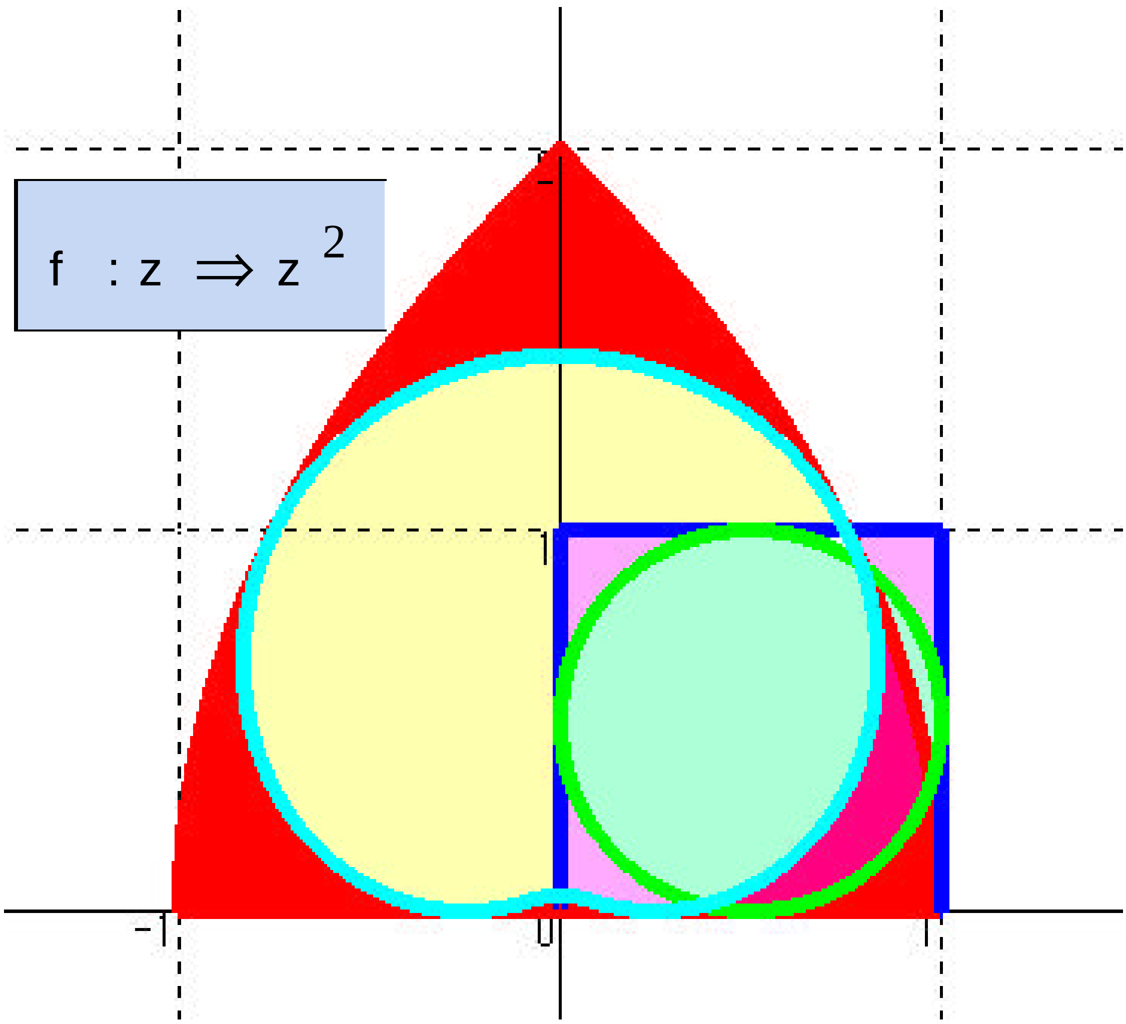
メービウスのしっぽ



札幌新川高等学校

中 村 文 則

べき乗変換のイメージ化

札幌新川高等学校　中村文則

０．はじめに

$f: z \to \dfrac{1}{z}$ なる変換は複素数平面上の広義の円を、広義の円に移すことが初等幾何の反転を利用することで示される。このことは、稲北高校の早苗先生が、レポート「1/z 変換をイメージ化する」の中で、関数表示ソフト「Grapes」使って鮮やかにその無限の神秘性を視覚化した。レポートの中盤で氏は、メービウス変換による円の像から一歩進んで、基底である座標平面全体がどう変換されるか試みている。平面を実軸および虚軸に平行な格子に分割して変換したわけである。私の前回のレポート「メービウスのわだち」は、思考で思い描ける範囲のイメージを図式化したものであるが、複素数平面のように複雑なアラベスクを編む曲線ではやはり限界がある。そこで、今回は、Windows 上で JIS Full BASIC の環境を実現することを目標に作成された言語処理システムである十進ＢＡＳＩＣ(文教大学教育学部 白石和夫氏)および、関数描画ソフト「Grapes」(大阪教育大学附属高等学校 友田勝久氏)を使って複素数平面の神秘性について触れて見ようと思う。特に、

$f: z \to z^p$ $(p \in Q)$ なるベキ変換による

　　①　半径１の円の変換　　　②座標平面全体の変換

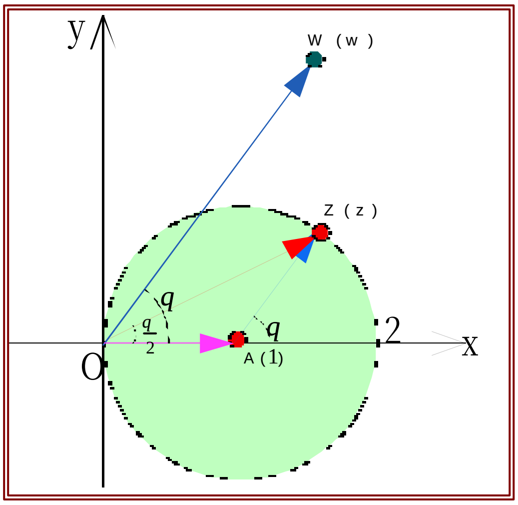
について調べてみよう。

Ｉ．単位円の変換

中心がαで半径１の円 z は、中心 0 で半径１の円を z_1 $(|z_1|=1)$とすると、

$$z = \alpha + z_1$$

と表される。この円 z のベキ変換による像を考える。



１．　$w = z^2$ の像

$z=r(\cos\theta+\sin\theta)$とすれば、$|w|=r^2, \arg w=2\theta$ である。z が中心 0 で半径1の円であれば、w も中心0、半径1の単位円であることは容易に予想されよう。では半径1の円を実軸、虚軸の方向に平行移動した円の像はどうなるか調べてみよう。

A(α),Z(z)とすると、複素数α, z はベクトル$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OZ}$ と同一視できる。

$\alpha = r_1 e^{i\theta_1}$ とすると、これから、

$$
\begin{aligned}
|w| &= |z^2| \\
&= |z|^2 \\
&= \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AZ}\right|^2 \\
&= \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AZ} + \left|\overrightarrow{AZ}\right|^2 \\
&= r_1^2 + 2(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta, \sin\theta) + 1 \\
&= r_1^2 + 2r_1(\cos\theta_1\cos\theta + \sin\theta_1\sin\theta) + 1 \\
&= r_1^2 + 1 + 2r_1\cos(\theta - \theta_1)
\end{aligned}
$$

ここで、r=|w|とすると、極方程式

$$r = r_1^2 + 1 + 2r_1\cos(\theta - \theta_1)$$

は、心臓形(Cardioid)なる曲線を描く。この曲線が argw により、さらに変形されるわけだが、概ねその外形は心臓形を反映したものだと考えてよいだろう。

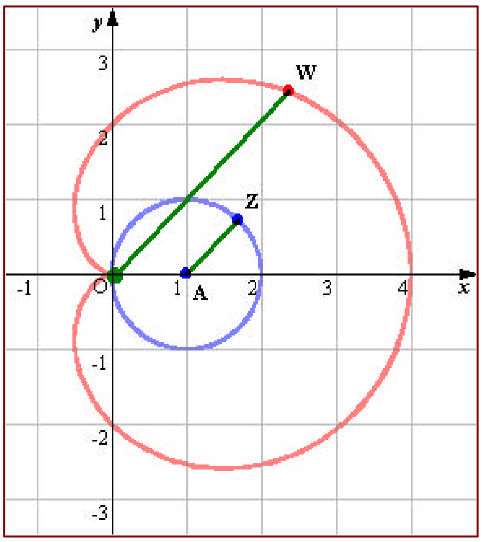
たとえば、A(1)とすると、z は、中心１半径１の円を表すが、このとき、

$$r_1 = 1,\quad \theta_1 = 0$$

であるから、　$r = 2 + 2\cos\theta$

である。このとき、argz=θ でより、

$$w = 2(1+\cos\theta)e^{i\theta}$$



となり、極方程式における心臓形の標準形をえる。

では、$A\left(\frac{1}{2}\right)$とするとどうなるだろうか。

$$|w| = \frac{5+\cos\ q}{4}$$

である。ここで

$$z = \frac{1}{2} + \cos\ q + i\sin\ q \quad \text{より}$$

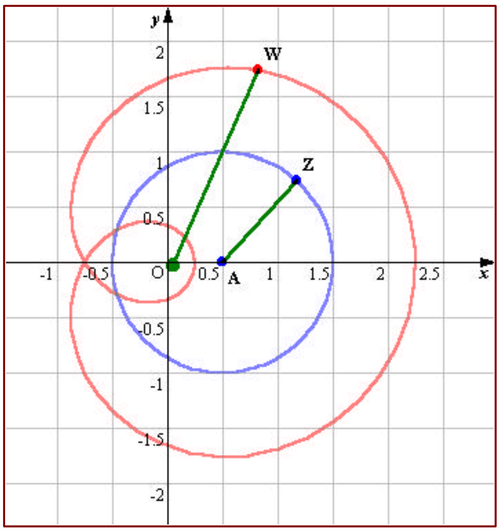
$$z^2 = \left(\cos\ 2q + \cos\ q + \frac{1}{4}\right) + (\sin\ 2q + \sin\ q)i$$

であるから、曲線は、

$$x = \cos\ 2q + \cos\ q + \frac{1}{4}$$

$$y = \sin\ 2q + \sin\ q$$

と parameter 表示できる。

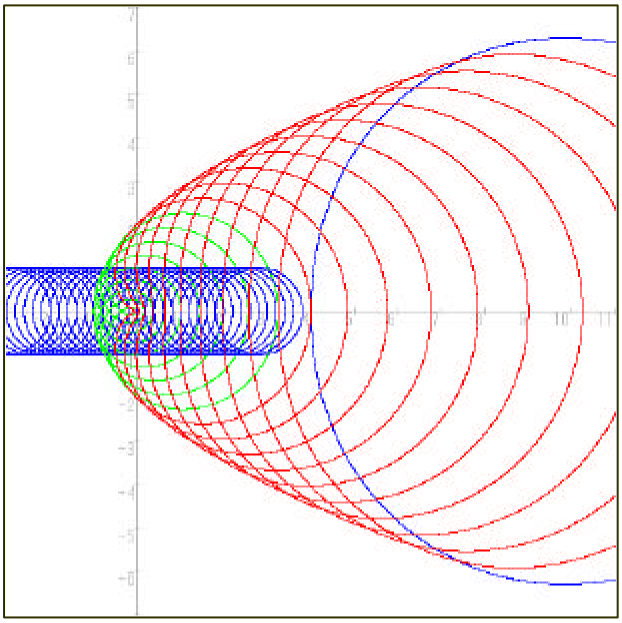


これから$w = z^2 = \left(\frac{5}{4} + \cos\ q\right)e^{i\Theta}$を表すｗの偏角Θ が求められる。この曲線を、エピサイクロイドというが、関数表示ソフト「Grapes」を使って表示したのが、右図である。

　このように、ｗの偏角が曲線カージオイドを加工して様子が分かるがそれを式として表現することは難しい。そこで、$\arg\ w = j(q)$として、

$$w = (r_1^2 + 1 + 2r_1\cos\ q)e^{j(q)i}$$

　の軌跡を十進ＢＡＳＩＣを使って描画してみよう。



右図は、A(t)として、単位円の中心を実軸上で変化させたときの曲線を描画したものである。

カージオイドからエピサイクロイドに変化していく様子が伺われる。

この図から、次のことが予想される。

① $z=\alpha+z_1$ と $z=-\alpha+z_1$ の軌跡は等しい(これは明らかなことである)

② $|z|<1$ のとき、エピサイクロイド

　$|z|\geqq 1$ のとき、カージオイド

　なお、このことは、中心が実軸上にある点のみならず、複素数平面上のすべての点についていえることである。

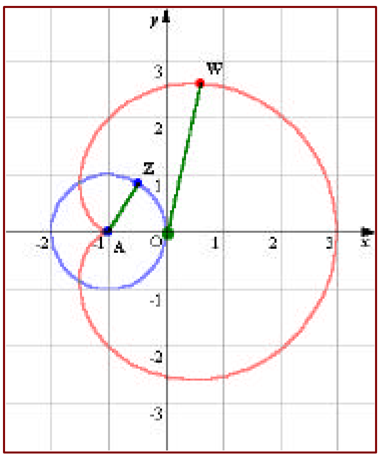
ex) $|z|=1$ であるとき、次の複素数ｗの軌跡を求めよ。

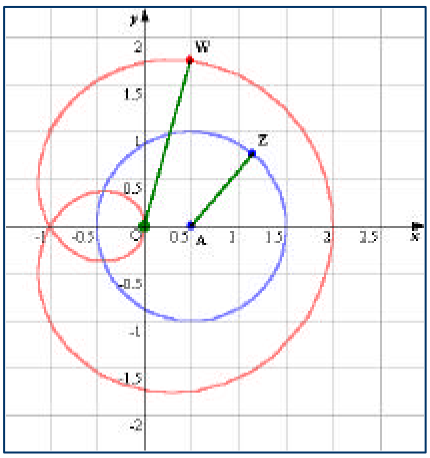
(1) $w=z^2-2z$　(2) $w=z^2+z$

解) (1) $w=(z-1)^2-1$

ｚは中心-1 半径１の円であるから、ｗは原点を通るカージオイドを実軸方向に－１平行移動したものである。

(2) $w=\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ より、中心$\frac{1}{2}$半径1の円$z+\frac{1}{2}$の像であるエピサイクロイドを実軸方向に$-\frac{1}{4}$平行移動したものである(原点を通るエピサイクロイド)。





2. $w=\sqrt{z}$ の像

複素数における根号の定義は実数の場合と同様に考えることができるが、根号は２つの値を意味する。

$\sqrt{z} = \pm(a+bi)$ である。例えば、

$$\sqrt{i} = \left(e^{\left(\frac{p}{2}+2np\right)i} \right)^{\frac{1}{2}} = e^{\left(\frac{p}{4}+np\right)i} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

である。したがって $w^2 = z$ のグラフを考えればよいことになる。

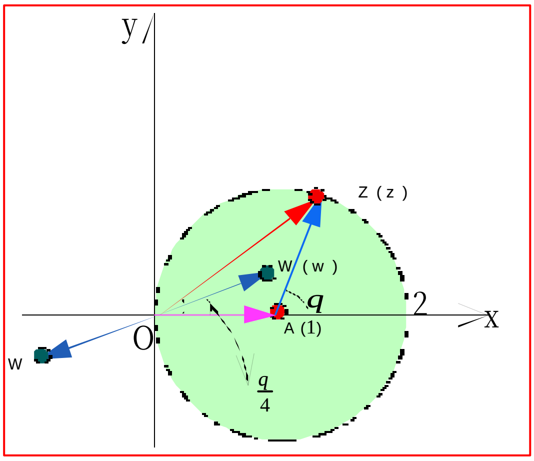
$w^4 = z^2$ であるから、$\left|w^4\right| = r_1^2 + 1 + 2r_1\cos(q - q_1)$ である。

ここで、A(1)とすると、$\left|w^4\right| = 2(1+\cos q) = 4\cos^2\frac{q}{2}$

よって、$\left|w^2\right| = 2\cos\frac{q}{2}$ となる。また、$\mathrm{agrw} = \pm\frac{p}{4}$ である。

したがって、 $w = \pm\sqrt{2\cos\frac{q}{2}}\,e^{\pm\frac{p}{4}}$

である。



この曲線を連珠形(lemniscate)という。レムニスケートは２点 -1,1 からの距離の積が等しい点の軌跡を表すが、これは、負の実数の範囲で描かれる曲線と、正の実数の範囲で描かれる曲線を連結した形になっている。ここで、A の値を実軸上で変化させると下図のような曲線が描かれる。

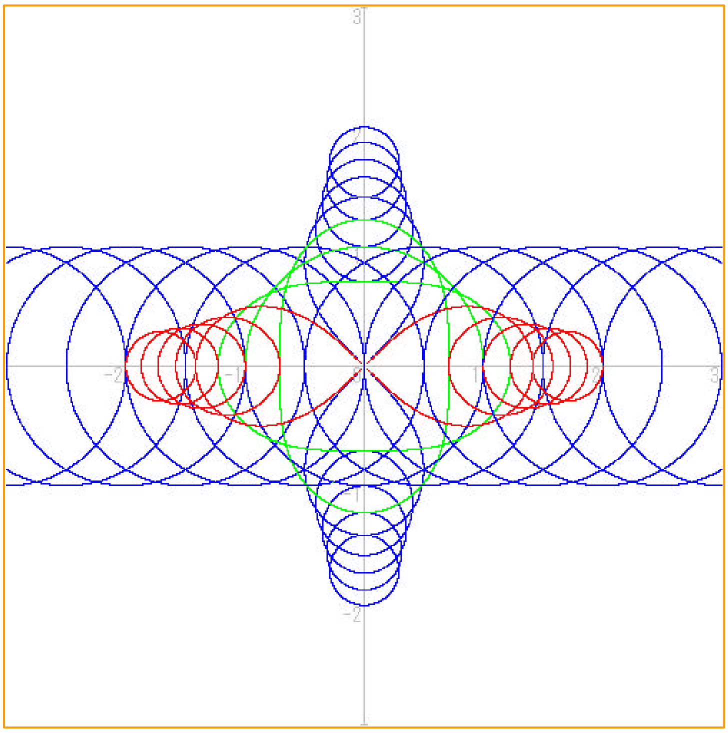
この図から、円 z の中心 A(α)は、連結している２つの閉曲線のくっつきの度合いを示していることが予想できる。以下、性質をまとめると、

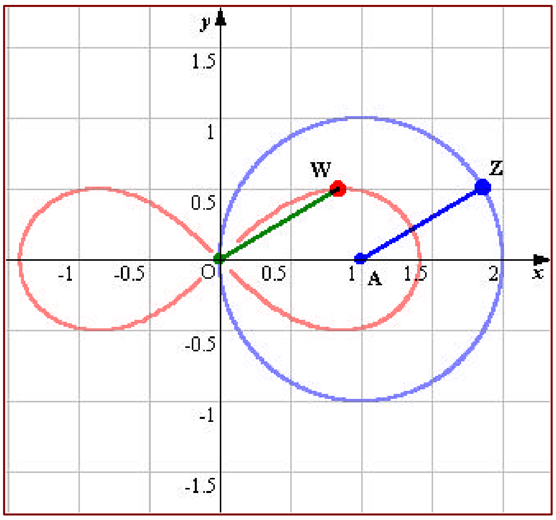
①グラフは原点に対して対称である。

②|z|<1 のときは、２つの閉曲線は他方の閉曲線に割りこみ、楕円のような形をつくる。

|z|=1 のときは、２閉曲線は接し、レムニスケートとなる。

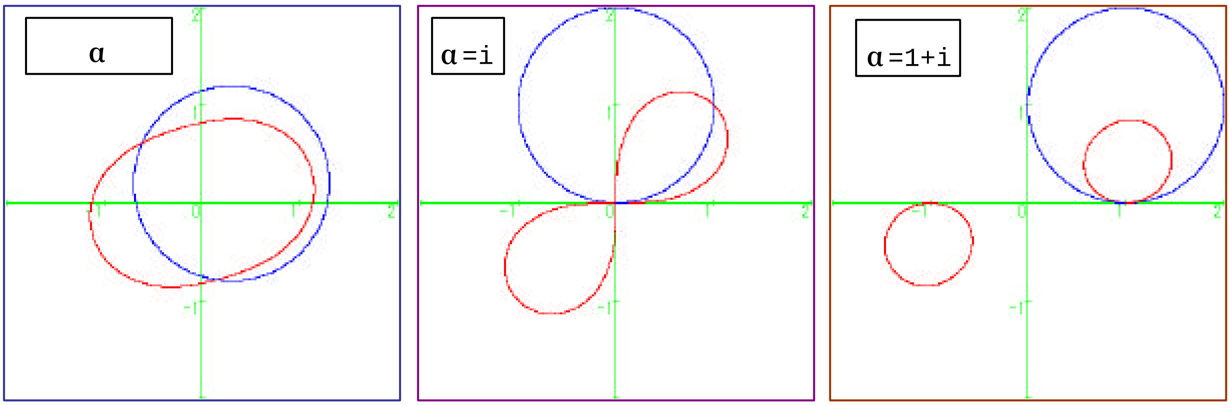
|z|>1 のときは、２閉曲線は離れていく。





《描画例》……十進ＢＡＳＩＣによる描画

下図は、半径１の円の中心A(α)を変えたときの $w=\sqrt{z}$ のグラフである。シャボン玉を引き離したらプチッと切れて２つのシャボン玉になったような印象を与える。



３． $w=\dfrac{1}{z^2}$ の像

$f: z^2 \to \dfrac{1}{z^2}$ であるから、この変換は、z^2 に関するメービウス変換である。

$|w|=\dfrac{1}{r_1^2+1+2r_1\cos q}$ となるがこれから曲線の外形を予想することは難しい。ただ、$r_1=1$ すなわち、中心１半径１の円の場合は、

$|w|=\dfrac{1}{2(1+\cos q)}$ であり、argw=-θであるから、

$$w=\frac{e^{-qi}}{2(1+\cos q)}$$

となる。ここで、w=x+yi とすると

$$x=\frac{\cos q}{2(1+\cos q)},\quad y=\frac{-\sin q}{2(1+\cos q)}$$

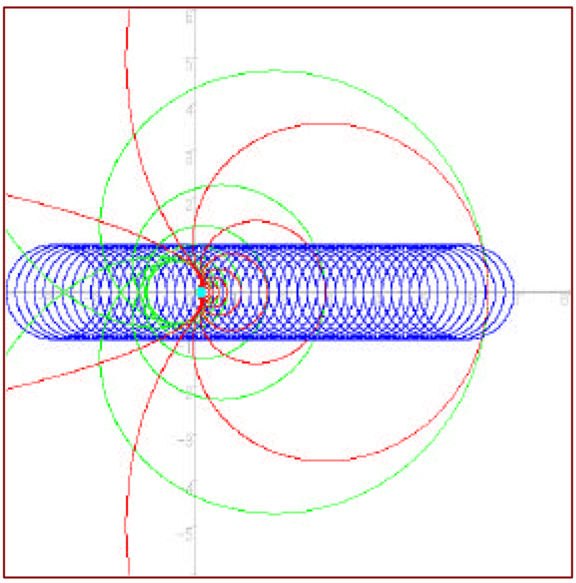
となり、これは、放物線を表すことが分かる。一般に極方程式では、

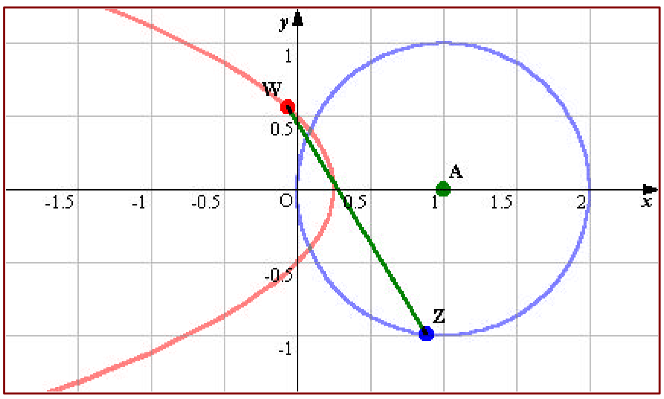
$$r=\frac{\ell}{a+b\cos q}$$

は２次曲線を表すが、メービウス変換は、原点に近いものをより遠ざけ、遠いものは近づけるから、|w|から得られる極方程式の影響はほとんど考えられない。実際、描画をしてみると下図のようになる。ＢＡＳＩＣの実行から予測すると、半径１、中心A(α)の円に対して、αを実軸上にとり、-∞<α<∞ で変化させると、

カージオイド ⇒ エピサイクロイド ⇒ 放物線 ⇒ カージオイド ⇒ 原点

と変化していく。



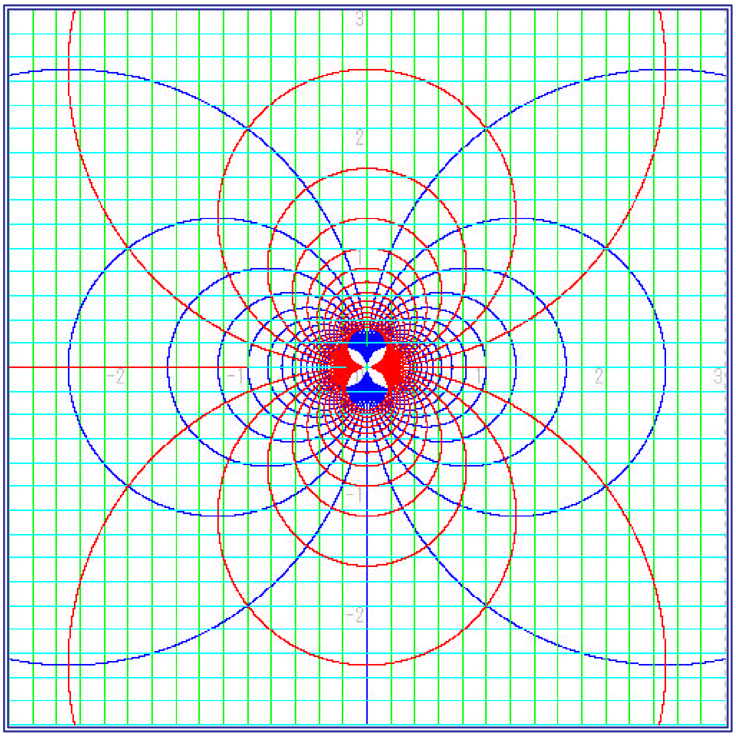


Ⅱ．座標全体の変換

べき乗変換により座標平面全体はどう変換されるか考えてみよう。

$f : z \to w$ なる変換において、Ｚとｗを同じ複素数平面とし、実軸および虚軸に平行な直線(座標の格子)を変換してみる。

1．$f(z)=\dfrac{1}{z}$ の像



メービウス変換の性質として、原点を通らない直線は原点を通る直線に変換されることは既知のことである。反転の考え方から原点に近い点は原点から遠ざかり、原点から離れた点は原点に近づく。直線の場合は、-∞と∞の点はともに原点に収束し、ジョイントされ円になるわけである。直線を半径が無限大の円と広義にみて、これを円々対応という。

よって、実軸に平行な原点を通らない直線(すなわち実軸以外)は、原点を通る円に変換される。直線がもっとも原点に近づく点、すなわち原点から直線におろした垂線の足(虚軸上の点である)を共役反転の性質から実軸に対称移動した点が、直径の他端である。円は、実軸に平行な直線と原点の距離が遠ざかればその半径は小さくなっていく。

また、虚軸に平行な直線も同様なことがいえる(直線は実軸対称であるから共役変換は起こらない)。

このことを十進ＢＡＳＩＣで描画し検証したのが、右図である。

実軸に平行な直線が右から左へと点をプロットすると、円は時計回りに描かれ、虚軸に平行な直線が下から上へと点をプロットすると、半時計回りに円が描かれることが分かる。

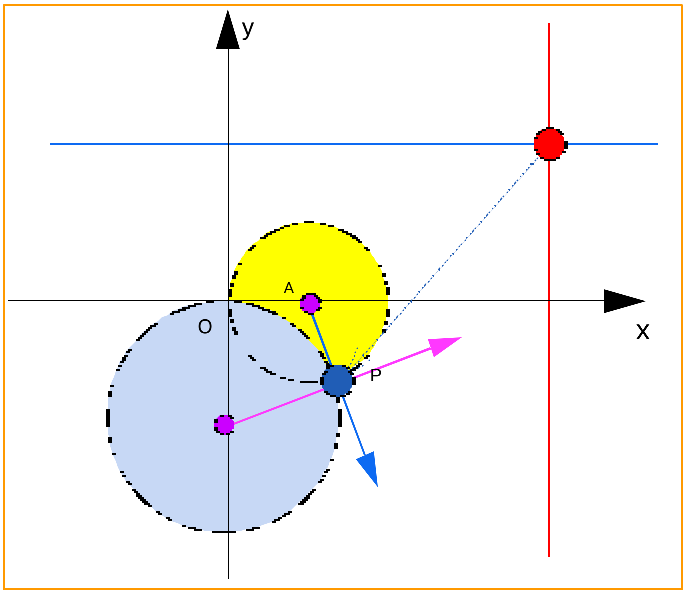
ところで、メービウス変換は、等角写像の代表例としても知られている。等角とは、二曲線の交角の大きさが変換後も不変であるということであるが、このことは、早苗氏のレポートにも触れられている。
ではメーピウス変換についてその等角写像性を調べてみよう。

複素数平面の格子を表す直線 x=s と直線 y=t の f による像は反転の考え方から、

$$x=s \Rightarrow \text{中心}\ A\left(\frac{1}{2s}\right)\ \text{半径}\left|\frac{1}{2s}\right|\ \text{の円}$$

$$y=t \Rightarrow \text{中心}\ B\left(-\frac{1}{2t}i\right)\ \text{半径}\left|\frac{1}{2t}\right|\ \text{の円}$$

である。二直線はもちろん直交し、交点 s+ti の像 P(w) は、$w=\dfrac{1}{s+ti}=\dfrac{s}{s^2+t^2}-\dfrac{t}{s^2+t^2}i$ である。



よって、上で求めた２円が直交すればよい。さてここで２曲線が直交することとは、その交点における各曲線の接線が直交するということである。特に円については接線の法線は円の中心を通るから、中心と接点を結ぶ２つの直線が直交すればよいことになる。

すなわち、２円の中心と交点を結ぶベクトル$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$ に対して、$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$ が言えればよい。

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})$$

$$=\left|\overrightarrow{OP}\right|^2-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ また、

$$(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}=\left(\frac{1}{2s},-\frac{1}{2t}\right)\cdot\left(\frac{s}{s^2+t^2},-\frac{t}{s^2+t^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s(s^2+t^2)}+\frac{t}{t(s^2+t^2)}\right)$$
$$=\frac{1}{s^2+t^2}$$
$$=\left|\overrightarrow{OP}\right|^2$$

以上より、$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ となり、等角写像性が示されたことになる。

2．$f(z)=z^2$ の像

メービウス変換はその特徴的な性質から格子の変換が容易に予測できたが、次に $w=z^2$ の変換はその性質も含めて変換を調べていこう。

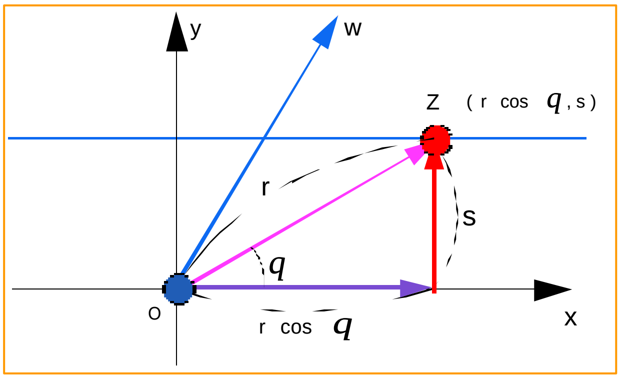
まず、実軸そのものの変換は、実軸を z=t $(t\in R)$ と表すと、$w=t^2\geqq 0$ となるから実軸の正の部分に変換される。zが-∞から∞に向って変化すると、その像は+∞から原点に向って動き、原点をおり返してまた無限の彼方に消えていくわけである。

同様に、虚軸は、z=it $(t\in R)$ と表されるから、$w=-t^2\leqq 0$ である。虚軸上-∞i から∞i に向って値が変化すると、実軸上-∞から増加し、原点で折り返して負の無限大に消えていく。

次に、実軸に平行な直線 y=s を変換する。このとき直線上の点は、

$$P(r\cos\theta,s)$$

と表すことができる。



また、

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=\cos^2\theta-\frac{s^2}{r^2}$$
$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
$$=\frac{2s}{r}\cos\theta$$

であるから、

$$w=z^2$$
$$=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$
$$=(r^2\cos^2\theta-s^2)+i\,2sr\cos\theta$$

これから像を表す極形式が得られた。

ではこの像はどんな図形になるだろうか。

そこで、w=x+yi とすると、

$$x=r^2\cos^2-s^2$$
$$y=2sr\cos\theta$$

2式より $r\cos\theta$ を消去して、

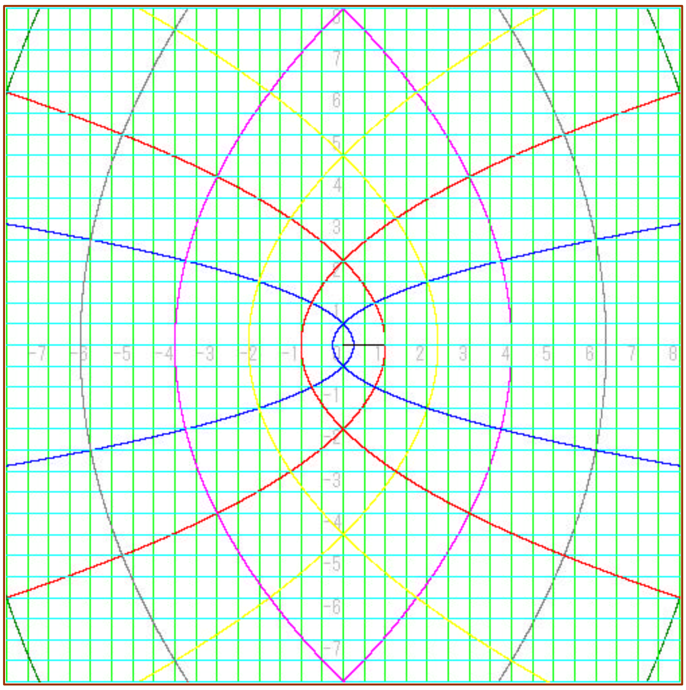
$$x=\frac{y^2}{4s^2}-s^2$$ 整理して $p=s^2$ とおけば、

$$y^2=4p(x+p)\qquad(p>0)\qquad\cdots\cdots\cdots(*)$$

これは、原点を焦点とする、準線 x=-2p の放物線である。

s の値を-∞から∞に向って変化させると、$p=s^2$ であるから、準線 x=-2p は-∞から原点を折り返してまて戻っていく。したがって放物線の実軸正方向に延びたグラフの開きは、だんだん小さくなりそしてまた開いていくことが分かるだろう。

また、虚軸に平行な直線であるが、これは実軸に平行な直線を 90 度回転させたものと考えていいから、$z=iz_1$(z_1 は実軸平行の直線)とおくと、$w=z^2=-z_1^2$ となる。したがって、直線 x=s の像は、直線 y=s の像を原点対象したものである。



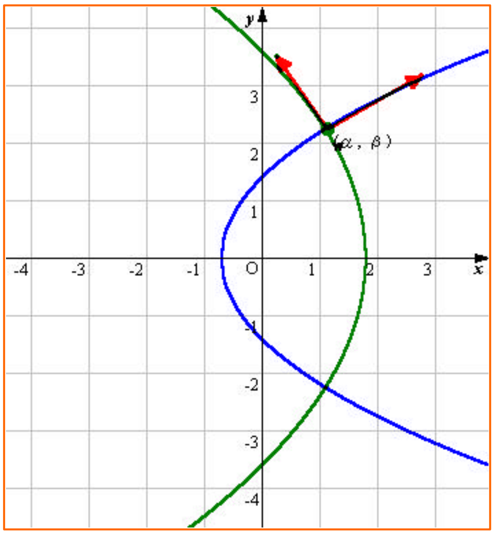
よって、その方程式は、

$$y^2 = -4p(x-p) \qquad (p>0)$$

となり、これもまた焦点が原点の放物線であり、実軸負の方向に延びた開きは点が z の格子上の点が下方から上方に変化するとき、だんだん小さくなり原点で折り返してまた増加していく。

以上より f による z の格子の像は、原点を焦点とし、実軸を軸とする放物線の集合(共焦点放物線族) である。

十進ＢＡＳＩＣで描画した図で確認いただきたい。



では次に $w = z^2$ の等角写像性について調べてみよう。

格子点の１つ(s,t)の f による像を $P(x_0, y_0)$ とすると、この点を通る１組の放物線が決まってくる。それは、

$$j(p) = 4p^2 + 4x_0 p - y_0^2$$

とおいたとき、二次方程式 $j(p) = 0$ の２解 p=α, βに対応する放物線である。このとき、解と係数の関係より、

$$ab = -\frac{y_0^2}{4}$$

である。２つの放物線の接線の傾きの積を求めると、

$$\frac{2a}{y_0} \times \frac{2b}{y_0} = \frac{4ab}{y_0^2} = -1$$

よって、２つの放物線は直交する。

したがって写像 $f(z) = z^2$ についても等角写像性がいえたことになる。

3． $f(z) = \sqrt{z}$ の像

まず、実軸上の点 z=t $(t \in R)$ であるが、t>0 のときは、実軸の正の部分に移され、t<0 のときは、$\sqrt{z} = \sqrt{t} = \sqrt{|t|}i$ より、虚軸の原点より上の部分に移される。

また、虚軸上の点 z=ti $(t \in R)$ については、$\sqrt{i} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ であるから、t>0 のとき、$\sqrt{ti} = \sqrt{t}\sqrt{i}$ より直線 y=x 上の点に変換される。また、$\sqrt{-i} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ より、t<0 のとき、$\sqrt{ti} = \sqrt{|t|}\sqrt{-i}$ より直線 y=-x 上の点に変換される。

次に、$z = re^{iq}$ とおくと、

$$f(z) = \left(re^{(2np+q)i}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\,e^{\left(np+\frac{q}{2}\right)i} = \pm\sqrt{r}\,e^{\frac{q}{2}i}$$

と表される。そこで

w=x+yi　とおくと、

$$x = \pm\sqrt{r}\cos\frac{q}{2}$$

$$y = \pm\sqrt{r}\sin\frac{q}{2}$$

二式を辺々かけて、

$$xy = r\cos\frac{q}{2}\sin\frac{q}{2} = \frac{r}{2}\sin q$$

ここで、実軸に平行な直線上の点を $(r\cos q, s)$ とおくと、$\sin q = \frac{s}{r}$ であるから、$xy = \frac{s}{2}$ を得る。

すなわち、その像は、x 軸、y 軸を漸近線とする直交双曲線である。

s>0 のとき、xy>0 より、第１象限、第３象限に広がる双曲線。s<0 のときは、xy<0 より、第２象限、第４象限に広がる双曲線であり、双曲線族の頂点と原点との距離は|s|となる。

次に虚軸に平行な直線については実軸に平行な直線 z_1 を -i だけ回転させると、

$$w = \sqrt{z} = \sqrt{-iz_1} = \left(re^{\left(q-\frac{p}{2}+2np\right)i}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\,e^{\left(\frac{q}{2}-\frac{p}{4}+np\right)i} = e^{-\frac{p}{4}i}\cdot\sqrt{r}\,e^{\left(\frac{q}{2}+np\right)i}$$

よって、双曲線 $xy = \frac{s}{2}$ を原点の回りに-45°回転させた曲線であることがわかる。

すなわち、その像は、直線 $y = \pm x$ を漸近線とする双曲線である。

s>0 のときは、実軸を軸とする左右に広がる双曲線

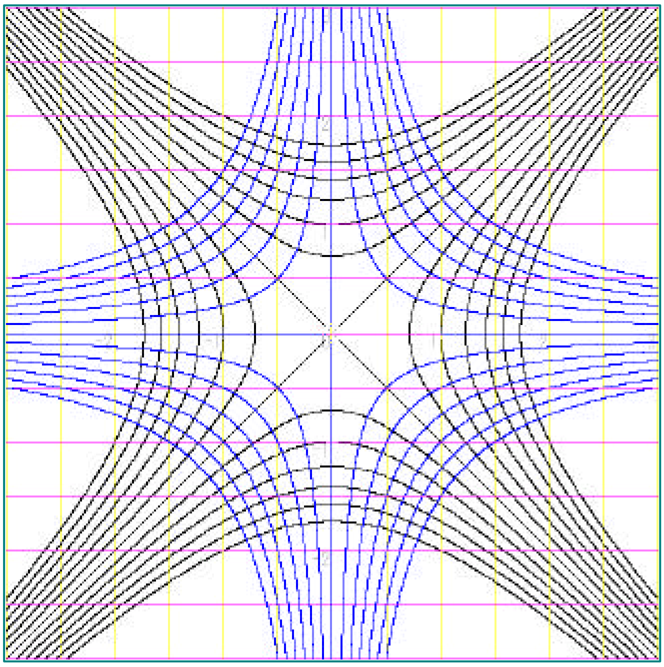
$$x^2-y^2=s^2$$

であり、s<0 のときは、虚軸を軸とする上下に広がる双曲線

$$y^2-x^2=s^2$$

である。

十進ＢＡＳＩＣで描画すると、シンメトリーな曲線が浮かび上がってくる。



最後に、$y=\sqrt{z}$ の等角写像性について調べよう。

Ｚ平面上の格子点の像である点を変換すると、

双曲線 $xy=\pm\frac{s}{2}$ と $x^2-y^2=\pm s^2$

の交点 (x_0, y_0) に移される。それぞれの曲線を微分して交点における接線の傾きを求めよう。

$y+xy'=0$ より $\frac{dy}{dx}=-\frac{y_0}{x_0}$

$2x-2yy'=0$ より $\frac{dy}{dx}=\frac{x_0}{y_0}$

よって二式を辺々掛けると、

$$-\frac{y_0}{x_0}\cdot\frac{x_0}{y_0}=-1$$

以上より接線どうしが直交する。よって、等角写像性が示された。

III. おわりに

本稿の後半は、座標の基底となる格子の変換についてまとめているが、実はこの手法は結果だけを追求するのであれば、ずいぶん回り道をしている。例えば、$w=z^2$ の変換については、もっと簡単に示せば、

$z=x+yi$, $w=u+vi$ とおいて、二式の関係を求めるだけのことで簡単にできる。実際、

$$u+vi=w=z^2=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi$$

であるから、実部と虚部を比較して、

$$u=x^2-y^2$$
$$v=2xy$$

をえる。ここで、実軸に平行な直線の場合は、y=c とみなして、上記の式に代入し、x を消去すると、

$$u^2=4c^2(u+c^2)$$

これから共有点放物線族が得られる。

それを本稿のように、極形式で変換を試みたのは、「メービウスのしっぽ」が「メービウスのわだち」を引き継ぐという観点から作成されたことによる。メーピウス変換を Complex operator として話しを進めた以上その路線を変更したくはなかったのである。複素数は、大きさと偏角で決まるものであり、この大きさはある意味では極方程式とみることもできる。それが偏角によって微妙な影響を受け、像が生成していく過程を重要視したかったのである。

そのためには、関数描画ソフト「Grapes」や、言語処理システム「十進ＢＡＳＩＣ」は最高のパートナーとしての役割を担った。とりわけ今回は十進ＢＡＳＩＣに助けられることが多かった。それはこの Full Basic は複素数演算が可能だからである。

```
OPTION ARITHMETIC COMPLEX
```

とプログラムの序文に宣誓すると、種種の複素数計算が簡単に実行できるようになる。

```
Let i=sqr(-1)
```

とすれば、虚数単位が定義され、複素数の四則演算が実行される。したがい、図形の変換も従来のBasicのようにいちいちparameter表示に直してから変換する必要もない。z=complex(x,y)でもととなる複素数を考えて、w=f(z)を定義するだけで変換後の図形がえがかれるのである。複素数が高校現場から消滅するまでの貴重なときのなかで、このソフトがどんなに重宝するか分からない。

なお、最後に本稿で扱ったベキ変換はすべて等角写像であった。このことの証明についても、なるべく図形の性質を考えながらひとつひとつ解説していったが複素関数論には次の定理がある。

複素数平面Ｚ上の二曲線 L_1, L_2 の交点 z_0 における交角の大きさは、$f'(z_0)\neq 0$ であれば保存される。

したがって、$f(z)=z^2$ の場合、$f'(z_0)=2z_0$ であるから、f は原点以外では等角写像であることがわかるのである。

H11.12.03