

三角比からみた角の二等分線の性質

市立札幌旭丘高等学校 中村文則

三角形 ABC の内角 A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると、

$$AB : AC = BD : DC$$

が成り立つ

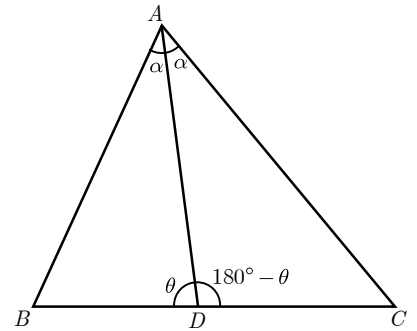
角の二等分線の性質は幾何の有名定理のように数学者の名前で呼ばれる定理ではないが、三角形の種々の性質を導くために使われる性質である。証明は補助線による方法をはじめとして、多くが知られている（「角の二等分線の性質を狩る」参照）。正弦定理を用いた簡単な証明法を示そう。

証明) 右図に置いて、 $\triangle ABD$ において正弦定理より、 $\frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \theta}$

$\triangle ACD$ において正弦定理より、 $\frac{DC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{AC}{\sin \theta}$

$\therefore BD : DC = AB : AC$

Q.E.D.



$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ のそれぞれの外接円の交線を共通弦として、正弦定理が成立してことになる。 $\triangle ABC$ に正弦定理を用いれば、

$BD : DC = AB : AC = \sin C : \sin B$ であるから、次の比も成立する。

$$BD : DC = \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C}$$

三角比を用いて、角の二等分線の長さ AD を求めよう。

ここでは第 1 余弦定理を用いる。

通常の余弦定理は正式には第 2 余弦定理といわれる。次の第 1 余弦定理は、頂点から対辺に垂線を下ろすことで簡単に証明することができる。

《第 1 余弦定理》

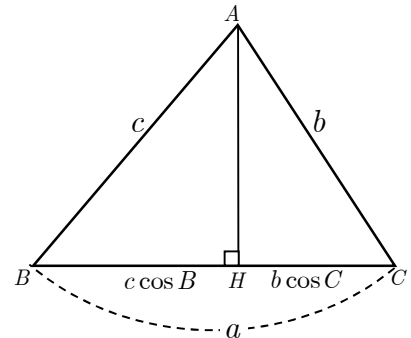
$\triangle ABC$ において、 $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ とすると、

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

この定理は内角が鈍角の場合も成立している。



《角の二等分線の長さ 1》

三角形 ABC の内角 A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。

$AB = c$, $AC = b$ とすると、次式が成立する。

$$AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$$

証明) 角の二等分線の性質より, $BD : DC = AB : AC = c : b$

これより, $BD = kc$, $DC = kb$ ($k > 0$)。また, $\alpha = \frac{A}{2}$ とする。

$\triangle ABD$ において第1余弦定理より,

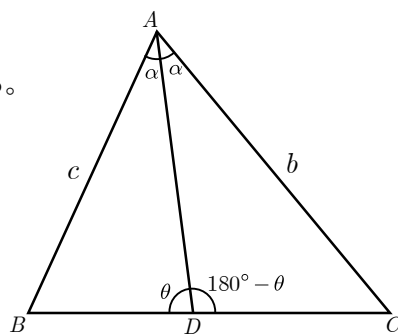
$$AD = AB \cos \alpha + BD \cos \theta = c \cos \alpha + kc \cos \theta \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ACD$ において第1余弦定理より,

$$AD = AC \cos \alpha + DC \cos(180^\circ - \theta) = b \cos \alpha - kb \cos \theta \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times b + \textcircled{2} \times c$ より,

$$(b+c)AD = 2bc \cos \alpha \quad \therefore AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \quad \text{Q.E.D.}$$



この性質は, $\triangle ABC$ を $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ の2つに分割し, 面積比較をすると簡単に証明することができる。

ただその場合は, (数学IIの三角関数で履修する)2倍角の公式が必要になる。

「角の二等分線の性質1」をさらに変形しよう。

$AD = x$, $BD = m$, $DC = n$ とする。

$\triangle ABD$ に第2余弦定理を用いると,

$$x = AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \alpha = \frac{2bc}{b+c} \times \frac{c^2 + x^2 - m^2}{2cx} = \frac{b(c^2 + x^2 - m^2)}{(b+c)x}$$

$$(b+c)x^2 = bc^2 + bx^2 - bm^2 \quad \text{より,} \quad x^2 = bc - \frac{b}{c}m^2$$

$c : b = m : n$ より, $bm = cn$ であるから,

$$x^2 = bc - bm \frac{m}{c} = bc - mn$$

《角の二等分線の長さ2》

三角形ABCの内角Aの二等分線と辺BCとの交点をDとする。

$AB = c$, $AC = b$, $BD = m$, $DC = n$ とすると, 次式が成立する。

$$AD^2 = bc - mn$$

ここで, $BC = a$ とすると, $m : n = c : b$ であるから, $m = \frac{c}{c+b}a$, $n = \frac{b}{c+b}a$

$$AD^2 = bc - \frac{c}{c+b}a \cdot \frac{b}{c+b}a = bc \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \right\} = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

《角の二等分線の長さ3》

三角形ABCの内角Aの二等分線と辺BCとの交点をDとする。

$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とすると, 次式が成立する。

$$AD^2 = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

「角の二等分線の長さ1」において,

$$AD^2 = \left(\frac{2bc}{b+c} \right)^2 \cos^2 \alpha = \left(\frac{2bc}{b+c} \right)^2 \times \frac{1 + \cos A}{2} = 2 \left(\frac{bc}{b+c} \right)^2 \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)$$

このように, 半角の公式を用いても証明することができる。

ろ 三角形ABCの外角の二等分線についても考えてみよう。

$AB > AC$ ($c > b$) とする。

このとき、角Aの外角の二等分線と直線BCの交点DはCの延長上にある。

右図において、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$ にそれぞれ正弦定理を用いる。

$$\frac{AB}{\sin \theta} = \frac{BD}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{BD}{\sin \alpha}, \quad \frac{AC}{\sin \theta} = \frac{DC}{\sin \alpha}$$

$$\therefore BD : DC = AB : AC$$

内角の二等分線の内分点に対し、外角の二等分線は外分点として同じ性質をもつ。

$$BD = kc, \quad DC = kb \quad (k > 0) \text{ とする。}$$

$\triangle ACD$ 、 $\triangle ABD$ にそれぞれ、第1余弦定理を用いると、

$$AD = AC \cos \alpha + DC \cos \theta = b \cos \alpha + kb \cos \theta \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$AD = AB \cos(180^\circ - \alpha) + BD \cos \theta = -c \cos \alpha + kc \cos \theta \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times c - \textcircled{2} \times b \text{ より, } AD = \frac{2bc}{c-b} \cos \alpha$$

$$\text{なお, } A + 2\alpha = 180^\circ \text{ であることから, } \alpha = 90^\circ - \frac{A}{2} \text{。これから, } AD = \frac{2bc}{c-b} \sin \frac{A}{2}$$

$$BD = m, \quad DC = n, \quad AD = x \text{ とすると, } c : b = m : n \text{ より, } mb = nc$$

$$\triangle ACD \text{ に第2余弦定理を用いると } \cos \alpha = \frac{b^2 + x^2 - n^2}{2bx}$$

$$x = AD = \frac{2bc}{c-b} \times \frac{b^2 + x^2 - n^2}{2bx} \quad (c-b)x^2 = c(b^2 + x^2 - n^2) \text{ より,}$$

$$x^2 = \frac{cn^2}{b} - bc = mn - bc$$

$AB < AC$ の場合も同様に考えると次の結論を得る。

($AB = AC$ のときは外角の二等分線と直線BCとの共有点はない)

《外角の二等分線の性質》

三角形ABCの角Aの外角の二等分線と辺BCとの交点をDとすると次が成立する。

(1) $BD : DC = AB : AC$

(2) $AB = c, CA = b$ とすると, $AD = \frac{2bc}{|b-c|} \sin \frac{A}{2}$

(3) $AD^2 = BD \cdot DC - AB \cdot AC$

なお、(3)については、 $AD^2 = |BD \cdot DC - AB \cdot AC|$ すると、角の二等分線の長さは内角・外角に共通した性質となる。

次に、三角形の内角を2つの角に分ける場合を考えてみよう。

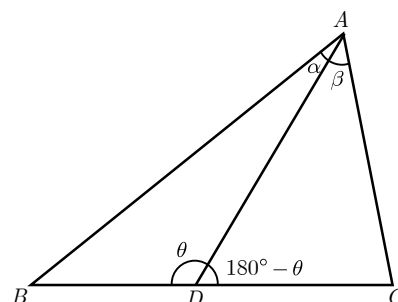
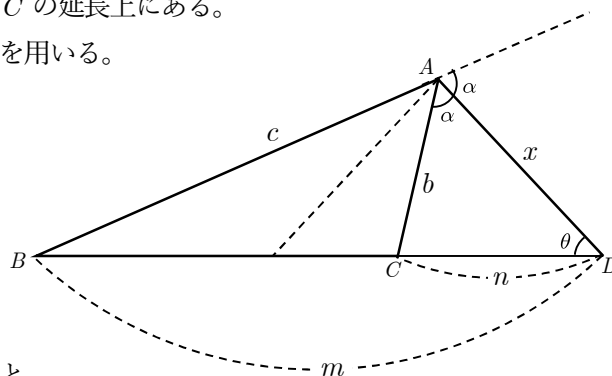
$\angle BAD = \alpha$ 、 $\angle CAD = \beta$ とする。

$\triangle BAD$ と $\triangle CAD$ に正弦定理を用いると、

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \theta}, \quad \frac{DC}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{AC}{\sin \theta}$$

これから、

$$BD : DC = AB \sin \alpha : AC \sin \beta$$



$AD = x$, $BD = m$, $DC = n$ とする。

$\triangle BAD$ と $\triangle CAD$ に第1余弦定理を用いると、

$$AD = AB \cos \alpha + BD \cos \theta = c \cos \alpha + m \cos \theta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$AD = AC \cos \beta + DC \cos(180^\circ - \theta) = b \cos \beta - n \cos \theta \quad \dots \textcircled{2}$$

① $\times n$ + ② $\times m$ より、

$$AD = \frac{nc \cos \alpha + mb \cos \beta}{m + n} \quad \dots \textcircled{3}$$

ここで、 $m : n = c \sin \alpha : b \sin \beta$ より、

$$AD = \frac{bc(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)}{c \sin \alpha + b \sin \beta} \quad \dots \textcircled{4}$$

この性質を面積比較で求めてみよう。

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha + \beta), \quad \triangle ABD = \frac{1}{2}cx \sin \alpha, \quad \triangle ACD = \frac{1}{2}bx \sin \beta$$

ここで、 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$ より、

$$AD = x = \frac{bc \sin(\alpha + \beta)}{c \sin \alpha + b \sin \beta} \quad \dots \textcircled{5}$$

④, ⑤を比較すると、

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (0 < \alpha + \beta < 180^\circ)$$

間接的に正弦の加法定理が示された。

③をさらに変形してみる。

$\triangle ABD$, $\triangle ACD$ に第2余弦定理を用いる。

$$\cos \alpha = \frac{c^2 + x^2 - m^2}{2cx}, \quad \cos \beta = \frac{b^2 + x^2 - n^2}{2bx}$$

③に代入する

$$x = \frac{nc}{m+n} \times \frac{c^2 + x^2 - m^2}{2cx} + \frac{mb}{m+n} \times \frac{b^2 + x^2 - n^2}{2bx}$$

$$2(m+n)x^2 = n(c^2 + x^2 - m^2) + m(b^2 + x^2 - n^2) = (m+n)x^2 + n(c^2 - m^2) + m(b^2 - n^2)$$

$$\therefore x^2 = \frac{nc^2 + mb^2}{m+n} - mn$$

《三角形の内角を分割する線分の長さ》

三角形ABCの頂点Aを通る直線が対辺BCと交わる点をDとする。

$AB = c$, $AC = b$, $BD = m$, $DC = n$ とすると、

$$AD^2 = \frac{nc^2 + mb^2}{m+n} - mn$$

この性質を「スチュワートの定理」という。

$$\text{ここで、} m = n \text{ とすると、} AD^2 = \frac{mc^2 + mb^2}{2m} - m^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - m^2$$

このとき線分ADは中線であり、中線の長さを得るこの定理を中線定理(パップスの定理)という。

$$\text{また、} c : b = m : n \text{ とすると、} AD^2 = \frac{bc^2 + cb^2}{c+b} - mn = \frac{bc(b+c)}{c+b} - mn = bc - mn$$

角の二等分線の長さが得られる。

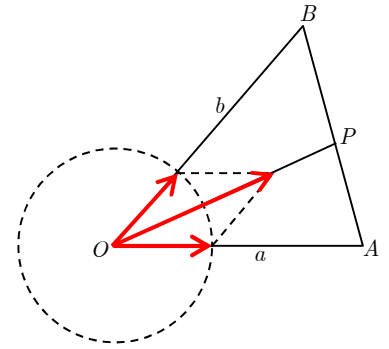
あとがき

角の二等分線の性質は数学A「図形の性質」で扱う。図形の相似、円周角の性質、方べきの定理などを用いると角の二等分線の性質は鮮やかに証明することができる。ここでは敢えて数学Iの「三角比」の分野(三角関数ではない)の性質を用いている。多面的な思考が問われる昨今、そういうアプローチも必要なのだろう。ちなみに、個人的にはベクトルによる解法が一番好きではある。

でも、2年次までの高校履修の分野からは消えてなくなってしまった。

$$\vec{OP} = k \left(\frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b} \right) = \frac{k}{a} \vec{a} + \frac{k}{b} \vec{b} \quad \frac{k}{a} + \frac{k}{b} = 1 \quad \text{より、} \quad k = \frac{ab}{a+b}$$

$$\vec{OP} = \frac{b\vec{a} + a\vec{b}}{a+b} \quad \text{より、} \quad AP:PB = a:b$$

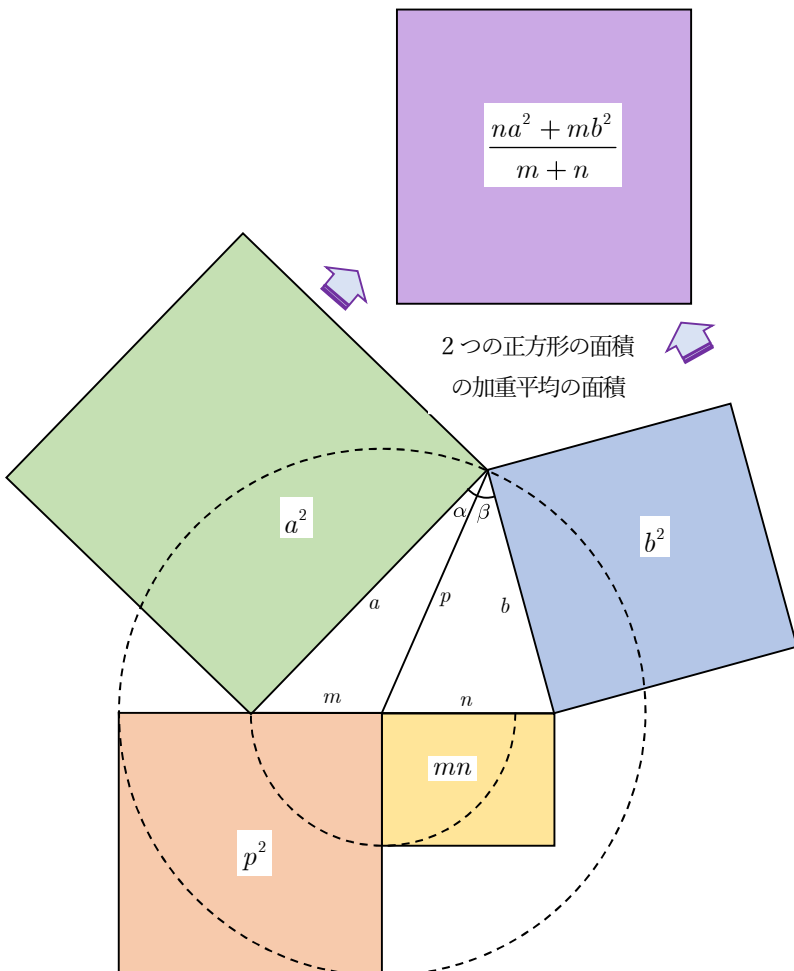
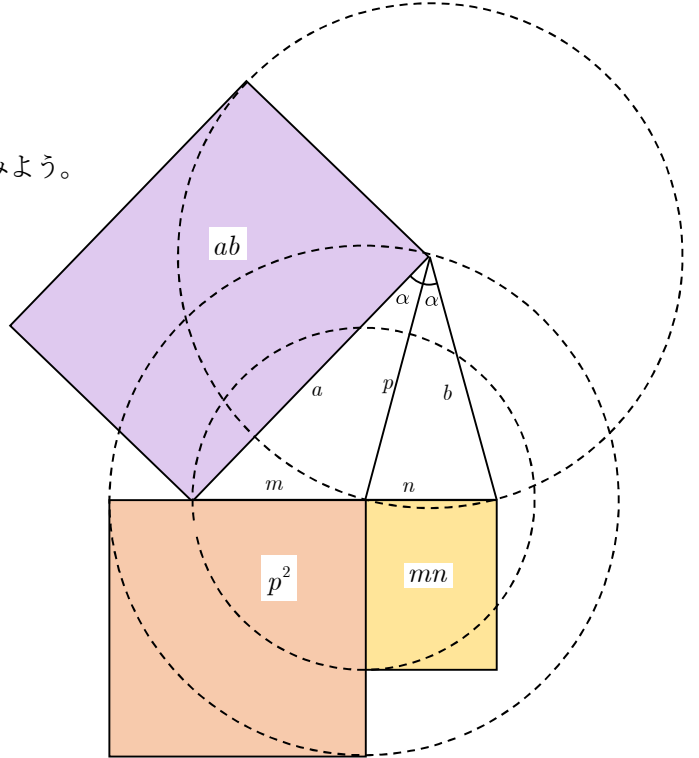


ちょっと、視覚的に角の二等分線の長さを図示してみよう。

正確には長さの平方とみて、面積で表す。

ユークリッド原論はこのようなアプローチがよくある。

相似な2つの長方形の面積の差が1つの正方形の面積で表される面白い性質である。



2つの正方形の面積
の加重平均の面積

左図は、スチュワートの定理を図示したものである。三角形の辺の長さを1辺とする正方形を2つ考えると、その面積の加重平均により、面積が釣り合う。

厚紙で切り取り、天秤ばかりで釣り合いを調べてみると探究的な学習につながるだろう。