

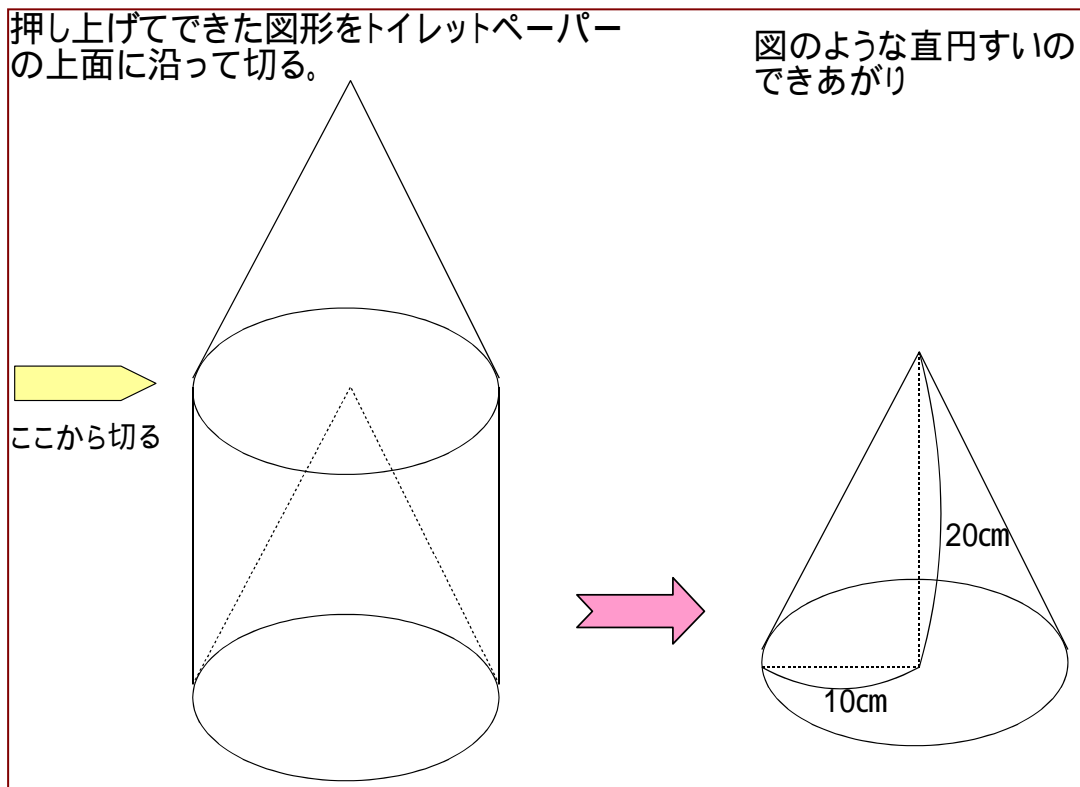
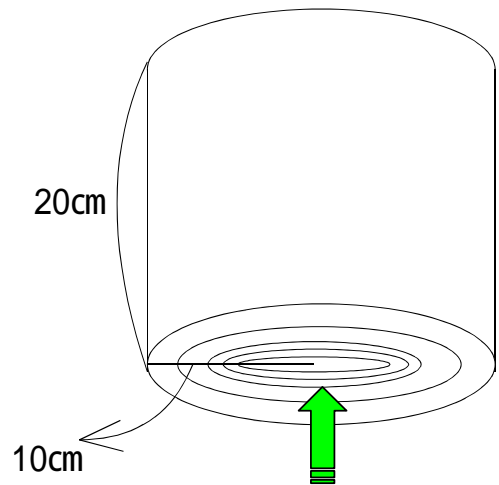
直円すいの体積を求めてみよう

問題1

右図のような芯のない経済的なトイレットペーパーの中心を押し込んで見ましょう。押し込んだ分だけ上面が膨らみますね。それでは、外側から中心に向かって深さが一定数だけ増えていくように押し込んで見ましょう。上に盛り上がった図形は何でしょうか。

直円すいができましたね。下図のように押し込むと、トイレットペーパーで巻かれたきれいな円すいができます。ではつぎに、この円すいの体積を求めてみましょう。

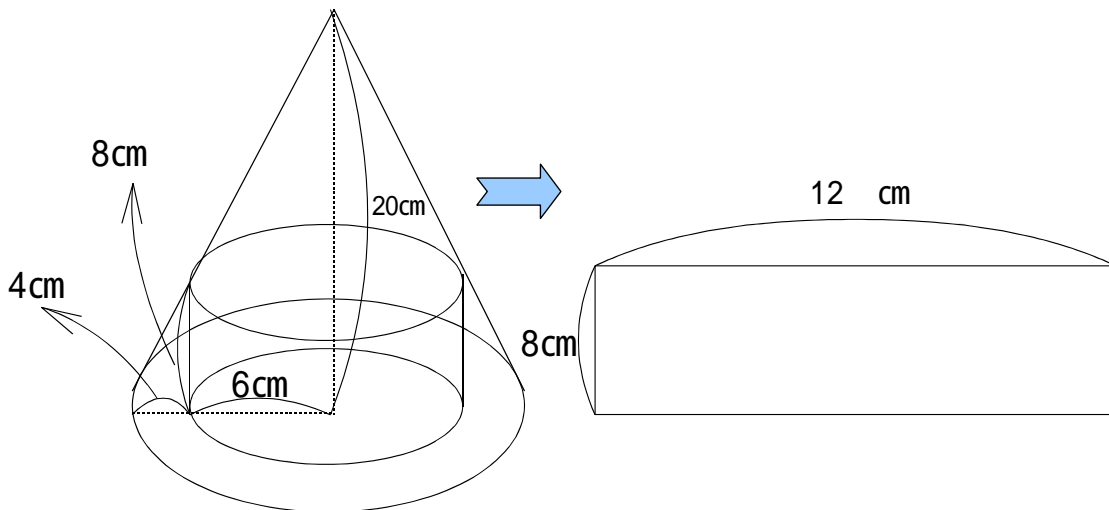
中心から外側に向かってペーパーを押し上げてみよう。



問題2

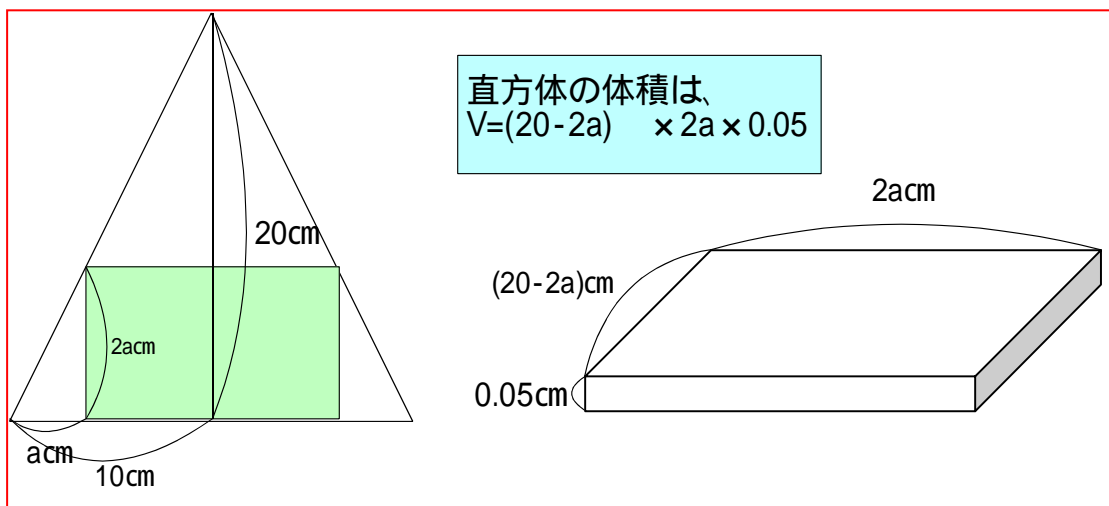
この直円すいは、トイレットペーパーが巻き付いてできたものですが、これを 1 回り分ほぐすと、厚みのある長方形、すなわち直方体になります。この直方体を集めたものが円すいの体積Vとなるわけです。このことを利用して、直円すいの体積を求めてみてください。

ただし、 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ であることを使ってください。



巻き付いているペーパーを
一回り分ほぐすと

長方形ができあがります



直方体の体積は、
 $V=(20-2a) \times 2a \times 0.05$

1回りほぐした円周(長方形の横の長さ)は外側から順に

$(20-0.1)\pi, (20-0.2)\pi, (20-0.3)\pi, \dots, (20-19.8)\pi, (20-19.9)\pi$
となります。

同様に、ほぐした長方形の縦の長さは外側から順に

$0.1, 0.2, 0.3, \dots, 19.9$

となります。

したがってそれぞれの長方形の面積に紙の厚さ 0.05 cm を掛けた直方体の体積の和 v は、

$$\begin{aligned}
 V &= (20-0.1)\pi \times 0.1 \times 0.05 \\
 &+ (20-0.2)\pi \times 0.2 \times 0.05 \\
 &+ \dots \\
 &+ (20-19.8)\pi \times 19.8 \times 0.05 \\
 &+ (20-19.9)\pi \times 19.9 \times 0.05 \\
 &= \{2 \times (1+2+3+\dots+199) - (0.1)^2(1^2+2^2+3^2+\dots+198^2+199^2)\} \times 0.05\pi
 \end{aligned}$$

ここで、 $1+2+3+\dots+199=\frac{1}{2}\times 199\times 200=19900$

また、 $1^2+2^2+3^2+\dots+199^2=\frac{1}{6}\times 199\times 200\times 399=199\times 100\times 133$

となります。

以上より体積 V は

$$V=\{2\times 19900-199\times 133\}\times 0.05\pi=199\times 67\times 0.05\pi=666.7\pi(\text{cm}^3)$$

これから体積は、約 $2093(\text{cm}^3)$ となります。

問題3

トイレトーパー(円柱)の体積を求めてください。直円すいの体積と比較するとどんなことがいえるでしょうか。

円(角)柱の体積は、底面積を S 、高さを h とすると、

$$V=Sh$$

で求められます。

これから円柱の体積 V_1 は、 $V_1=100\pi\times 20=2000\pi$

円柱と円すいの体積の比を求めると、

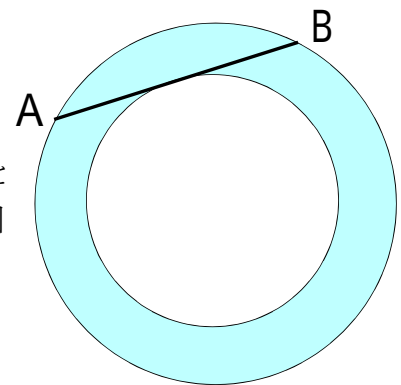
$$V:V_1=666.7\pi:2000\pi\approx 1:3$$

したがって、円すいの体積は円柱の体積の $\frac{1}{3}$ 倍ということが分かりますね。

練習問題

問題1

昔から大工さんは右図のような円形を作るためにどれだけの材
料が必要であるかということを経験上、線分 AB の長さを測ること
で求められることをしていました。線分 AB を直径とする円と、図
の斜線部分の面積の関係を調べてみてください。



解)

斜線部分の面積 S は、

$$S=\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)$$

ですが、ここで、

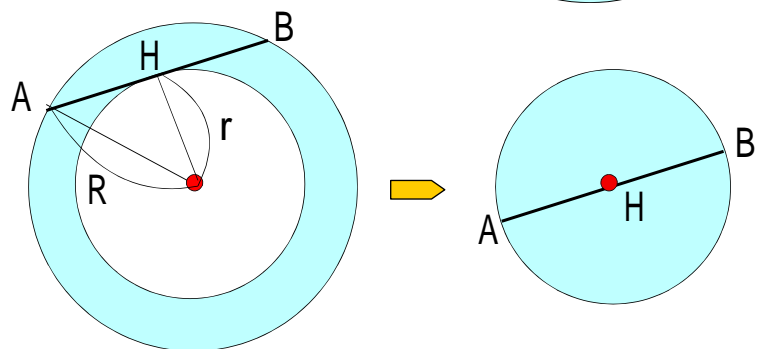
$$AH^2=R^2-r^2$$

よって、 $S=\pi AH^2$

したがって、面積 S は、半径 AH の円の面積と同じことが分かります。

したがって、線分 AB を直径とする

円の面積と、斜線部分の円帯部分の面積は等しいわけです。



問題2

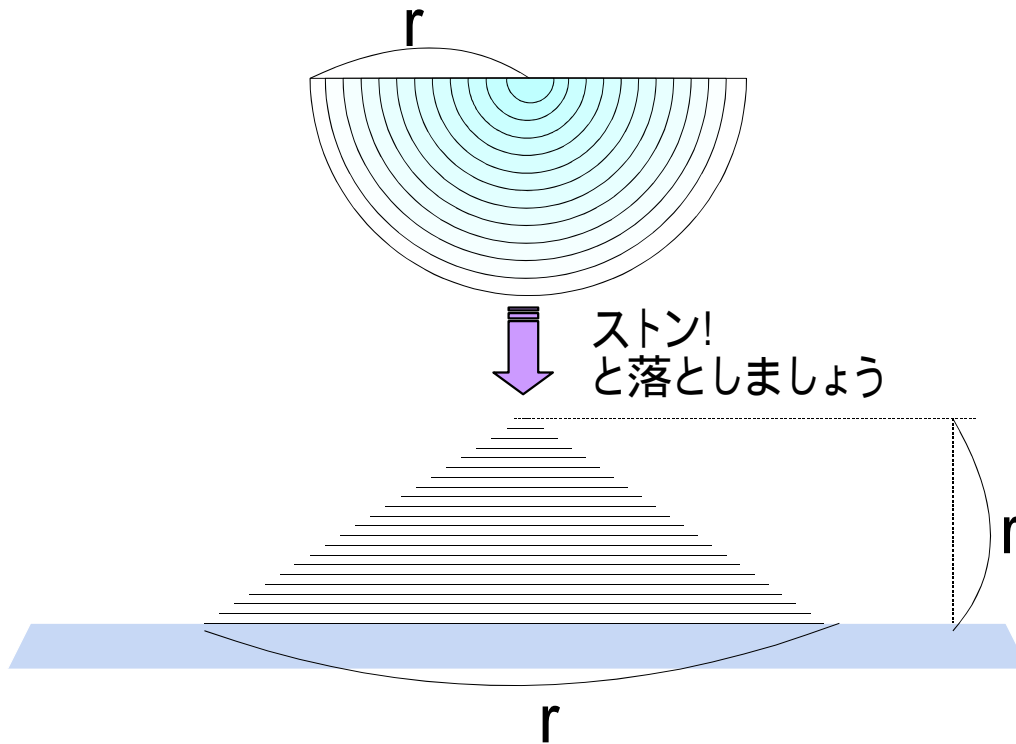
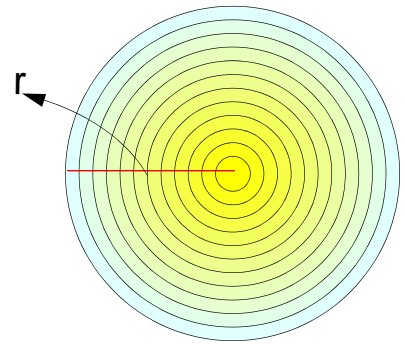
円の面積を芯のないトイレットペーパーを床に落とすことで求めてください。

解)トイレットペーパーを半分に切り、下図のように床に落としてみてください。図の二等辺三角形に成ります。

したがって、半円の面積は二等辺三角形の面積と同じです。三角形の底辺の長さは、半円の弧の長さですから πr です。また、高さは、円の半径に一致します。したがって三角形の面積は、

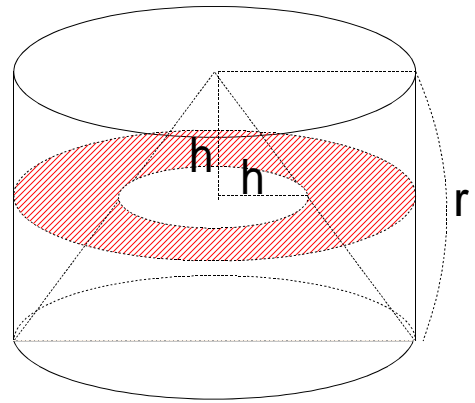
$$\frac{1}{2} \pi r \cdot r = \frac{\pi r^2}{2}$$

半円を2つ合わせたものが求める円の面積ですから πr^2 となります。



問題3

円錐を取り除いた図のトイレットペーパーはドーナツ状の円形を積み重ねたものと考えられます。それぞれのドーナツは問題1よりある円の面積に一致します。それでは、この円を積み重ねるとどんな図形になるでしょうか。

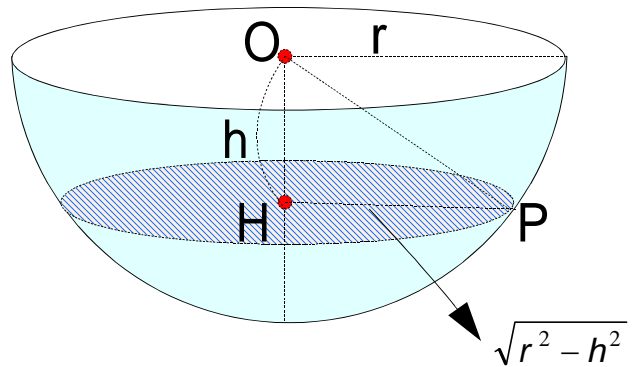


解) 上面から h の深さのところまで水平に切ることができるドーナツの面積は、

$\pi(r^2 - h^2)$ より、半径 $\sqrt{r^2 - h^2}$ である円の面積に一致します。これを積み重ねると図より、

$$\begin{aligned} OP^2 &= OH^2 + HP^2 \\ &= h^2 + (r^2 - h^2) \\ &= r^2 \end{aligned}$$

よって、半径 r の半球となります。



問題4

半径 r の球の体積を問題3を利用して求めてください。

解) 円柱から円錐を除いた部分の体積は

$$r^3 - \frac{1}{3} r^3 = \frac{2}{3} r^3$$

これは半径 r の半球の体積に等しいから球の体積は、

$$\frac{4}{3} r^3$$

となります。

直円すいの体積を求めてみよう

……数学基礎の実験的展開例について

札幌藻岩高校 中村文則

本稿は、数学基礎の補助的教材の一例として提案するものである。

数学基礎では、その指導は「人間」や「社会生活」をキーワードとして、身近な事象の数理的考察をすることを要求している。ただ、理論的な考察は深入りしないという縛りもあるため、自然と直感的なアプローチでの展開となる。また、考察の手段である「計算」についても極力排除し、考察しなければならない。「できる」ことよりも「わかる」ことが重視されているのである。

当然、身近な事象は身近な素材から考察の入口を考えると組みし易いことになる。だから、トイレットペーパーは好例といえる。その素材の柔らかさは、バームクーヘン状に巻きついた図形をいかようにも加工ができる。毎日使用している「トイレットペーパー」の存在感とその感触の「柔らかさ」は、抽象的なイメージをも柔らかくし、想像上で、容易に加工の変化を追っていけるのである。

本稿では、トイレットペーパーを使って、カバリエリの原理による積分概念の指導を試みている。従来より、円柱の体積やペーパーを引き伸ばしたときの紙の長さの求め方については良く知られていることであるが、ここでは、トイレットペーパーを中心から押し込み切り取ってできる直円すいの体積と、残った部分のトイレットペーパーから球の体積を求めている。

ただ、よく考えれば、本文で説明しているような形で円すいの周りにペーパーが巻き取られるわけではないことは、気が付くと思う。柔らかな抽象的イメージを逆手に取った偽りである。実際にはペーパーは円すいに螺旋状に巻き付いていくはずである。本文のような巻きつき方の直円すいを作るには、円柱を削ぎ切って、くり抜かなければならない。

また、図で考えているトイレットペーパーのサイズは、半径10cm、高さ20cmであるから、ずいぶん大きい。実際の大きさを計測すると、(我が家で使用しているものは)半径6cm、高さ12cm位であるから、いくらなんでもこの大きさはないだろう、ということになる。さらに、本文では数列の和を計算させているが、これは前述した数学基礎における「計算の排除」の問題に抵触する。自然数の和ぐらいは、ガウス少年のアイデアで簡単に説明できるが、平方数の和はそうはいかない。だから教科書においてもこの計算の扱いはずいぶんこずっており、指導要領に沿うために、預金の複利法のように止むをえず計算が必要な場合は電卓を利用させているのである。

だが、実際には数学的思考は知恵(アイデア)と知識(計算)の両輪で成り立つわけだから計算を100%排除することなどありえない。知恵を使って「面倒な計算を工夫して簡単にする」ことも数学の大事な思考であるし、知識と知恵は独立した車輪ではなく数学的思考というエンジンに直結した駆動輪と考えるべきなのである。

しかし、本稿を単独の分野と捉えるのではなく、本来の数学がそうであるように他分野との有機的結合の上で成り立つと考えるならば、トイレットペーパーの大きさの問題は、立体の相似比を扱う分野と絡めればよい。平方数の和については、ピラミッド状に配列した数の配列から視覚的に見出すことはよく知られているから、現地調達の事前指導することは可能である。そういった課題解決の在り方の「柔らかさ」も数学基礎の指導には必要不可欠となってくる。

基本的に数学基礎は1からの出発である。分野の概念的な骨子は教科書に扱われるが、それを定着させるための肉付けはずいぶん現場の状況によって違ってくるだろう。ミニマムは1だが、マックスは限りなく不定な値であり、現場設定の到達目標によって決定される。

そして、いよいよ平成15年4月、数学基礎は大いなる課題をもって、現場に参入する。