さいころの目の最大値・最小値の小手技

札幌旭丘高校　中村文則

○カルノー図でパーティション

<まなぶ> さいころを投げた場合，その最大の目や最小の目がでる確率を求める問題があるけど，あれ，なんかいまいち，発想が分からないよね。

<かず子> 例えば，最大値が 5 なら，最大値が 5 以下から最大値が 4 以下を除くという発想よね。それで求められることは理解できる。発想が分からないという発想をするまなぶがわからないわ。

<まなぶ> 最大値の集合から余計な最大値を抜くということは分かるよ。でも直接求めないでなんか裏でこそこそしているようで，感じが良くない。

<先　生> 数学には直感は大事だけど，「感じ」でするものではない。まあ，ここはまなぶの直感とすることにして今回は，その問題を考えてみようか。

> Ex）さいころを 3 個同時に投げるとき，次の確率をそれぞれ求めよ。
>
> ⑴ 最大値 4
>
> ⑵ 最小値 2

<まなぶ> そうそう，この問題。これ，次のように解くんだよね。

まず，最大値が 4 以下の確率は，1 から 4 の目を考えればいいから，$\left(\dfrac{4}{6}\right)^3$。

そして，最大値が 3 以下の確率は，1 から 3 の目だから，$\left(\dfrac{3}{6}\right)^3$。

あとは，最大値 4 の上澄みだけを掬いとると，

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{37}{216}$$

<かず子> 上の澄んだ部分にあるのが最大値っていうのは可笑しいわ。まなぶがいうなら「アクをとる」でしょ。

<まなぶ> かず子の言い方に僕はアクを感じる。で，この方法なんだけど，なんで，「最大値は 4 以上」を考え，不要な部分である「最大値は 5 以上」を除いてはいけないだろうか。

<かず子> うーん。まあ，確かに上澄みを掬いとるより底に沈んでいるものを掻き出すっていうことの方が，まなぶ的といえるかもしれない。

<まなぶ> まなぶ的って，「そこ」じゃないだろ。

<アリス> いまのはギャグなんですか。

<よしお> 気にしないで。でも，まなぶのいってる方法で求めることはできるような気もする。

<先　生> まなぶが納得するためにもその方法でまず解いてみようか。

<アリス> 最大値が 4 以上より，4，5，6 のいずれかいうことですね。だから場合の数は3^3 通りということかしら。

<かず子> その場合の数では，4,5,6 だけの目しか選んでいないから，1,2,3 の目はでないことになってしまうよ。例えば，3 つのさいころの目は，2,3,5 でもいいわけだから。

<よしお> 2,2,6 とか 1,3,5 とか…，最大値が 4 以上を考えるのはけっこう大変かも知れない。

<先　生> そういうように場合分けが面倒なときはどうすればよかったろう。

<アリス> 余事象の確率を考えればいいと思います。

<かず子> 最大値が 4 以上だから，余事象は最大値が 4 未満，ということは最大値が 3 以下なので，その確率は，

$$1-\left(\frac{3}{6}\right)^3 \quad \cdots ①$$

になります。

<よしお> 同じように考えると，最大値が 5 以上の余事象は，最大値が 4 以下だから，確率は，

$$1-\left(\frac{4}{6}\right)^3 \quad \cdots ②$$

<アリス> あとは，①の「最大値が 4 以上」から②の「最大値が 5 以上」を取り除いて，底の最大値である 4 を抜き出せばいいのね。次のようになります。

$$\left\{1-\left(\frac{3}{6}\right)^3\right\}-\left\{1-\left(\frac{4}{6}\right)^3\right\}=\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^3$$

<まなぶ> ちょっとー，みんな遠回しに僕を苛めていない。これ，結局，最大値が 4 以下から最大値が 3 以下を取り除いたってことじゃない。

<かず子> 上澄みが底にかわってるでしょ。まなぶにぴったりだと思うわ。

<先　生> 確かにまなぶがいったように「最大値以上」を考えることもできるけど，「最大値以下」を考えた方がいいことがわかるね。これでまなぶの気分も晴れたことだろう。

<まなぶ> 気分は雨模様なんだけど。だいたい，最大値以下の差をとるといった間接的な方法が許せない。だって，最大値が 4 ということは，一番大きい目の 4 は決まっている。だからあとは残りの 1,2,3 の目を選べば解決するだろ。

<先　生> ごもっともな意見だね。ではその方法でも考えてみようか。

まず，最大値 4 ということは具体的にどういうことか説明してごらん。

<アリス> 残り 2 つの目が，1 から 3 の目ということです。

<よしお> それだけじゃないよ。最大値の 4 の目になるさいころは 2 つでも 3 つでもいい。

<アリス> そうか。最大値は一番大きい目の値であり，その目になるさいころは何個あってもいいということですね。

<先　生> その通り。ではまず 4 の目が 1 つのさいころの場合で考えてごらん。

<かず子> まず，3 つのさいころから 4 の目の出るさいころを 1 つ選びます。そして残りの 2 つは 1 から 3 までの 3 つの目の選び方だから，${}_3C_1\times 3^2$ となります。

<アリス> あとは同じようにできるわ。

3 つのさいころが，4 の目が 2 つある場合は ${}_3C_2\times 3$ 通りで，すべて 4 の目のときは 1 通り。

だから，場合の数は，

$${}_3C_1\times 3^2+{}_3C_2\times 3^1+1=37$$

できたわ。なんかこちらの方が分かり易いわ。

<かず子> アリス，まなぶにたらし込まれたら駄目よ。一見簡単そうに見えるけど，さいころを100 回投げる場合を考えると大変なことになるわ。

<よしお> そうだね。式は求めることはできるけどね。4 の目がでる個数を 1 個から 99 個まで考えればいい。

$${}_{100}C_1\times 3^{99}+{}_{100}C_2\times 3^{98}+{}_{100}C_3\times 3^{97}+\cdots+{}_{100}C_{99}\times 3^1+{}_{100}C_{100}\quad\cdots(*)$$

これを計算しようとしたら，ちょっと厳しいかも。先生，あっていますか。

<先　生> 間違いないよ。でも，この計算は難しくはない。(*)はどこかで見たことがある式ではないだろうか。

<まなぶ> あっ，あれ，あれ，にこーなんとかだ。

<かず子> 二項定理でしょ。確かにそうですね。(*)をまとめると，$\displaystyle\sum_{r=1}^{100}{}_{100}C_r\cdot 3^{100-r}$ 。だから，

$$(x+1)^{100}=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r x^{100-r}$$

ここで，$x=3$ とすると，

$$4^{100}=\sum_{r=0}^{100}{}_{100}C\cdot 3^{100-r}$$

(*)は，$r=0$ が $r=1$ になっているだけだわ。

<よしお> ということは，

$$4^{100}=\sum_{r=0}^{100}{}_{100}C_r\cdot 3^{100-r}=3^{100}+\sum_{r=1}^{100}{}_{100}C_r\cdot 3^{100-r}\qquad\therefore\quad\sum_{r=1}^{100}C_r\cdot 3^{100-r}=4^{100}-3^{100}$$

だから，100 個のさいころを投げたとき，最大値が 4 である確率は，

$$\frac{4^{100}-3^{100}}{6^{100}}$$

ということですね。

<かず子> でもこんな大変な場合分けをするくらいなら，まず，1 から 4 の目の中から重複を許して 100 個選んで，その中で 4 の目がない場合，すなわち 1,2,3 の目から選ぶ場合の数である 3^{100} を除いた方がラクだと思うわ。だから，

$$4^{100}-3^{100}$$

<まなぶ> ちょっとまったー。それ，結局，最大値が 4 以下から最大値が 3 以下を引いていることじゃないか。

かず子の悪意のオーラがみえみえでしょ。

<先　生> 妄想，もうよそう。

<アリス> 先生，どうかしましたか。

<先　生> いや，なんでもない。でも，かず子はとても大事なことをいっている。

<まなぶ> 1 から 4 までの目から 1 から 3 までの目を除くとしかいってないでしょ。それは「最大値 4 以下から最大値 3 以

下を除く」ということだと思うけど。

<よしお> 確かに結果としてはそうなっているけど，最大値とか以下といった言葉は使われていないですよね。それって大事な事なんでしょうか。

<先　生> 大事な事なんだ。以下とか以上といって求めようとするから，まなぶがいうように，技巧的な解法になってしまう。最大値が 4 ということは，5,6 の目はでないということだ。だから，例えば，正四面体に 1 から 4 までの目を描いてさいころを作り，それを転がすときに，4 の目がでる場合の数を求めるとしてしまえばよい。

<まなぶ> ちょっとすっきりした気分。

<先　生> もう少し，整理してみよう。最大値が 4 であるということから，

1 から 4 までの目のある正四面体さいころを考える。

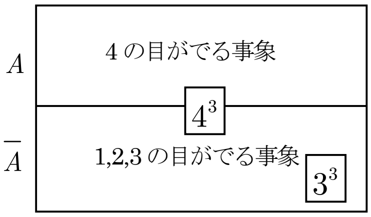
3 回投げる試行を全事象とすると，その場合の数は 4^3 通り。

4 の目がでる事象を A とすると，4 以外の目がでる余事象 $\overline{A}$ は

1,2,3 の目がでればいいので，その場合の数は 3^3 通り。

よって，4 の目が出る場合の数は，

$$4^3-3^3$$



ただし，確率を求めるときは，1 から 6 の目で考える。

全事象の場合の数は 6^3 であることに注意しよう。したがって，

$$\frac{4^3-3^3}{6^3}$$

<まなぶ> なるほど。同じように考えると，(2)の最小値が 2 である確率は，2 から 6 までの 5 つの目のさいころを投げる試行を全事象にするということですね。その場合の数は 5^3 通り。そして，2 の目がでないのは，3 から 6 の 4 つの目の選び方より 4^3 通り。

だから，確率は，

$$\frac{5^3-4^3}{6^3}=\frac{61}{216}$$

うん，文句なくすっきり。

<アリス> 以下とか以上で表現することで，却って問題を煩わしくしていたんですね。そのことを直感的に理解していた，まなぶってすごいわ。

<かず子> う～ん。理解していたというより，いままでの方法を理解できない，あるいは理解したくなかったというだけだと思うけど。

<アリス> あっ，理解していることの余事象を考えろということなんですね。

<まなぶ> アリスが真面目に言うと凄く傷つく。

<先　生> では，少しレベルアップした問題を解いてみようか。

> Ex）さいころを 4 個同時に投げるとき，次の確率をそれぞれ求めよ。
>
> (1) 最小値 1 で最大値 6
>
> (2) 最小値 2 で最大値 5

<先　生> それではまず，まなぶが提案した，最大値と最小値の個数で分けるごり押し法で求めてごらん。

<まなぶ> いつからそんな名前の解答法になったんですか。

<かず子> まなぶ法といわれるよりいいでしょ。

ごり押し法では，最小値 1 の個数と，最大値 6 の個数で場合分けするのね。それぞれの個数を a ,b とすると，

$$(a,b)=(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)$$

ということだわ。

例えば，$(a,b)=(1,1)$ のときを考えてみます。

4 つのさいころから 1 の目と 6 の目がでるさいころを 1 個ずつ選びます。残りの 2 つのさいころは，2 から 5 までの 4 つの目から 2 つ選ぶことだから，その場合の数は，${}_4C_1\times{}_3C_1\times4^2$。

以下，同じように考えると，

$$\begin{aligned}&{}_4C_1({}_3C_1\cdot4^2+{}_3C_2\cdot4+{}_3C_3)+{}_4C_2({}_2C_1\cdot4+{}_2C_2)+{}_4C_3\cdot1\\&=4(48+12+1)+6(8+1)+4\\&=302\end{aligned}$$

なんか，うざいですね。

<まなぶ> おっしゃる通りです，うざいですね。確認するけど，ごり押し法が，うざいということだよね。

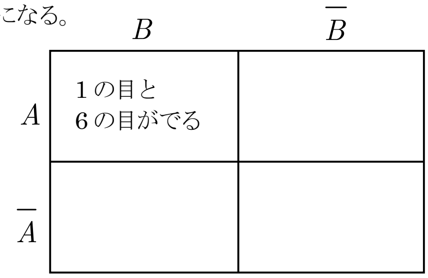
<アリス> それ以外にうざいものがあるのですか。

<かず子> 念押ししなくていいから。それで，これを一般的な解法で求めるには，最小値 1 は最小値 1 以上から最小値 2 以上を除き，最大値 6 は最大値 6 以下から最大値 5 以下を除く，ということですよね。これ，もっとうざいわ。

<アリス> 「以下」と「以上」をどう組み合わせたらいいのかこんがらかってしまう。
<よしお> それを，1と6の目がでる確率というようにみるとすごくシンプルになる。
でも，そのあとはどう処理するのだろうか。
<先　生> まず，事象を定義しよう。

A：1の目がでるという事象
B：6の目がでるという事象

とする。これをカルノー図で表現してみる。



<まなぶ> カルノー図？，わかるの一図のことだよね。
<かず子> やっぱり，うざい
<よしお> カルノー図は右図になります。これをみると求めるものは，
左上の事象$A \cap B$ということですね。
<アリス> それを求めるのがうざいということですから，それ以外の3つの区画を調べればいいということなのですね。
<かず子> 例えば右上は$A \cap \overline{B}$だから，「1の目が出て6の目がでない」ということで，その場合の数は……，
先生，また1の個数で場合分けをしなければならないからうざい。
<まなぶ> うざくないでしょ。1の個数が，1個，2個，3個，4個で場合分けをするだけだ。残りのさいころの目は2〜5の4つの目から選ぶことになるから，

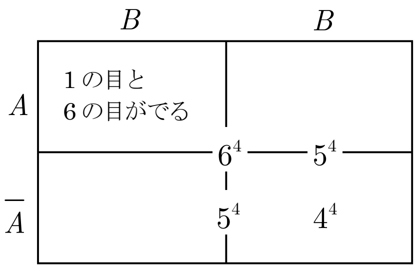
$${}_4C_1 \cdot 4^3 + {}_4C_2 \cdot 4^2 + {}_4C_3 \cdot 4^3 + {}_4C_4$$

でしょ。楽勝じゃん。
<かず子> なんかムキになっていない。でもこれは二項定理から，

$${}_4C_1 \cdot 4^3 + {}_4C_2 \cdot 4^2 + {}_4C_3 \cdot 4^3 + {}_4C_4 = 5^4 - 4^4$$

とできたわ。1から5の目から選んだものから，余計な2から5の目から選んだものを取り除くことになるけど，
私はやっぱりうざいと思う。
<よしお> 確かにパーテーションで分けられた$A \cap B$以外の3つ区画を調べ，その事象の場合の数を求めればいいけど，なんかごり押し法とそれほど変わらないような気がします。それが，うざいということなんでしょうけど。
<まなぶ> なんでよしおまでうざいを強調するかな。
<先　生> 話が白熱してきた。ちょっと見方を変えてみようか。事象$\overline{A}$の場合の数はなんだろう。
<まなぶ> 先生，白熱している内容が違うでしょ。事象$\overline{A}$の場合の数ですか？，1の目がでないということだから，2から6までの5つの目の出方より，その場合の数は5^4通りです。
<よしお> そうか。そう考えればいいんですね。同じように事象$\overline{B}$の場合の数は，1から5までの5つの目の出方だから5^4通りになります。
<アリス> でも，右下の$\overline{A} \cap \overline{B}$は，2度カウントしてますね。
<かず子> その部分は1の目でも6の目でもないということだから，2から5までの4つの目がでる。だからその場合の数は4^4通り。
これを1回分除けばいいのね。だから，

$$5^4 + 5^4 - 4^4$$



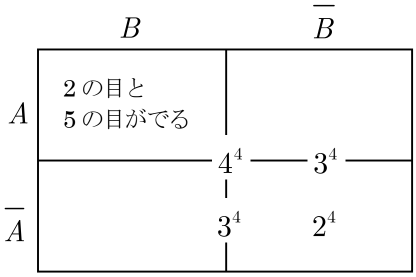
<まなぶ> あとは全事象の場合の数から引いて，確率を求めると，

$$1 - \frac{2 \times 5^4 - 4^4}{6^4} = \frac{151}{648}$$

これで，すっきりした。
同じように考えると(2)もできる。
<アリス> やってみます。
最小値2，最大値5だから，2から5までの4つの目を全事象とします。

A：2の目がでる事象
B：5の目がでる事象

としてカルノー図を作ります。



<かず子> $\overline{A}$は，2の目がでないから，3から5までの3つの目の出方だから3^4
$\overline{B}$も同様に3^4だわ。そして$\overline{A} \cap \overline{B}$は，3,4のどちらかの目の出方より$2^4$。以上より確率は，

$$1 - \frac{2 \times 3^4 - 2^4}{6^4} = \frac{55}{648}$$

ということね。
<よしお> かず子，違うよ。2から5までの目がでる事象を全事象としているから，2の目と5の目がでる場合の数は，

$$4^4 - \left(2 \times 3^4 - 2^4\right)$$

だから，確率は，

$$\frac{4^4-2\times3^4+2^4}{6^4}=\frac{55}{648}$$

<かず子> そっか。全事象を変えていたのを見落としていたわ。

<先　生> 結論がでたね。まなぶがいうように，「以下」とか「以上」としてしまうことで問題の見通しが悪くなり，うざくなっていたんだ。でもうざいこともちょっと視点を変えてみるとシンプルになることが分かるだろ。

<まなぶ> うざいけどシンプルってことは，「複雑そうだけど見方を変えれば単純だ」ってことですよね。それはこの問題の話ですよね。先生の真意，あとで伺いにいきます。

あとがき

さいころの試行は「さいころを投げる」というけど，「さいころを振る」との違いは何でしょうか。

私見ですが，確率は根元事象の起こり方が同じ程度に期待できる「同様に確からしい」ことから得られます。

さいころを振ることは，例えばさいころゲームや江戸時代の賭場での博打のように，ある程度振り手の微妙な操作が目の出方に影響を与えることになるでしょう。極端なケースはいかさまになります。対して，確率は同様に確からしくするために，一度，自然の手に目の出方を委ねなければなりません。そこで，ほうり「投げる」ことになるのです。確率でのさいころは，投げるとした方が公平なのです。シーザーは，賽は投げられた(*the die is cast*) といいました。神の手に委ねたということなのでしょうが，いつも神は公平であればいいのですが。

さて，さいころの最大値や最小値の目の出方を求める問題はよくあるのですが，いつの頃か(いつの頃なのでしょう)最大値以下，最小値以上を考え不要なものを取り除く論法になっています。では最大値以上で考えたら駄目なのか，そもそも，以上とか以下とか議論する必要があるのか，というのが本問の内容になります。

本問の後半の問題「さいころを４個投げるとき，最小値１で最大値６」である確率は，一般には次のように求めます。

A : 最小値１の目がでる事象

B : 最大値６の目がでる事象

このとき，求める確率の事象は $A\cap B$ より，

$$\begin{aligned}P\left(A\cap B\right)&=1-P\left(\overline{A\cap B}\right)\\&=1-P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\\&=1-\left(P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\right)\\&=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4-\left(\frac{5}{6}\right)^4+\left(\frac{4}{6}\right)^4\end{aligned}$$

余事象の確率，ド・モルガンの法則，和事象の確率，性質や定理のオンパレードで確率は導かれます。

これほど，本文中の表現で言えば，「すっきり」する解答もないのですが，導かれる過程が何であったのかを考えれば，これほど，「すっきりしない」解答もありません。

思考と計算の流れを視覚化してするためには，場合の数や確率問題ではカルノー図は絶大な威力を発揮します。

Ex）さいころを４個同時に投げるとき，目の積が６の倍数になる確率を求めよ。

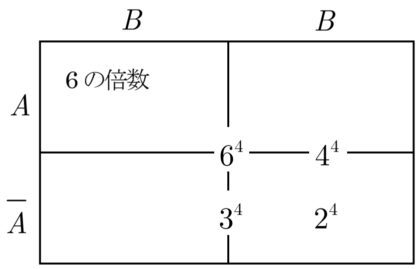
この問題も，

A : 目の積が２の倍数になる事象

B : 目の積が３の倍数になる事象

とすれば，求める事象は $A\cap B$ となり，上述のように，性質のオンパレードで導かれます。

これをカルノー図で示すと右図になります。



$\overline{A}$ は，２の倍数でない事象より，

その場合の数は，1,3,5 の目の出方より 3^4 通り。

$\overline{B}$ は，３の倍数でない事象より，

その場合の数は，1,2,4,5 の目の出方より 4^4 通り

そして，$\overline{A}\cap\overline{B}$ は，２の倍数でも３の倍数でもない事象より，

その場合の数は，1,5 の目の出方より 2^4 通り

以上より，求める確率は，

$$P\left(A\cap B\right)=\frac{6^4-(3^4+4^4-2^4)}{6^4}=\frac{325}{432}$$

頭の片隅に，カルノー図を置いておくと，確率の問題はずいぶんすっきりするのです。