

《オレ1》 a, b は、方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解である。 a, b の値を求めよ。

【解答】 2次方程式の解と係数の関係より、 $a + b = -a \cdots ①$, $ab = b \cdots ②$ ここで①より、 $b = -2a$ である。
②に代入すると、 $-2a^2 + 2a = 0$ これを解いて $a = 1, 0$ ①から、 $(a, b) = (1, -2), (0, 0)$ 答

5点/10点

《オレ2》 n は正の整数として、 $f(n) = n^2 + 3n + 6$ を $n + 1$ で割った余りを求めよ。

【解答】 $f(n) = (n + 1)(n + 2) + 4$ 以上より、余りは4 答

2点/10点

《オレ3》 $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ が $(x - a)(x - 1)$ で割り切れるように、定数 a, b の値を求めよ。

【解答】 因数定理を用いて、 $f(a) = 0$ より、 $ab - 2 = 0 \cdots ①$ $f(1) = 0$ より、 $b = a + 1 \cdots ②$
②を①に代入、 $a^2 + a - 2 = 0$ より、 $a = -2, 1$ 以上より、 $(a, b) = (-2, -1), (1, 2)$ 答

7点/10点

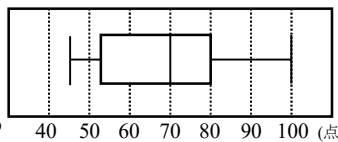
《オレ4》 $a^2 - bc = 0 \cdots ①$ $b^2 - ca = 0 \cdots ②$ $c^2 - ab = 0 \cdots ③$ が成り立つとき $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ の値を求めよ。

【解答】 $(① + ② + ③) \times 2$ より、 $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = 0$ 変形して、 $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$
よって、 $a - b = b - c = c - a = 0$ これから $a = b = c$ 以上より、 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$ 答

5点/10点

《オレ5》 右の箱ひげ図は33人の生徒の数学の得点の分布を示したものである。
70点台の得点の人数を求めよ。

【解答】 生徒数が33人より中央値(第2四分位数)の70点の生徒がおり、70点以上の生徒数は17人である。また、第3四分位数は80点であるから80点以上の生徒数は8人である。以上より、 $17 - 8 = 9$ 人 答



1点/10点

《オレ6》 男6人、女4人の10人から女子を含むように3人選ぶ場合の数を求めよ。

【解答】 女子1人をまず選び、残り9人から2人選ぶと必ず女子の人数は1人以上である。

$${}_4C_1 \times {}_9C_2 = 4 \times \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 144 \text{ (通り)} \quad \text{答}$$

0点/10点

《オレ7》 放物線 $y = x^2 + a \cdots ①$ と円 $x^2 + y^2 = 4 \cdots ②$ が接するとき、 a の値を求めよ。

【解答】 ①より、 $x^2 = y - a$ であるから、②に代入して整理すると、 $y^2 + y - (a + 4) = 0$

$$\text{判別式を } D \text{ とすると、 } D = 1 + 4(a + 4) = 4a + 17 \quad D = 0 \text{ より、 } a = -\frac{17}{4} \quad \text{答}$$

3点/10点

《オレ8》 2つの円 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ の交点を通る直線の方程式を求めよ。

【解答】 2つの円の交点を通る直線は、 $x^2 + y^2 - 1 + k(x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9) = 0$ と表すことができる。
 $k = -1$ のとき、直線を表すからこれが求める直線である。以上より、 $3x + 4y - 5 = 0$ 答

3点/10点

《オレ9》 空間に3点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, -1, 3)$, $B(1, 0, 2)$ がある。線分 AB に点 P があるとき、 $|\overline{OP}|$ の最小値を求めよ。

【解答】 $\overline{OP} = (1 - t)\overline{OA} + t\overline{OB}$ とおける。 $\overline{OP} = (1 - t)(2, -1, 3) + t(1, 0, 2) = (2 - t, -1 + t, 3 - t)$

$$|\overline{OP}|^2 = (2 - t)^2 + (-1 + t)^2 + (3 - t)^2 = 3t^2 - 12t + 14 = 3(t - 2)^2 + 2 \text{ 以上より } t = 2 \text{ のとき最小値 } \sqrt{2} \quad \text{答}$$

6点/10点

《オレ10》 4点 $A(3, 2, 1)$, $B(-1, -1, 0)$, $C(-3, 1, 2)$, $D(4, -6, k)$ について、直線 AB と直線 CD が直交するように定数 k を定めよ。

【解答】 $\overline{AB} = (-4, -3, -1)$, $\overline{CD} = (7, -7, k - 2)$ である。 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ であるから、 $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$

$$\text{これより、 } -4 \times 7 + (-3) \times (-7) + (-1)(k - 2) = 0 \text{ これを解いて、 } k = -5 \quad \text{答}$$

5点/10点

《オレ11》 $\int_a^x (x - t)f(t)dt = x^4 - 2x^2 + 1$ であるとき、関数 $f(x)$ と a の値を求めよ。

【解答】 $x \int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt = x^4 - 2x^2 + 1$ より両辺を x で微分する。

$$\int_a^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 4x^3 - 4x \quad \text{よって、 } \int_a^x f(t)dt = 4x^3 - 4x \quad \cdots ①$$

①の両辺を x で微分すると、 $f(x) = 12x^2 - 4$ また①の両辺に $x = a$ を代入すると、

$$4a^3 - 4a = 0 \text{ より、 } a(a - 1)(a + 1) = 0 \text{ 以上より、 } a = -1, 0, 1 \quad \text{答}$$

5点/10点

君はオレオレ詐欺を撃退できたかな？（詐欺の仕組みを理解して被害を防ごう）

《オレ1》

a, b は、方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解である。 a, b の値を求めよ。

【解答】 2次方程式の解と係数の関係より、 $a + b = -a \cdots \textcircled{1}$ 、 $ab = b \cdots \textcircled{2}$ ここで $\textcircled{1}$ より、 $b = -2a$ である。
 $\textcircled{2}$ に代入すると、 $-2a^2 + 2a = 0$ これを解いて $a = 1, 0$ $\textcircled{1}$ から、 $(a, b) = (1, -2), (0, 0)$ 答

5点/10点

【解説】

問題をちよつと変えて、
 a, b は、方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の2つの解である。 a, b の値を求めよ。
 このような設問であればオレオレ解答は正しい。
 a, b が方程式の2つの解でないこともあるので詐欺に巻き込まれてしまう。
 例えば、 $a = 2, b = 3$ とすると、2と3は方程式の解であり、オレオレ解答のように解と係数の関係を用いることができる。
 では、 $a = b = 2$ としてみよう。 $x = 2$ は方程式の解であるが、残りの1つの解は与えられていないことになる。
 同様に、 $a = b$ のときは、 $x = a$ 以外の残りの解を $x = \beta$ とし、方程式 $x^2 + ax + a = 0$ に解と係数の関係を用いる。
 $a + \beta = -a \cdots \textcircled{1}$ 、 $a\beta = a \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ より、 $a(\beta - 1) = 0$ よって、 $a = 0$ または $\beta = 1$
 $a = 0$ のとき、 $\textcircled{1}$ より $\beta = 0$ すなわち、方程式の解は重解 $x = 0$ である。
 $\beta = 1$ のとき、 $\textcircled{1}$ より、 $a = -\frac{1}{2}$
 このときの β は、もともと与えられていない解である。

a, b が二次方程式の2つの解である場合は、オレオレ解答の通りである。

以上より、 a, b の値は、 $(a, b) = (0, 0), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (1, -2)$

Remark)

a, b ($a = b$) が方程式の1つの解である場合は、 $x = a$ を方程式 $x^2 + ax + a = 0$ に代入して、
 $a^2 + a^2 + a = 0$ より、 $a(2a + 1) = 0$

これから $a = 0, -\frac{1}{2}$ を求めることもできる。

Remark)

次も本問と同様の問題である。

「 α, β は2次方程式 $x^2 - 2x + 2 = 0$ の解である。 $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めよ。」
 解は $\alpha^2 + \beta^2 = -4i, 0, 4i$

《オレ2》

n は正の整数として、 $f(n) = n^2 + 3n + 6$ を $n + 1$ で割った余りを求めよ。

【解答】 $f(n) = (n + 1)(n + 2) + 4$ 以上より、余りは4 答

2点/10点

【解説】

本問のオレオレ解答を次のようにする。
 剰余の定理より、 $f(-1) = (-1)^2 + 3 \times (-1) + 6 = 4$
 こうすると、多くの生徒は
 「 n は正数だから、 $n = -1$ を入れるのは間違いである」と指摘し得意げな顔をする。
 生徒は二重のトラップに引っ掛かったことに気がつかない。
 本当の詐欺である「 n は正の整数」が「正数」の言葉でカモフラージュされてしまう。
 さて、 n は正の整数であるから、 $f(n)$ は整式ではなく正の整数(自然数)である。
 整式の余りは、割る式の次数より低い整式であるが、自然数の余りは、割る数より小さい数である。
 $n = 2$ のとき、 $f(2) = 16$ であるが、 $f(2)$ は $n - 2$ で割った余りではなく、 $n = 2$ のときの自然数の値16のことである。
 問いは、16を $n + 1$ すなわち3で割ったときの余りを求めることであり、
 $16 = 3 \times 5 + 1$ より、余りは1である。
 ここで、解答をみると、
 $f(n) = (n + 1)(n + 2) + 4$
 この式変形に誤りはない。4は1次式で割ったときの余りを表す定数である。
 だから4をさらに $n + 1$ で割って自然数で割った余りを求めればよい。
 $n = 1$ のときは、2で割るから、 $4 = 2 \times 2$ より余り0
 $n = 2$ のときは、3で割るから、 $4 = 3 \times 1 + 1$ より余り1
 $n = 3$ のときは、4で割るから、 $4 = 4 \times 1 + 0$ より余り0
 $n \geq 4$ のときは、5以上の整数で割るから、余りは4
 以上より、 $n = 1, 3$ のとき余り0、 $n = 2$ のとき余り1、 $n \geq 4$ のとき余り4

《オレ3》

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ が $(x-a)(x-1)$ で割り切れるように、定数 a, b の値を求めよ。

【解答】 因数定理を用いて、 $f(a) = 0$ より、 $ab - 2 = 0 \cdots ①$ $f(1) = 0$ より、 $b = a + 1 \cdots ②$

②を①に代入、 $a^2 + a - 2 = 0$ より、 $a = -2, 1$ 以上より、 $(a, b) = (-2, -1), (1, 2)$ 答

7点/10点

【解説】 剰余の定理(因数定理)は整式を一次式で割った余りを求める。

だから、 $a = 1$ のときは、①、②はどちらも $f(1) = 0$ で同じ式を意味することになってしまう。

実際、①、②から得られるのは $b = 2$ だけであり、 $(x-1)^2$ で割り切れることにはならない。

したがって、解答で $(a, b) = (1, 2)$ のときは、

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)(x^2 + 2)$$

であり題意を満たさない。この確認がオレオレ解答では抜けていることになる。

なお、 $f(x) = 0$ の2解が $x = a, 1$ であるから残りの解を $x = c$ とすると、3次方程式の解と係数の関係より、

$$a + c + 1 = a, \quad a + c + ca = b, \quad ac = 2$$

である。これから、 $a = -2, b = -1, c = -1$ が得られる。

Remark)

$$f(x) = x^3 - (a+3)x^2 + bx - 2 \quad \text{のとき、}$$

$(x-a)(x-1)$ で割り切れるときの a, b の値はどうなるだろうか。

$a \neq 1$ のとき、

$$f(1) = -a + b = 0 \cdots ①, \quad f(a) = -3a^2 + ab - 2 = 0 \cdots ②$$

①、②より b を消去すると、

$$-2a^2 + 4a - 2 = 0 \quad \therefore (a-1)^2 = 0 \quad a \neq 1 \text{ より、これを満たす } a \text{ の値はない。}$$

すなわち、この場合は、 $a = 1$ のとき、 $b = 5$ となり、 $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ である。

《オレ4》

$a^2 - bc = 0 \cdots ①$ $b^2 - ca = 0 \cdots ②$ $c^2 - ab = 0 \cdots ③$ が成り立つとき $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ の値を求めよ。

【解答】 ①+②+③×2より、 $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = 0$ 変形して、 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

よって、 $a-b = b-c = c-a = 0$ これから $a=b=c$ 以上より、 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$ 答

5点/10点

【解説】 一見すると間違いはないように思われる。

ただ、オレオレ解答があまりにテクニカルであると感じないだろうか。

このような解答をみせつけられるとついついうなずいてしまい、トラップを見つけれなくなる(オレオレ詐欺のように)。

そして重箱の隅を突くように、

「求める式の分母は0でない。 $a = b = c = 0$ とすると条件式を満たしている」

これが解答の誤りとしてしまう。

しかし、求める式が分数で与えられていることは、分母は0でないとしているのである。だからこれが誤りというわけではない。

このように何が誤りか分からなくなったときには、ただ解答を眺めているのではなく、自分で解いてみるのがよい。

このことは自分が書いた解答にも同じことが言える。

何度見直しても自分の解答に誤りをみつけれないことがあるが、それは解法の思考パターンが目の前にある解答によって制限されてしまうからだ。そういうときは、すべてをリセットしてもう一度解きなおした方がいいのだ。

さて、文字数が多い整式の場合の鉄則は1文字消去である。ここでは、 a, b の関係を調べるので c を消去する。

$$① \times a - ② \times b \text{ より、} a^3 - b^3 = 0$$

左辺を因数分解すると、

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = 0$$

よって、 $a = b \cdots ①$ または、 $a^2 + ab + b^2 = 0 \cdots ②$

①の $a = b$ のとき

$$\text{解答のように、} \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{a}{a} + \frac{a}{a} = 2$$

②の $a^2 + ab + b^2 = 0$ のとき

$b \neq 0$ であるから、両辺を b^2 で割ると、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1 = 0 \quad \text{よって、} \frac{a}{b} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \cdots ③$$

すなわち、 a, b は虚数である。

ここで、問題文を見ると、数の範囲が示されていないことに気がつく。

a, b, c は複素数の範囲で考えなければならぬのだ。

あとは③の値を代入すれば、求める値が得られる。もう少しテクニカルに解くならば、

②より、 $a^2 + b^2 = -ab$ であるから、

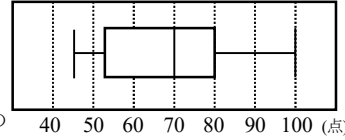
$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{-ab}{ab} = -1$$

以上より、 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = -1, 2$

なお、上述の解説をみて分かるように、 c はまったく用いられていない。結局、オレオレを成立させるための当て馬である。

《オレ5》

右の箱ひげ図は33人の生徒の数学の得点の分布を示したものである。
70点台の得点の人数を求めよ。



1点/10点

【解答】 生徒数が33人より中央値(第2四分位数)の70点の生徒がおり、70点以上の生徒数は17人である。また、第3四分位数は80点であるから80点以上の生徒数は8人である。以上より、 $17-8=9$ 人 **答**

【解答】 問いを「70点以上の生徒の人数は少なくとも17人いる」として、○×だけを求めると、大半の生徒は正解する。しかし、その理由を問うと、

「人数は奇数より、点数の高い方から17番目の生徒の得点70が中央値である

だから、70点以上の生徒数は17人。これは少なくとも17人いるといえる」

このような答えが返ってくる。○という結果は一致しても考え方は間違っている生徒が大半なのである。

これはセンター試験的な穴埋め式問題の大きな欠点といえるだろう。

箱ひげ図は、データの散らばり具合を5数要約を用いて調べるもので、具体的な各データの値を示しているわけではない。

問いの箱ひげ図では、

第1四分位数(Q_1)は、 $Q_1=52$ 、第2四分位数(Q_2)は $Q_2=70$

このことは読み取れるが、この区間の個々の得点までは分からない。

いま、生徒を得点の低い順に左から①～③③として並べる。

このとき、中央値は①⑦の生徒の得点で70であるが、その前後①⑥⑧の得点が確定できるわけではない。

①⑥⑧がともに70点ということもあるのだ。

したがって70点台の人数は固定の値ではなく、不等式として最大と最小で決まる値なのである。

まず、最大値を求めよう。

第2四分位数70は①⑦番の生徒の得点である。その左に位置する生徒①⑥も同じ得点である可能性がある。

以下、①④⑬…と番号を小さくしていても、同じ70点であることは起こり得る。

ここで、第1四分位数52は⑧と⑨の生徒の得点の平均であるから、⑨が70点の場合を考えると、⑧は34点である。

ところが最低点は45点よりこれは起こり得ない。

よって、⑨の生徒の得点は70点より低いということになる。だから⑩までが70点の可能性のあることになる。

次に、①より右の生徒の得点についても同様に考えると70点である可能性がある。

ここで、第3四分位数80は②⑤と⑥の平均であるが、②が70のときは、⑤は90であればよい。

結局、⑩～②⑥が70点の可能性はある。

これより、人数の最大値は $25-10+1=16$

次に最小値は、①⑦の70点に対して、左の①⑥は60でもよい。

また右の①⑩以降の生徒は、①⑧から②⑤まで80点の可能性はある。

以上より、70点台の生徒の人数は、1人以上16人以下である。

	最低点 45点	第1四分位数 52点	第2四分位数 70点	第3四分位数 80点	最高点 100点
生徒	① ②	⑧ ⑨ ⑩	①⑥ ①⑦ ①⑧	②⑤ ②⑥	③② ③③
得点	45		70		100
70点台最大数	45	50 54 70	70 70 70	70 90	100
70点台最小数	45	50 56 60	60 70 80	80 80	100

《オレ6》

男6人、女4人の10人から女子を含むように3人選ぶ場合の数を求めよ。

【解答】 女子1人をまず選び、残り9人から2人選ぶと必ず女子の人数は1人以上である。

$${}_4C_1 \times {}_9C_2 = 4 \times \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 144 \text{ (通り)} \quad \text{答}$$

0点/10点

【解説】

場合の数では、「重複しないで数え上げる」ことが重要である。

本問で、10人から3人を選ぶ場合の総数は、

$${}_{10}C_3 = 120$$

オレオレ解答の144には多くの重複が起きていることが分かる。確かめてみよう。

男6人をA,B,C,D,E,Fとし、女4人をa,b,c,dとしよう。

オレオレ解答の選び方をしてみよう。

まず選ぶ一人の女子をaとする。次に、aを除いた残りの9人から選んだ2人をA,bとする。

今度は、選ぶ一人の女子をbとする。次に、bを除いた残りの9人から選んだ2人をA,aとする。

この2つの選びかたでは、どちらも、選ばれた3人はA,a,bであり、重複して数えたことが分かる。

このような重複がオレオレ解答では発生しているのである。

本当の解答は余事象を用いる。

女子を含まない選び方は、 ${}_6C_3 = 20$

全体から3人を選ぶ場合の総数から引いて、 $120 - 20 = 100$

Remark)

オレオレ解答の方法から正答を導いてみよう。

女子aを選びときは、残り9人から2人を選ぶ ${}_9C_2 = 36$

女子bを選ぶときは、女子aは選ばないで残り8人から2人選ぶ ${}_8C_2 = 28$

以下、同様に考えると、 ${}_9C_2 + {}_8C_2 + {}_7C_2 + {}_6C_2 = 36 + 28 + 21 + 15 = 100$

《オレ7》

放物線 $y = x^2 + a \cdots ①$ と円 $x^2 + y^2 = 4 \cdots ②$ が接するとき、 a の値を求めよ。

【解答】①より、 $x^2 = y - a$ であるから、②に代入して整理すると、 $y^2 + y - (a + 4) = 0$

判別式を D とすると、 $D = 1 + 4(a + 4) = 4a + 17$ $D = 0$ より、 $a = -\frac{17}{4}$ 答

3点/10点

【解説】これほど、間違っていることは判断できるが、その説明が難しい問題もないだろう。

②の円に対して、頂点が $(0, a)$ である放物線を頂点の位置を動かしてみる。

そうすると、接するときの a の値は3つあることが分かるだろう。

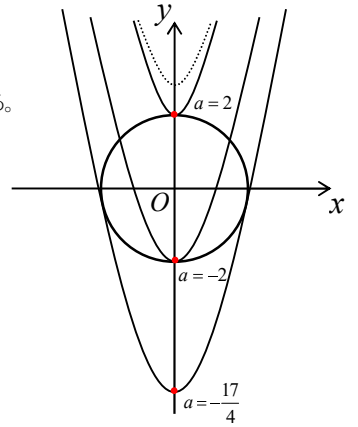
$(0, a)$ の a の値を、大きな値から小さな値に変化させると、頂点は、 y 軸上を上から下へと移動する。

放物線の頂点が円に外接するとき、最初の a の値、 $a = 2$ が得られる。

さらに頂点を下げると、頂点は円に内接し、 $a = -2$ となる。

この後、放物線と円は4つの交点を持つが、やがて放物線の内側で円が接する状態となる。

これがオレオレ解答の $a = -\frac{17}{4}$ である。



これをグラフからではなく、式の値として求めるにはどうすればよいだろう。

オレオレ解答は正しいように見えるが、3つの接点の1つしか求められていない。

まず、オレオレ解答では、①を②に代入しているが、これは適切ではない。

②より、 $x^2 = 4 - y^2$ とする。するとこの式から、 $-2 \leq y \leq 2$ が得られる。

②を①に代入して、 $y^2 + y - (a + 4) = 0 \cdots ③$

③が、 $-2 \leq y \leq 2$ の範囲でどのような解をもてばいいか調べる。

③が重解 $y = \alpha$ をもつとき、 $x^2 = 4 - \alpha^2$ より、 $x = \pm\sqrt{4 - \alpha^2}$ である。

放物線と円と交点の個数は4個以下であるから、このときの x は重解であることは何となく理解できるがはっきりしない。

同じように、 $-2 \leq y \leq 2$ のときの区間の両端の値のグラフの位置関係も式だけでは判別し難い。

このように、 y の式にしてしまうと接する状態がぼやけてしまうのである。

そこで、①を②に代入して x の方程式にしてみよう。

$$x^2 + (x^2 + a)^2 = 4 \text{ より、 } x^4 + (2a + 1)x^2 + (a^2 - 4) = 0$$

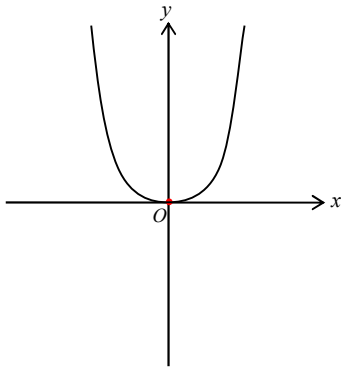
ここで、 $f(x) = x^4 + (2a + 1)x^2 + (a^2 - 4)$ とおく。

$y = f(x)$ は4次関数である。また、 $f(-x) = f(x)$ であり偶関数より、 $y = f(x)$ のグラフは y 軸対称である。

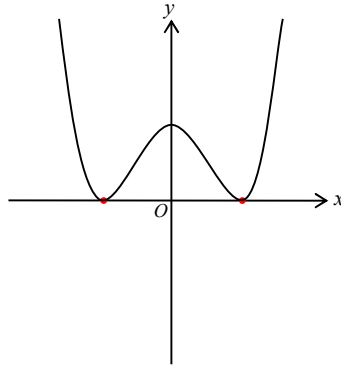
よって、グラフと x 軸の位置関係を調べると、下図のように、3つの状態を考えることができる。

これらが、放物線と円が接する場合である。

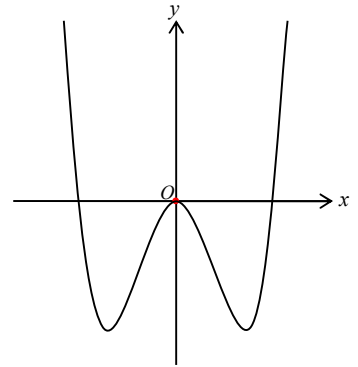
x 軸と1点のみで接する
(2重解と2つの虚数解)



x 軸と2点のみで接する
(2つの2重解)



x 軸と1点で接し2点で交わる
(2重解と異なる2つの実数解)



a の値を求めよう。

$$f'(x) = 4x^3 + 2(2a + 1)x = 2x(2x^2 + 2a + 1)$$

$2a + 1 \geq 0$ のとき

$2x^2 + 2a + 1 \geq 0$ であるから、 $f'(x) = 0$ とすると、 $x = 0$ である。

増減表より、 $x = 0$ のとき極小値 $f(0) = a^2 - 4$ をとる。

x 軸と接するとき、 $a^2 - 4 = 0$ 。

$a \geq -\frac{1}{2}$ であるから、 $a = 2$ 。

$2a + 1 < 0$ のとき、

$f'(x) = 0$ とすると、 $x = 0, 2x^2 + 2a + 1 = 0$ である。

$$2x^2 + 2a + 1 = 0 \text{ より、 } x = \pm\sqrt{\frac{-2a-1}{2}} = \pm\alpha$$

よって、右の増減表を得る。

ここで、グラフが x 軸の接するのは、

(極小値) = 0 または (極大値) = 0

のときである。

x	\cdots	0	\cdots
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	極小	\nearrow

x	\cdots	$-\alpha$	\cdots	0	\cdots	α	\cdots
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	極小	\nearrow	極大	\searrow	極小	\nearrow

(極大値) = 0 のとき,

$$f(0) = a^2 - 4 = 0 \quad a < -\frac{1}{2} \text{ より, } a = -2$$

(極小値) = 0 のとき,

グラフは y 軸対称であるから,

$$f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$$

である。

$$\alpha^2 = \frac{-2a-1}{2} \text{ より,}$$

$$f(\alpha) = \alpha^4 + (2a+1)\alpha^2 + (a^2-4) = \left(\frac{-2a-1}{2}\right)^2 + (2a+1) \times \frac{-2a-1}{2} + (a^2-4) = -a - \frac{17}{4}$$

$$\therefore -a - \frac{17}{4} = 0 \text{ より } a = -\frac{17}{4} \quad \text{これは, } a < -\frac{1}{2} \text{ を満たす。}$$

$$\text{以上より, } a = -\frac{17}{4}, -2, 2$$

Remark)

$f(x) = x^4 + (2a+1)x^2 + (a^2-4)$ において,

$$t = x^2, \quad g(t) = f(x) \text{ とおくと,}$$

$$g(t) = t^2 + (2a+1)t + a^2 - 4$$

このとき, $y = f(x)$ が重解をもつのは,

$$t = 0 \text{ または, } g(t) = 0 \text{ が重解をもつときである。}$$

《オレ8》

2つの円 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ の交点を通る直線の方程式を求めよ。

【解答】 2つの円の交点を通る曲線は, $x^2 + y^2 - 1 + k(x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9) = 0$ と表すことができる。

$k = -1$ のとき, 直線を表すからこれが求める直線である。 以上より, $3x + 4y - 5 = 0$ 答

3点/10点

【解説】 円 C_1 は, 中心 $O(0,0)$ で半径 $r = 1$ の円。

円 C_2 は, $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ より, 中心 $A(3,4)$ で, 半径 $R = 4$ の円である。

したがって中心間の距離は $OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

また, 2円の半径の和は, $R + r = 5$

$OA = R + r$ であるから, 2円は外接している。

すなわち, 問いは外接するときの接点を通る直線を求めよということになる。

接点の座標は, 線分 OA を C_1 と C_2 の半径の比, すなわち $1:4$ に内分する点より,

$\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ である。以上より, 接点を通る直線の方程式は,

$$a\left(x - \frac{3}{5}\right) + b\left(y - \frac{4}{5}\right) = 0$$

である。

Remark)

ところで, 接点は交点としていいのだろうか。

交点は, 曲線が他の曲線を横切る状態であるから接点とは異なる。

このような曖昧な状態も含めて共有点という用語が用いられるから, 接点は共有点である。

そういう意味では, 本問は問題として不適切ということになってしまう。

本問はオレオレ解答ではなく問題そのものに誤りにある場合であるが, 適切な設問にするなら,

「共通接線」とか「2円の中心を結ぶ直線に垂直で共有点を通る直線」

となるが, 本問の「2円の交点を通る曲線群」の性質からは離れていく。

2円が共有点を持たない場合にも「円-円=直線」という構図は保たれるが

この直線の存在は「交わらない2円の交点を通る直線」(Shadow-Line)で示している。

簡単にいうと, 円の外部にある点 P から円に接線を引くとき, その接点を A とすると,

AP^2 を「べき」という。交わらない2円

$$C_1: f(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$$

$$C_2: g(x, y) = (x-c)^2 + (y-d)^2 - R^2 = 0$$

が与えられたとき, 2円の外部の点から2円 C_1, C_2 に引いた接点をそれぞれ A, B とする。

このとき,

$$AP^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = f(x, y)$$

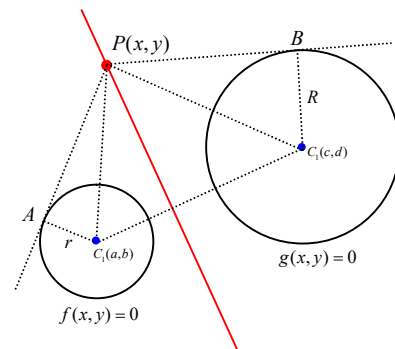
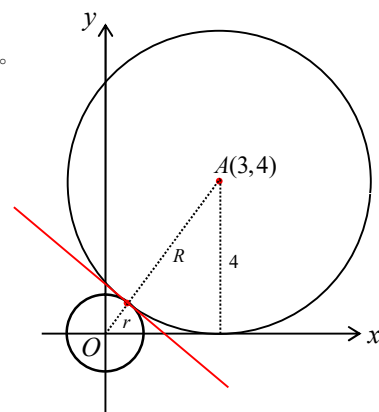
$$BP^2 = (x-c)^2 + (y-d)^2 - R^2 = g(x, y)$$

であるから, $AP^2 = BP^2$ のとき, $f(x, y) = g(x, y)$ となり,

$$f(x, y) - g(x, y) = 0$$

これから, 「円-円=直線」となる。この直線は「べきの値が等しい軌跡」を表している。

この直線のことを, 「根軸」という。



《オレ9》

空間に3点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, -1, 3)$, $B(1, 0, 2)$ がある。線分 AB に点 P があるとき、 $|\overline{OP}|$ の最小値を求めよ。

【解答】 $\overline{OP} = (1-t)\overline{OA} + t\overline{OB}$ とおける。 $\overline{OP} = (1-t)(2, -1, 3) + t(1, 0, 2) = (2-t, -1+t, 3-t)$

$|\overline{OP}|^2 = (2-t)^2 + (-1+t)^2 + (3-t)^2 = 3t^2 - 12t + 14 = 3(t-2)^2 + 2$ 以上より $t=2$ のとき最小値 $\sqrt{2}$ 答

6点/10点

【解説】 どこが違うの?と思うかもしれない。オレオレ解答で $t=2$ 求めるところまではその通りである。

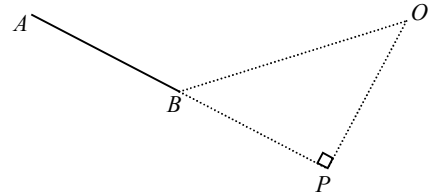
$t=2$ のとき点 P はどこにあるかということが問題なのである。

直線のベクトル方程式は、 $\overline{OP} = (1-t)\overline{OA} + t\overline{OB}$ と表されるが、 $t, 1-t$ の意味についてきちんと理解していないとオレオレ詐欺に引っ掛かる。

点 P は AB を $t:1-t$ の比に分ける点である。

したがって $t=2$ のときは、 $AP:PB = 2:(-1)$ 、すなわち、 AB を $2:1$ の比に外分する点である。

ここで、点 P は「線分 AB 上の点」であることを確認しよう。 $t=2$ のときは線分 AB の B の側への延長上の点なのである。したがって最小値は OB である。以上より、 $|\overline{OP}| = OB = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$



《オレ10》

4点 $A(3, 2, 1)$, $B(-1, -1, 0)$, $C(-3, 1, 2)$, $D(4, -6, k)$ について、直線 AB と直線 CD が直交するように定数 k を定めよ。

【解答】 $\overline{AB} = (-4, -3, -1)$, $\overline{CD} = (7, -7, k-2)$ である。 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ であるから、 $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$

これより、 $-4 \times 7 + (-3) \times (-7) + (-1)(k-2) = 0$ これを解いて、 $k = -5$ 答

5点/10点

【解説】 これもまた《オレ9》同様どこが違うの?と思うかもしれない。そしてこのオレオレ解答も $k = -5$ を求める過程までは正しい。では、何が足りないのだろうか。このオレオレ解答は、空間内のベクトルだから起きる詐欺といたら分かるだろうか。本問で要求しているのは「直交」することであり「垂直」ではない。平面上では「直交」と「垂直」は同じことであるが、空間内では、「直交」は「垂直に交わる」ことである。すなわちオレオレ解答では、「交わる」ことの確認が抜けているのである。オレオレ問題の後半に次を加える。

よって、 $D(4, -6, -5)$ である。

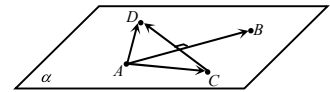
ここで、三角形 ABC を含む平面 α 上の点 P は、

$$\overline{AP} = s\overline{AB} + t\overline{AC} = s(-4, -3, -1) + t(-6, -1, 1) = (-4s - 6t, -3s - t, -s + t)$$

と表すことができる。 $\overline{AD} = (1, -8, -6)$ より、 $\overline{AP} = \overline{AD}$ とすると、

$$-4s - 6t = 1 \quad \dots \textcircled{1}, \quad -3s - t = -8 \quad \dots \textcircled{2}, \quad -s + t = -6 \quad \dots \textcircled{3}$$

である。②と③を連立させて、 $s = \frac{7}{2}, t = -\frac{5}{2}$ これは①を満たしている。以上より $k = -5$



《オレ11》

$\int_a^x (x-t)f(t)dt = x^4 - 2x^2 + 1$ であるとき、関数 $f(x)$ と a の値を求めよ。

【解答】 $x \int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt = x^4 - 2x^2 + 1$ より両辺を x で微分する。

$$\int_a^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 4x^3 - 4x \quad \text{よって、} \int_a^x f(t)dt = 4x^3 - 4x \quad \dots \textcircled{1}$$

①の両辺を x で微分すると、 $f(x) = 12x^2 - 4$ また①の両辺に $x = a$ を代入すると、

$$4a^3 - 4a = 0 \text{ より、} a(a-1)(a+1) = 0 \text{ 以上より、} a = -1, 0, 1 \quad \text{答}$$

5点/10点

【解説】 本問は、微積分の基本定理 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$ の性質を用いる問題である。

微積分の基本定理は簡単にいうと、「積分して微分したら元に戻る」という性質である。

さて、オレオレ解答であるが、両辺を微分して①の関係式を導くまでは正しい。

間違いは、この①に $x = a$ を代入した点である。

正しくは、与式に $x = a$ を代入しなければならない。その場合は、

$$\int_a^a (a-t)f(t)dt = a^4 - 2a^2 + 1$$

これより、 $a^4 - 2a^2 + 1 = 0 \quad (a^2 - 1)^2 = 0$ より、 $a = \pm 1$

オレオレ解答の a の値から、 $a = 0$ が抜けている。

①に $x = a$ を代入して得られる値に間違いはないのであるが、①は、与式の間数を微分することで、右辺の定数が消えてしまうことが問題なのである。すなわち、与式が、 $\int_a^x (x-t)f(t)dt = x^4 - 2x^2 + c$ であっても①と同じ式が得られてしまう。この定数の違いが、 $a = 0$ というイレギュラーの解を生み出してしまった。覆水盆に返らずということ。

Remark)

問題の式を、 $\int_a^x (x-t)f(t)dst = x^4 - 2x^2 - 3$ とする。

$x = a$ を代入すると、 $a^4 - 2a^2 - 3 = 0 \quad (a^2 - 3)(a^2 + 1) = 0$ a は実数より、 $a = \pm\sqrt{3}$

この a の値は、①の a の値に含まれない。このような場合は問題の間数そのものが間違いということになる。

君は再びオレオレ詐欺に引っ掛かっていないか？ (いつの間にか詐欺に巻き込まれないために)

《オレ1》

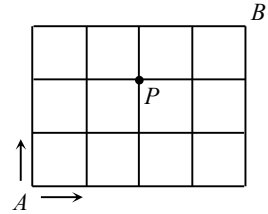
方程式 $|x^2 - 4| = 5$ を解け。

【解答】 $-2 \leq x \leq 2$ のとき、 $x^2 - 4 \leq 0$ より、 $-(x^2 - 4) = 5$ $x^2 + 1 = 0$ これを満たす x は存在しない。
 $x < -2, 2 < x$ のとき、 $x^2 - 4 > 0$ より、 $x^2 - 4 = 5$ よって、 $x = \pm 3$ これは、 $x < -2, 2 < x$ を満たす。
 以上より、 $-2 \leq x \leq 2$ のとき、解はない $x < -2, 2 < x$ のとき、 $x = -3, 3$ 答

3点/10点

《オレ2》

右の図のような街路がある。点 A を出発したまなぶ君が、最多経路(進む向きは右または上ということ)で点 P を通って、点 B までいく確率を求めよ。ただし、まなぶくんは各交差点において道を等確率で選ぶとする。



【解答】 点 A から点 P までの最短経路の選び方は、 ${}_4C_2$ である。道の選び方はより、
 点 A から点 P に進む確率は、

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

同様に、点 P から点 B に進む確率は、

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

以上より、点 A から点 B に行く確率は、 $\frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$ 答

5点/10点

《オレ3》

箱 A には、当たりくじ 2 本を含む 6 本のくじが入っている。箱 B には赤球 2 個、白球 4 個の 6 個の球が入っている。箱 A から 2 本のくじを同時に引き、当たりくじであるとき、箱 B から当たりくじの枚数と同じ個数の球を同時に取り出すとき、少なくとも 1 個は赤球である確率を求めよ。

【解答】 余事象のすべて白球を取り出す確率を求める。

箱 A から引いた当たりくじが 1 枚のときは、箱 B から 1 個の白球を取り出す。

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_3C_1}{{}_5C_1} = \frac{8}{15} \times \frac{3}{5} = \frac{8}{25}$$

箱 A から引いた当たりくじが 2 枚のときは、箱 B から 2 個の白球を取り出す。

$$\frac{{}_2C_2 \times {}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{50}$$

よって、少なくとも 1 個は赤球を取り出す確率は、 $1 - \left(\frac{8}{25} + \frac{1}{50}\right) = \frac{33}{50}$ 答

6点/10点

《オレ4》

$I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} dx$ を求めよ。

【解答】 $x = \cos \theta$ とおく。両辺の微分をとると、 $dx = -\sin \theta d\theta$
 ここで x と θ の対応は右表のようになる。

x	$-1 \cdots \cdots \frac{1}{2}$
θ	$-\pi \cdots \cdots \frac{\pi}{3}$

$$I = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{1-\cos^2 \theta}}{1-\cos \theta} (-\sin \theta) d\theta = - \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 \theta}{1-\cos \theta} d\theta = - \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos \theta) d\theta = -[\theta + \sin \theta]_{-\pi}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$
 答

7点/10点

《オレ5》

a, b を整数とする。2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が整数解をもてば、 a, b のうち少なくとも 1 つは偶数であることを証明せよ。

【解答】 2次方程式の整数解を α, β とする。背理法で証明する。

解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = -a \cdots \textcircled{1}$ 、 $\alpha\beta = b \cdots \textcircled{2}$ である。

ここで、 a, b がともに奇数であると仮定すると、 $\textcircled{2}$ より α, β はともに奇数である。

このとき、 $\textcircled{1}$ より $\alpha + \beta$ は奇数の和であるから a は偶数となり矛盾する。

よって背理法により a, b の少なくとも 1 つは偶数である。 答

8点/10点

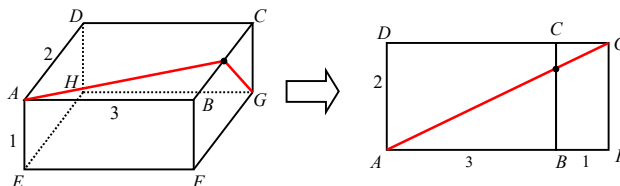
《オレ6》

3稜の長さが $3, 2, 1$ である直方体の対角線の一端から面上を通って、他端へいく最短路の長さを求めよ。

【解答】

右図より求める長さは

$$\sqrt{(3+1)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$
 答



3点/10点