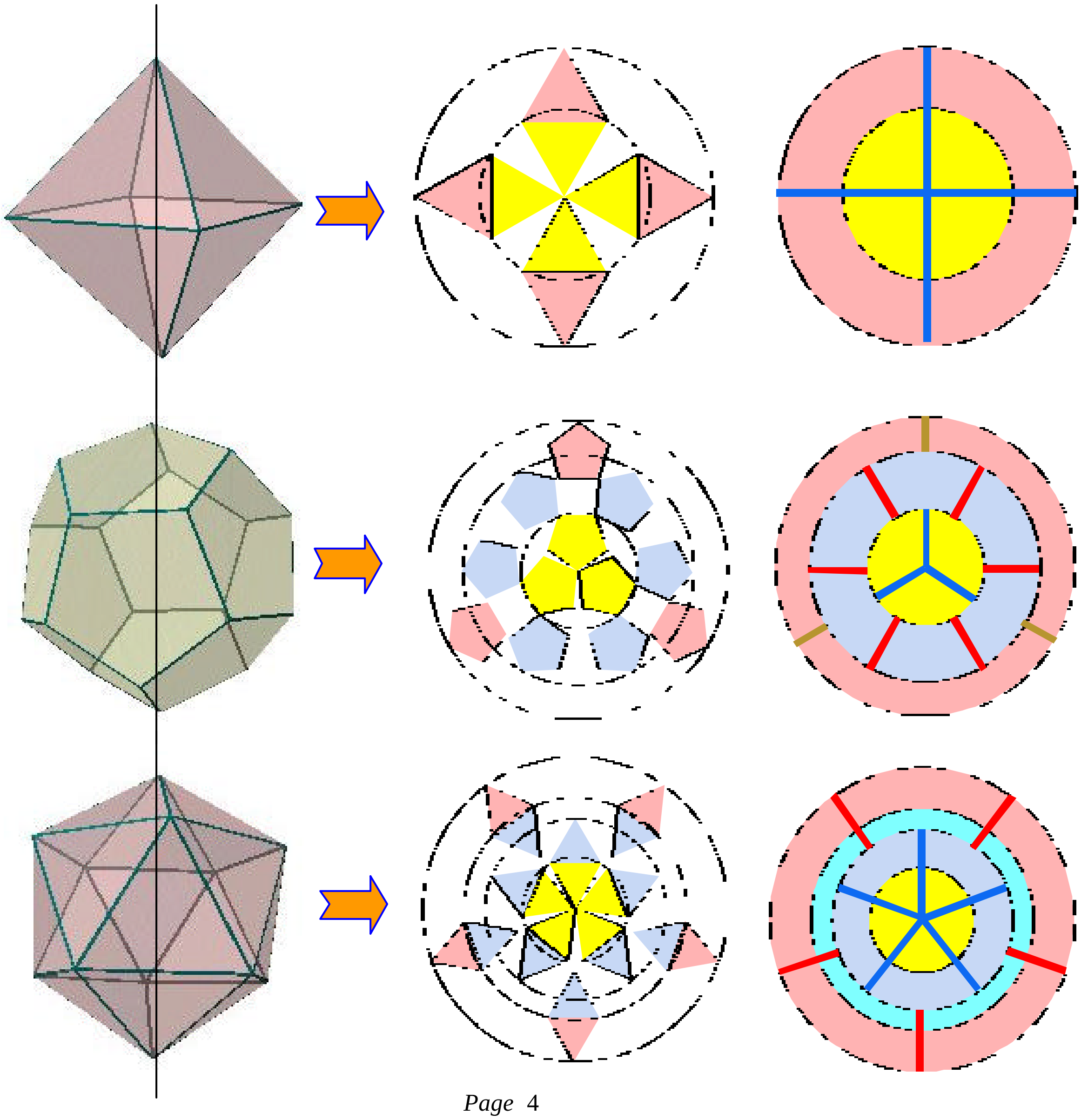
正4面体を，頂点を軸として地面に立てると，地面に平行な上面ができるから，放射線状には展開できない．そこで，頂点を点光源としたときの影を展開図とみなすと下図のようになる．したがってその塗り分け方は，

$$ {}_4C_3 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{4} = 2 \text{ 通り} $$



3.正8面体・正12面体・正20面体の場合

残りの多面体についても同様に展開したものが下図である．



4. 正 n 面体の塗り分けの一般化

頂点の周りの(頂点を共有する)面の個数を r (頂点の次数)，頂点の個数を s とする．頂点を軸として多面体が回転するとき，頂点の周りの面の塗り分けは，${}_nC_r\times(r-1)!$．この塗り分けで多面体コマは停止するからそれ以外の面の色の塗り方は，$(n-r)!$ となる．頂点の個数だけ同じ塗り方が考えられるから，以上より，塗り分けの総数 $P(n)$ は

$$P(n)={}_nC_r\times(r-1)!\times(n-r)!\times\frac{1}{s}\text{ 通り}$$

である．

次に，この式を少し整理してみよう．

$$P(n)={}_nC_r\times\frac{r!}{r}\times(n-r)!\times\frac{1}{s}=\frac{n!}{rs}$$

S先生によって示された結論が得られた．

ところで，この式で分母は

(頂点の個数)×(頂点の周りの面の個数)　　　……(*)

を表すが，次のように考えることもできる．

正 n 角形の頂点の個数 s は，面が正 m 角形であるとき，頂点数は mn 個できるが，１頂点の周りの面 r の数だけ重なるから，

$$s=mn\times\frac{1}{r}$$

なる関係が成り立つ．これから

$$rs=mn$$

すなわち，(*)は，

(正多角形の辺の個数)×(正多面体の面の個数)

に等しい．よって

$$P(n)=\frac{n!}{rs}=\frac{n!}{mn}=\frac{(n-1)!}{m}$$

となる．以上より，

> **正多面体の塗り分け方の総数は，正 n 面体が正 m 角形で構成されるとき，**
>
> $$\frac{(n-1)!}{m}\text{ 通り}$$
>
> **である．**

下表が正多面体の塗り分け数である．

正多面体	正４面体	正６面体	正８面体	正 12 面体	正２０面体
正多角形	正三角形	正方形	正三角形	正五角形	正三角形
塗り分け数	$\frac{3!}{3}$ $=2$	$\frac{5!}{4}$ $=30$	$\frac{7!}{3}$ $=1680$	$\frac{11!}{5}$ $=7983360$	$\frac{19!}{3}$ $=40548366802944000$

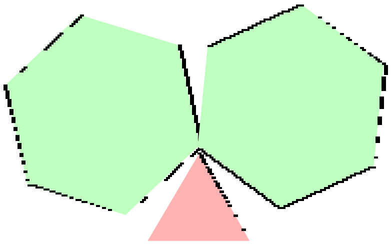
5. 補足

１面を切り抜いて展開することより得られた式を変形すると，

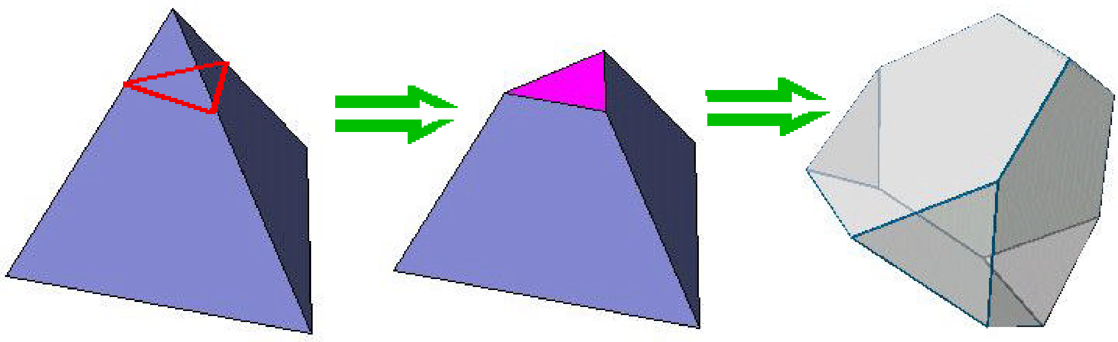
$${}_{n-1}C_m\times(m-1)!\times(n-m-1)!=\frac{(n-1)!}{(n-m-1)m!}\times(m-1)!(n-m-1)!=\frac{(n-1)!}{m}$$

(3) 準正多面体の塗り分け方

正多面体のカド(頂点)をそぎ落とすと新たな立体が出現する．例えば正四面体の４つの頂点を辺の三等分点で切り落とすと，正三角形の切り口が４つでき，正四面体の面の数(４)だけ正六角形が作られる．ところで，この立体の各頂点の周りの多角形の配列をみると，みな等しく右図のように配置されていることが分かる．



このように，立体の各頂点の周りの図形の配置がみな等しい図形を準正多面体といい，正四面体から作られる立体を切頭四面体という．アルキメデスはこの美しい立体に興味をもち，研究を重ね，１３個の準正多面体を発見した．その準正多面体をアルキメデスの多面体ともいう．さらに，その後の研究で現在は１６個あることが知られている．ここではアルキメデスの多面体に限定してその塗り分け方を調べてみよう．

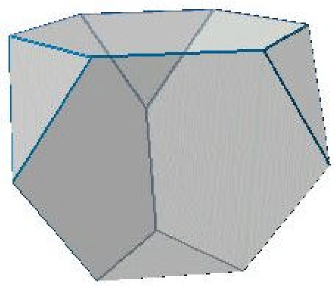


1. 切頭四面体

底面を固定して塗ってみよう．面数は，もとの正多面体の頂点数+面数であるから８色で塗り分けることになる．底面を正三角形とすると，３つの正五角形が辺を共有すること，及び正三角形の個数が５個であることから，その塗り分け方は，

$${}_8C_3 \times 2! \times 5! \times \frac{1}{4} = 3360 \text{ 通り}$$

となる．また，底面を正五角形にした場合も同様の計算式が得られる．



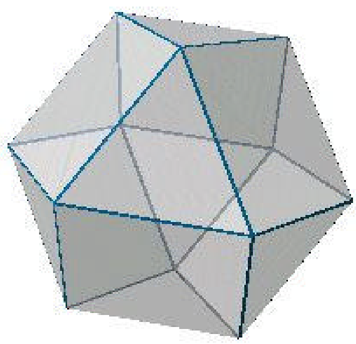
では，頂点を軸とみて，その配列を考えるとどうなるであろうか．頂点の周りの図形の配置をみると円順列とはならないから，面数の塗り方を単純に頂点数で割ったものがその値となる．頂点数は正四面体の頂点数４より，４×３＝１２であるから，

$$\frac{8!}{12} = 3360 \text{ 通り}$$

となる．

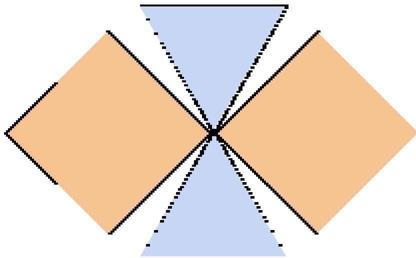
2. 立方八面体

立方体のカドを辺の中点で切り取ると出来上がる．あるいは，正八面体の辺の中点を切ってカドをとってもできるから，この名を冠する．右図から分るように，正三角形８個と正方形６個から構成される．面を固定して塗り分けを考えると，その面の形により次の２通りの計算が考えられる．



面が正三角形　　${}_{14}C_3 \times 2! \times 11! \times \frac{1}{8}$

面が正方形　　${}_{14}C_4 \times 3! \times 10! \times \frac{1}{6}$



次に，頂点の周りの配列をみると，右図のようになる．また，頂点数は，頂点の周りの図形の個数から，

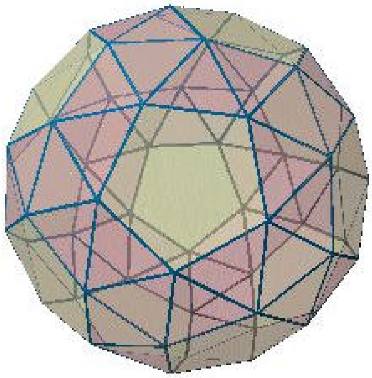
$$\frac{3\times 8+4\times 6}{4}=12$$

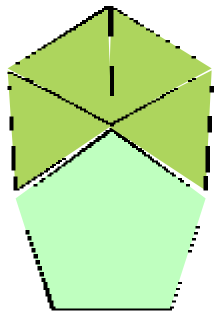
よって，塗り分けの総数は，

$${}_{14}C_2 \times 12! \times \frac{1}{12} \text{ 通り}$$

となる．

3. アルキメデスの多面体の色の塗り分け





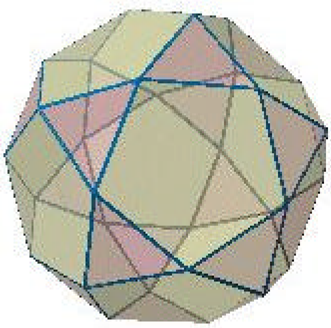
準正多面体の塗り分けを一般化しよう．まず，面，頂点のいずれかで考えるかであるが，面では面の周りの図形の配置が複雑な多面体もでてくる．例えば右図は，正三角形と正五角形で構成される準正多面体で，ねじれ十二面体という．アルキメデスの立体ではもっとも多い面をもつ立体であり，92 面体となる．この図形では三角形の周りの配置を考えると，２パターンあるため，重複する場合の数を求めることが難しくなる．では，頂点を軸とみて計算するとどうなるだろうか．準正多面体の定義より，頂点の周りの図形の配置はみな等しく，図のように，４つの正三角形と，１つの正五角形である．この配置は円順列ではないから，その塗り分け方法は92!を頂点数で割って得られる．さて，問題はその頂点数であるが，正三角形の個数 80，正五角形の個数 12 から，

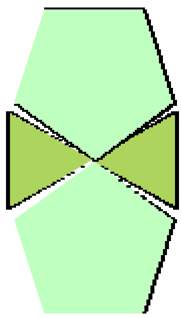
$$\frac{80\times 3+12\times 5}{5}=80 \text{ 通り}$$

と求められる．以上より，

$$\frac{92!}{80} \text{ 通り}$$

という天文学的な値を得る．





このように，塗り分けは頂点の周りの図形の配置と頂点数により，計算されるが，アルキメデスの多面体の場合，配置が円順列になるものは実は２種類しかない．ひとつは先に挙げた立方八面体であり，もうひとつは，正三角形と正五角形で構成される十二・二十面体である．この立体は，正 12 面体または正 20 面体の各辺の中点からカドを切り落としていくと作られ，頂点の周りは立方八面体と同じ配列になっている．よって，アルキメデスの多面体の塗り分け総数は，次式で得られる．

面数 n，頂点数 s であるとき，異なる色で塗り分ける場合の数は

立方八面体と十二・二十面体　……　${}_nC_2 \times (n-2)! \times \frac{1}{s} = \frac{n!}{2s}$ 通り

それ以外のアルキメデスの多面体　……　$\frac{n!}{s}$ 通り

4. 頂点の個数（デカルトの定理）

頂点数は，頂点の周りの図形の配置から得られるが，頂点の尖度から求めることも可能である．ここで，尖度とは，頂点を共有する図形の頂角の和を 360 ° から引いた値である．これは平面図形においては外角に相当するものである．

例えば，正四面体は１頂点を３つの正三角形が共有し，その角度の和は 180 ° であるから，尖度は，$360° - 180° = 180°$ である．また，正八面体は，１頂点を３つの正方形が共有し，角度の和が 270 ° より，尖度は $360° - 270° = 90°$ である．尖度には次に関係があることが知られている．

多面体の尖度の和は 720° である

これをデカルトの定理という．

実際，正４面体，正６面体の頂点数はそれぞれ，４個，８個であるから容易に確認できる．

さて，このことから，逆に準正多面体の頂点数は，頂点の周りの図形の角度の合計からも求めることができることになる．

$$\text{頂点数} = \frac{720°}{\text{尖度}}$$

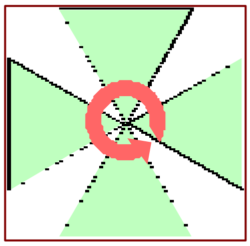
である．例えば，正八面体は，頂点に４つの正三角形があるから，尖度 $= 360° - 4 \times 60° = 120°$ よって，

$$\text{頂点数} = \frac{720°}{120°} = 6$$

となる．

5. 頂点から多面体の情報を集める

正多面体・準正多面体はともに，「すべての頂点の周りの配列が等しい」多面体であるから，その配列をみることで，もとの多面体を予想することができる．



右図では頂点の周りに４つの正三角形が配置されている．したがって，もとの図形は正多面体である．頂点の尖度は，$360° - 4 \times 60° = 120°$ より，頂点の個数 V は

$$V = \frac{720°}{120°} = 6$$

である．また，頂点を共有する辺の本数は４本より，６つの頂点では 24 本の辺があるが，どの辺も 2 辺を共有するから，辺の本数 E は，

$$E = \frac{24}{2} = 12$$

である．最後に面の個数 F であるが，４つの三角形が頂点を共有することから，

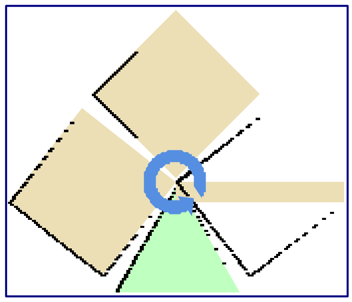
$$V = \frac{3 \times F}{4}$$

がなりたつ．これから，

$$F=\frac{4\times 6}{3}=8$$

よって，もとの多面体は正八面体であることがわかる．

では，右図の場合はどうだろうか．



尖度は$30°$であるから頂点数は

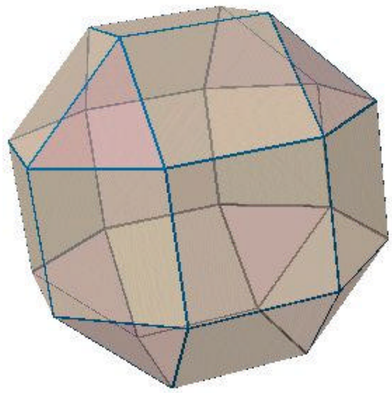
$$V=\frac{720°}{30°}=24$$

頂点を共有する辺の本数は４本より，

$$E=\frac{4\times 24}{2}=48$$

正三角形の個数をF_3，正方形の個数をF_4とすると，

４つの多角形が頂点を共有することより，



$$V=\frac{3\times F_3+4\times F_4}{4}$$

より，$3F_3+4F_4=96$ ……①

また，頂点に集まる三角形と四角形の辺の比は１：３であることより，多面体全体の辺の本数の比も同じであるから

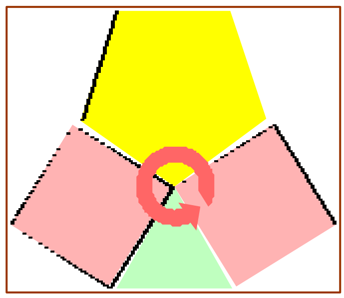
$3F_3:4F_4=1:3$ ……②

①，②より，$F_3=8, F_4=18$ である．よって，

$F=F_3+F_4=26$

この多面体は，面３個の正三角形と，１８個の正方形で作られており，菱形立方８面体(斜立方８面体)といわれているものである．

では最後に右図の多面体．



正三角形，正方形，正五角形の３種類の正多角形が頂点に集まっている．

頂点の周りの角度の和は，

$$60°+2\times 90°+\left(180°-\frac{360°}{5}\right)=348°$$

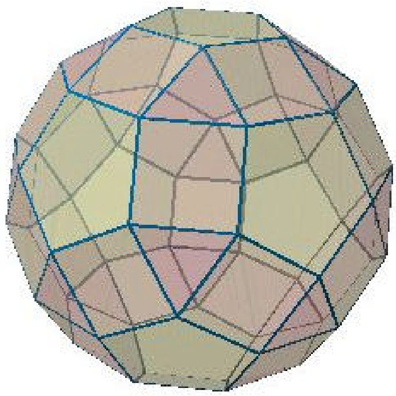
よって，尖度は$12°$であるから，

$$V=\frac{720°}{12°}=60$$

次に，辺の本数は，

$$E=\frac{60\times 4}{2}=120$$

正三角形，正方形，正五角形の面数をF_3, F_4, F_5とすると，



$3F_3+4F_4+5F_5=4\times 60$ ……①

また，$3F_3:4F_4:5F_5=1:2:1$

そこで，$3F_3=k, 4F_4=2k, 5F_5=k$ とおくと，①より $k=60$

よって，$F_3=20, F_4=30, F_5=12$

を得る．以上より，

$F=F_1+F_2+F_3=62$

となる．この複雑な多面体を菱形十二・二十面体といわれるものである．

ところで上の式の計算仮定から比例定数kの値が頂点数Vに等しいことを読み取るのは容易であろう．以上より，次の結論を得る．

準正多面体の頂点，辺，面の個数をそれぞれ，V,E,F とする．
正 k 角形の個数を F_k 個，頂点の周りの個数を n_k 個とするとき，

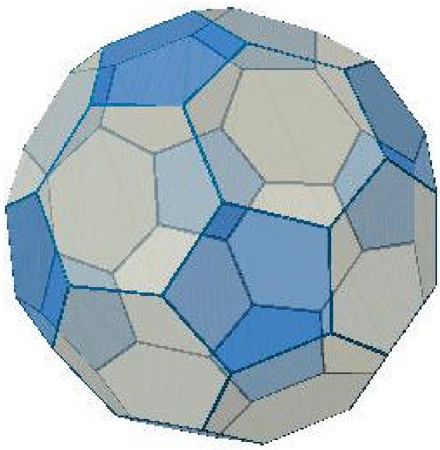
$$V=\frac{720^\circ}{\text{尖度}},\qquad E=\frac{V\sum n_k}{2}$$

$$F_k=\frac{n_k V}{k},\quad F=\sum F_k$$

このように，オイラーの定理に依らなくても，頂点の周りの正多角形の配置をみることで，準正多面体は，面，辺，頂点を求めることが可能なのである(デカルトの定理の証明にはオイラーの定理を使うから，間接的には関与しているのだが)．

このことから，多面体の色分けにもしたがってすべての情報の集積点である頂点から考察するのが極めて自然であるといえるのである．

6. サッカーボールの塗り分けの総数を求めよう



正二十面体のカドを辺を三等分する点で切り落としてできる多面体は，アルキメデスの多面体の中でもっとも有名なものである．あのサッカーボールである．

では，最後にこのサッカーボールの塗り分けをしてみよう．

まず，１頂点から得られる情報を読み取っていく．

頂点の周りの角度の和は，

$$\left(180^\circ-\frac{360^\circ}{5}\right)+2\times\left(180^\circ-\frac{360^\circ}{6}\right)=348^\circ$$

より，尖度は，

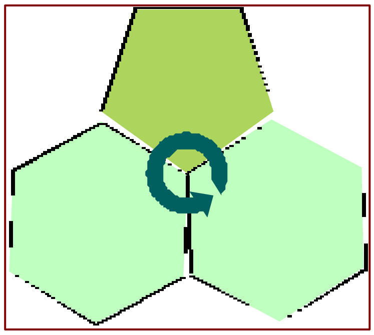
$$360^\circ-348^\circ=12^\circ$$

よって，頂点の個数は，

$$V=\frac{720^\circ}{12^\circ}=60$$

次に辺の本数は，

$$E=\frac{60\times 3}{2}=90$$



正五角形，正六角形の個数を F_5,F_6 とすると，頂点の周りの個数はそれぞれ１個，２個であるから，

$$F_5=\frac{60\times 1}{5}=12$$

$$F_6=\frac{60\times 2}{6}=20$$

したがって，面数は，

$$F=F_5+F_6=32$$

となる．

以上より，サッカーボールは，正五角形が 12，正六角形が 20 の併せて 32 面で作られ，頂点の周りには，正五角形１つと正六角形２つが配置される．また，この２つの正多角形の配置は円順列にはならないから，その色の塗り分けは，

$$\frac{32!}{60}=4385513948894892169453633536000000\ \text{通り}$$

となる．

(Notes) **「尖度の和が 720° である」ことの証明**

多面体を構成するひとつの面が m 角形であるとすると，$(m-2)$ 本の対角線を引くことにより，m 角形は $(m-1)$ 個の三角形に分割される．したがって，すべての多面体の面は三角形とみなしてもよいことになる．

ここで，三角形に分けた場合の面数，辺数，頂点数をそれぞれ，F, E, V とすると，この多面体においても，オイラーの定理

$$V+F-E=2$$

は成立する．

面数と辺数の関係を調べてみよう．面はすべて三角形だから，ひとつの面の辺の本数は３本，三角形は面数だけあるからその総数は $3F$．面と面は１辺を共有することを考えると，

$$E=\frac{3}{2}F$$

なる関係が成立する．

また，すべての三角形の内角の和は $180°F$．よって，尖度の和を S とすると，

$$360°V=180°F+S$$

となる．これから，

$$\begin{aligned} S &= 360°V-180°F \\ &= 360°(E-F+2)-180°F \\ &= 180°(2E-3F)+720° \\ &= 720° \end{aligned}$$

以上より，尖度の和は 720° であることが示された．

■■■　おわりに　■■■

この原稿を書いているとき，冒頭の S 先生は講習の真っ最中である．S 先生の授業はいつも熱い．人は熱くなるとボーっとし，虚ろになり思考が低下するものだ．すると，頃合を見計らっているかのように S 先生の洒落が飛ぶ．俗にいう，オヤジギャグである．ジャブ，アッパー，トリプルクロスカウンターと直撃を受け，生徒は本当に寒くなるという．これが繰り返し続くと，冷やし，熱し，サウナと冷水を交互に浴びるように血液の循環が促され脳の働きが活性化するのである．S 先生の周りのオーロラは，「冷え」ではなく，授業を楽しく，面白く演出する「冴え」であり，無口な私は，その話術にいつも尊敬の念を抱いている．もちろん，ときおりギャグを本当にはずしてしまい，周りは閉口するが，それもまた心の暖かさの発露なのである．

そのＳ先生から，今回「多面体の色分け」という最上のプレゼントをいただいた．いつも先生のアイデアに相乗りさせていただいている当方は，少しでも発展の糸口を提供できればと思い，レポートとしてまとめさせていただいた．

ところで，多面体の夢の広がりはまだまだ続く．

①多面体の隣り合う面の色を異なるように塗りとき，最低何色あればいいだろう
(空間の４色問題である)

②多面体を展開したとき，その展開方法は何通りあるだろう

塗り分けだけ考えてもワクワクするような面白い問題ができそうである．この後，さらに相乗りしていただける方がでてくることを切望するものである．

※本レポートを作成するにあたり，遠山啓先生の著書及び，当方の貧弱な３Ｄイメージを補い，多面体の図を描くために RapidLapin 氏の多面体描画ソフトを利用させていただきました

参考文献　　数学の広場「３次元の世界」　遠山啓著　ほるぷ出版刊

使用ソフト名　*UniformPolyhedronBuilder ver0.01*　(**著作権者** *RapidLapin*)