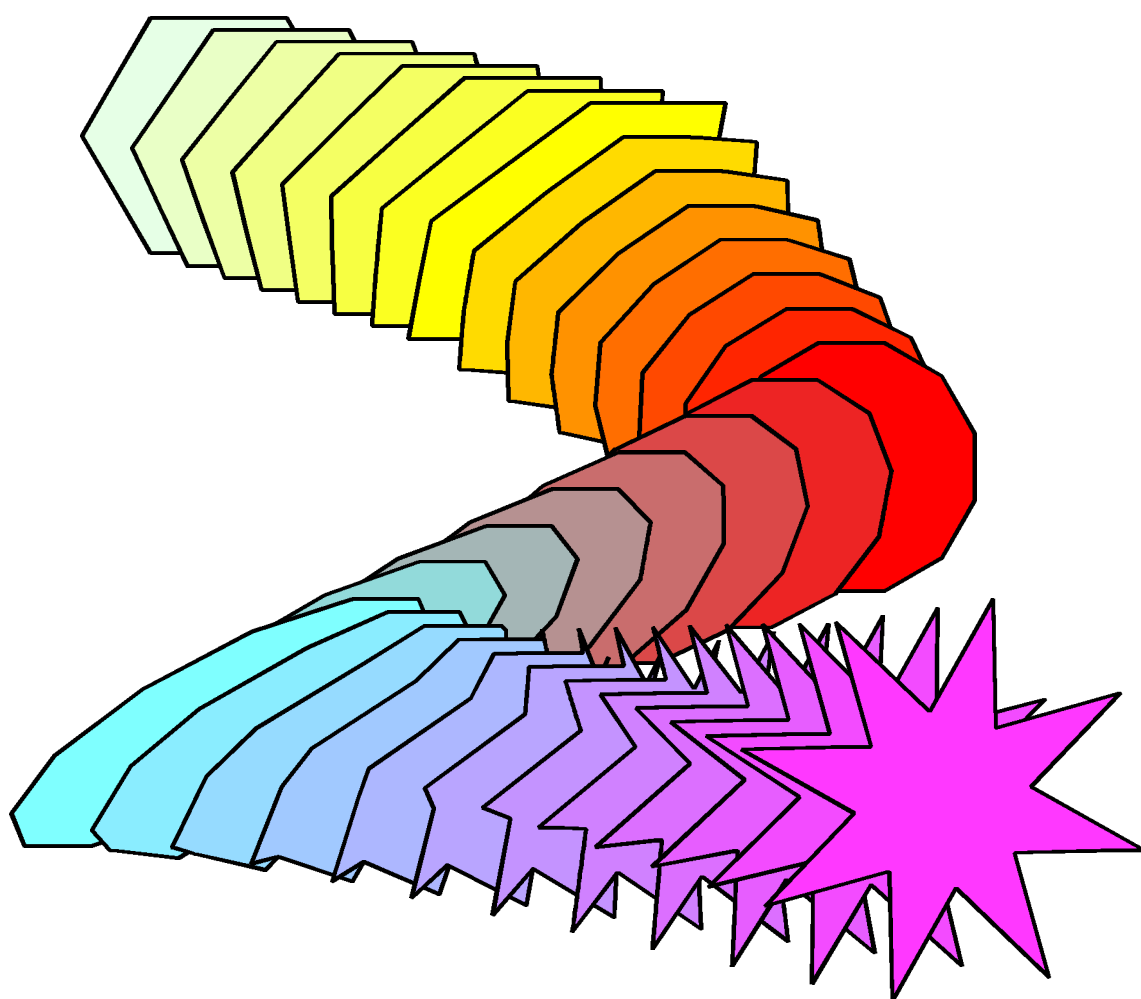


変身多角形の  
スリムメタモルフオーゼ



札幌新川高校  
中村文則

# 一次変換から見た正多角形の変身

数実研の研究大会において、大山先生が発表された、「正多角形の変身」～おもしろいデフォルメ～は、非常に興味ある題材であった。センターテスト必須のベクトル問題の巧い解法として、先生は述べられたが、それは付加価値的なものではない。平面図形が、基底の変換により新世界の新図(先生はそう命名した)にどう移されるかは、高校数学からは消えようとしているビジュアルな想像力を喚起するものといえよう。ベクトルの線形性と一次独立性から新図の描画を先生は試みたが、ここでは、一次変換を表す行列の各成分がもつ、変換としての働きに注目して調べてみよう。

## 1. 行列の分解

正則である任意の行列  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  は、

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{ab+cd}{a^2+c^2} \\ 0 & \frac{ad-bc}{a^2+c^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = XYZ$$

ただし、  $a = \sqrt{a^2+c^2}$ ,  $b = \frac{ad-bc}{\sqrt{a^2+c^2}}$ ,  $g = \frac{ab+cd}{a^2+c^2}$ ,  $\cos q = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$ ,  $\sin q = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$

と分解することができる。この分解は一意的に決定するものではないが、右辺のそれぞれの表現行列 X, Y, Z はみな一次変換として特徴的な性質をもっている。

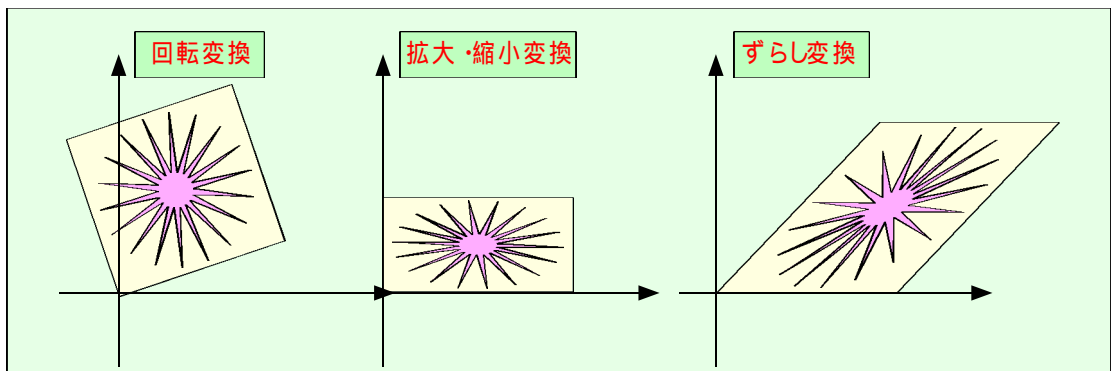
$$Y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

$$Z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+gy \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

となることから、

X: 原点の回りに図形を 回転する  
 Y: 図形を x 軸方向に 倍、y 軸方向に 倍、拡大(縮小)する  
 Z: x 軸方向に原点を変えないで図形をスライドする

特に、多角形の変身(基底の変換)に深く関わるのは表現行列 Z のせん断(スケーリング)と言われるずらし変換である。これを利用して新世界への入口を探ってみよう。



## 2. 変身を表す一次変換

新図へ変身させるには、正多角形の 1 頂点を挟む 2 辺のなす角を直角に変換すればよい。  
 正  $n$  角形  $P_1P_2P_3 \dots P_{n-2}P_{n-1}P_n$  を  $P(n)$  と表現する(ただし、 $P_0 = P_n$  とする)。

$P(n)$  の外接円の中心  $C$  に対して、 $q = \angle P_k C P_{k+1}$  を  $P(n)$  の中心角とよぶことにする。 $q = \frac{2p}{n}$  で与えられるが、 $n=3,4$  の

場合の新図は明らかなので、 $n \geq 5$  でとすると  $0 < q \leq \frac{2p}{5}$  となり

は鋭角と考えてよい。

次に、 $P_0(0,0), P_1(1,0)$  に固定し、基底となる正多角形の二辺を  $P_0P_{n-1}, P_0P_1$  とする。すなわち、一辺の長さ 1 の正多角形を考えることになる。ここで、

$$f: \overrightarrow{P_0P_1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f: \overrightarrow{P_0P_{n-1}} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なる変換  $f$  を表す行列  $T$  を求めてみよう。

$\angle P_{n-1}P_0P_1 = p - q$  より、

$$\overrightarrow{P_0P_{n-1}} = \begin{pmatrix} \cos(p - q) \\ \sin(p - q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos q \\ \sin q \end{pmatrix}$$

である。よって、

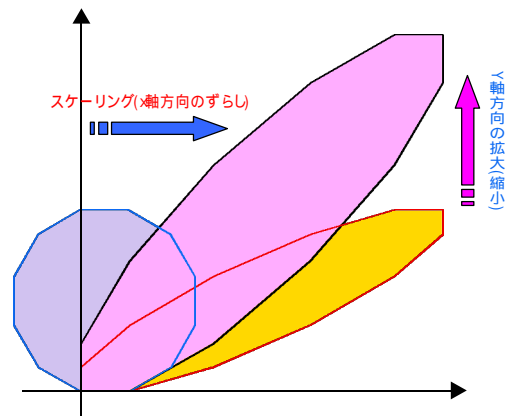
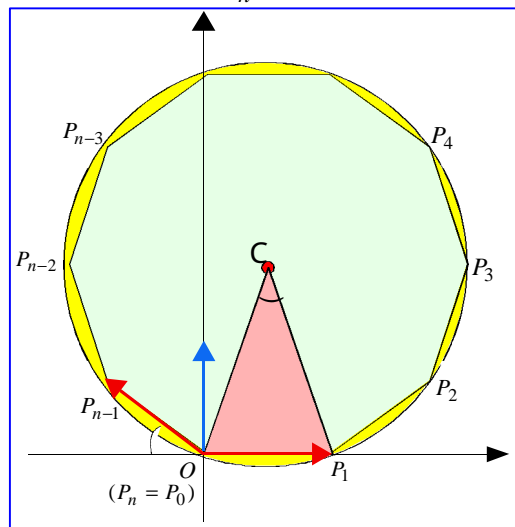
$$T \begin{pmatrix} 1 & -\cos q \\ 0 & \sin q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{より、} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \cot q \\ 0 & \cos ec q \end{pmatrix}$$

この一次変換  $f: T$  により、新世界への道が開かれる。ところで、

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos ec q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cot q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから、一次変換  $f$  は、 $x$  軸方向へずらし変換をした後、 $y$  軸方向へ  $\cos ec q$  倍する変換であることがわかる。

では、新世界  $f$  の gate であるこの行列を通過すると図形はどのように変換されるから調べてみよう。



### 3. $P(n)$ とその像の性質

#### Nature 1

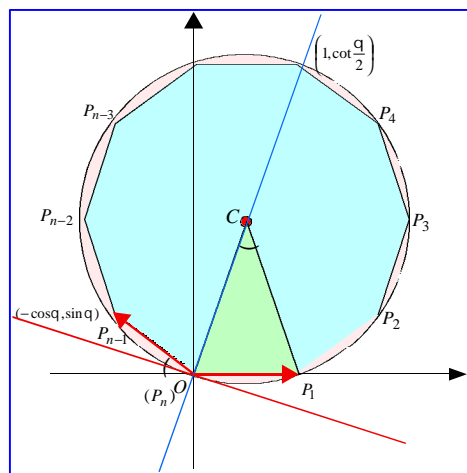
$P(n)$  の外接円の中心を  $C$  とするとき、一次変換  $f$  により

直線  $OC$  は、直線  $y=x$  に移される。

直線  $OC$  の法線は、直線  $y=x$  の法線に移される。

$OP_{n-1} = OP_1 = 1$ ,  $\angle P_{n-1}OC = \angle COP_1$  より は明らかである。同様に原点を通る法線は、 $\angle P_{n-1}OX_{\infty}$  の二等分線であることよりも明らかであるが、具体的に計算してみよう。

外接円の中心の座標  $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cot \frac{q}{2}\right)$  を  $f$  で移す。



$$\begin{pmatrix} 1 & \cot q \\ 0 & \cos ec q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cot \frac{q}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot q \cot \frac{q}{2} \\ \frac{1}{2} \cos ec q \cot \frac{q}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin q \sin \frac{q}{2} + \cos q \cos \frac{q}{2}}{2 \sin q \sin \frac{q}{2}} \\ \frac{\cos \frac{q}{2}}{2 \sin q \sin \frac{q}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \frac{q}{2}}{2 \sin q \sin \frac{q}{2}} \\ \frac{\cos \frac{q}{2}}{2 \sin q \sin \frac{q}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cos ec q \cot \frac{q}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

また、法線の方向ベクトルは、 $\begin{pmatrix} -\cos \frac{q}{2} \\ \sin \frac{q}{2} \end{pmatrix}$  であることより、

$$\begin{pmatrix} 1 & \cot q \\ 0 & \cos ecq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \frac{q}{2} \\ \sin \frac{q}{2} \end{pmatrix} = \cos ecq \sin \frac{q}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

以上、Nature1 の , より次の結果を得る。

Nature2

$P(n)$  の外接円に外接する原点を通る正方形は、 $f$  により長方形に移される。

右図の正方形の変換である。では、この正方形を  $f$  で移してできる長方形の二辺の長さを求めてみよう。

まず、元図の正方形の各頂点  $D, E, F, G$  を図のようにとり、その座標を求める。

頂点  $D$  は、円の中心  $C$  を原点の回りに  $90^\circ$  回転した点であるから、

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cot \frac{q}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cot \frac{q}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D \left( -\frac{1}{2} \cot \frac{q}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

また、頂点  $A$  を原点に関して対称移動すると、

$$F \left( \frac{1}{2} \cot \frac{q}{2}, -\frac{1}{2} \right) \text{ である。}$$

次に、線分  $DC, EC$  をそれぞれ  $2:1$  の比に外分した点が頂点  $F, G$  であるから、

$$F \left( 1 + \frac{1}{2} \cot \frac{q}{2}, -\frac{1}{2} + \cot \frac{q}{2} \right), \quad G \left( 1 - \frac{1}{2} \cot \frac{q}{2}, \frac{1}{2} + \cot \frac{q}{2} \right)$$

となる。

結果、右図のような unique な図ができあがる。

さて、ではこの正方形  $ABCD$  を  $f$  により変換した長方形の二辺  $a, b (a > b)$  の長さを求めてみよう。

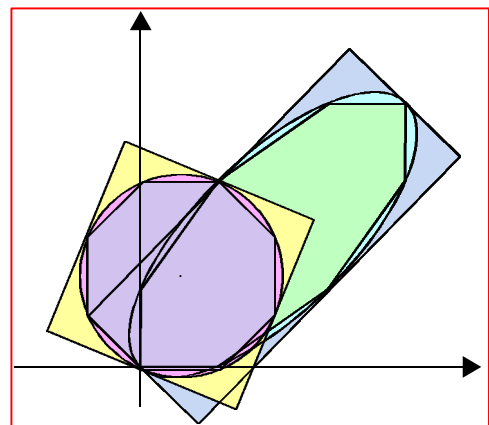
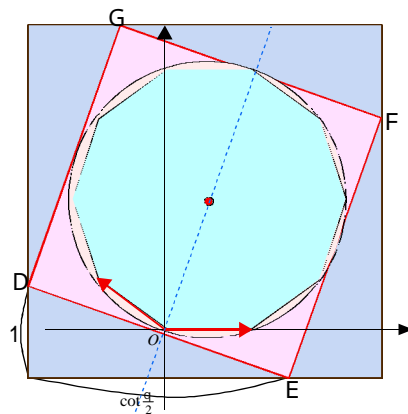
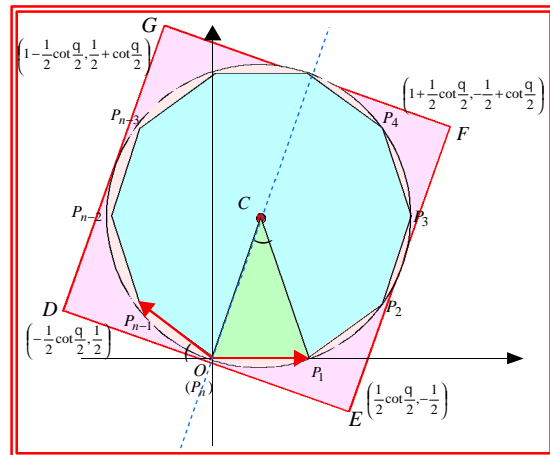
まず、外接円の直径が長方形の 1 辺の長さ  $a$  に対応することから、

$$\begin{pmatrix} 1 & \cot q \\ 0 & \cos ecq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cot \frac{q}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cot q \cot \frac{q}{2} \\ \cos ecq \cot \frac{q}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos ecq \cot \frac{q}{2} \\ \cos ecq \cot \frac{q}{2} \end{pmatrix}$$

よって、 $a = \sqrt{2} \cos ecq \cot \frac{q}{2}$  である。

また、点  $A$  を  $f$  で移して、

$$\begin{pmatrix} 1 & \cot q \\ 0 & \cos ecq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cot \frac{q}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cot \frac{q}{2} + \frac{1}{2} \cot q \\ \frac{1}{2} \cos ecq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos ecq \\ \frac{1}{2} \cos ecq \end{pmatrix}$$



$$b = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cos ecq = \sqrt{2} \cos ecq \quad \text{である。}$$

以上より

$$a : b = \cot \frac{q}{2} : 1 = \cos \frac{q}{2} : \sin \frac{q}{2}$$

となる。

Nature3

$P(n)$  の外接円は、直線  $y = x$  上に長軸がある原点を通る楕円に移される。

$P(n)$  の外接円は、Nature2 の正方形の内接円であるから、 $f$  による変換によって、長方形に内接する楕円に移されることは明らかである。なお、長軸と短軸の長さの比は  $\tan \frac{q}{2}$  である。

その楕円の概形であるが、右図の楕円を  $x$  軸方向に、 $\frac{1}{\sqrt{2}(1-\cos q)}$  平行移動し、原点の回りに  $45^\circ$  回転したものであり、方程式は

$$x^2 - 2xy \cos q + y^2 - x - y = 0$$

となる(証明略)。

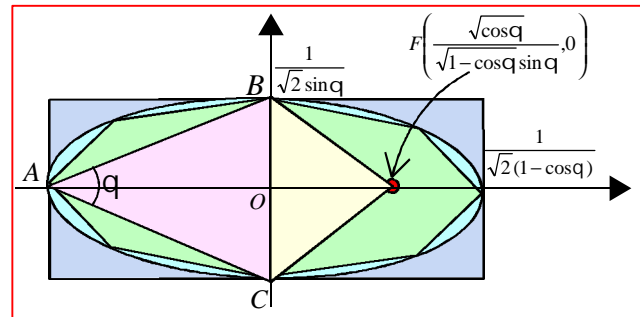
ところで右図において、

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\text{短軸の長さ}}{\text{長軸の長さ}} = \frac{b}{a} = \tan \frac{q}{2}$$

より、 $\angle BAC = q$  である。

すなわち、元円の直径を弦とする円周角( $90^\circ$ )は  $f$  によって  $q$  に変換される。

以上、Nature1 ~ Nature3 より、次の結論を得る。



Nature4

$P(n)$  は  $f$  により、頂点  $f(P_k)$  と頂点  $f(P_{n-k})$  が直線  $y=x$  に関して対称な  $n$  角形に移される。

$P(n)$  において、直線  $P_k P_{n-k}$  は  $OC$  の法線であるから Nature1 より新図においては  $y=x$  の法線となる。かつ、 $y=x$  は楕円の長軸でありことより Nature4 が示される。

#### 4. 変身 $n$ 角形の作図

では、実際問題として、 $P(n)$  の変身後の姿はどう作図すればいいだろうか。これが本稿の主テーマであるが、結論をいうと、

作図可能な  $P(n)$  の  $f$  による像もまた作図可能である。

ということになる。その証明のための準備を少ししよう。

Nature5

$x$  軸上の点はすべて不動点である。(  $y=0$  は不動直線である )

$x$  軸上の点を  $(k, 0)$  とすると、

$$T \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} = kT \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$$

より明らかである。なお、 $y=0$  以外の不動直線についても調べておこう。

$T\vec{p} \parallel \vec{p}$  であればよいから、 $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とおくと、

$$\begin{pmatrix} 1 & \cot q \\ 0 & \operatorname{cosec} q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より、 $(x + \cot q \cdot y)y = \operatorname{cosec} q \cdot yx$   $(x \sin q + y \cos q)y = xy$

$$\text{不動直線は、 } y = 0, y = \frac{1 - \sin q}{\cos q}x + k \quad k \in R$$

$$\text{ここで、 } \frac{1 - \sin q}{\cos q} = \frac{\sqrt{(1 - \sin q)^2}}{\sqrt{(1 - \sin q)(1 + \sin q)}} = \frac{\sqrt{1 - \sin q}}{\sqrt{1 + \sin q}} = \frac{\sqrt{1 - \cos\left(\frac{p}{2} - q\right)}}{\sqrt{1 + \cos\left(\frac{p}{2} - q\right)}} = \tan\left(\frac{p}{4} - \frac{q}{2}\right)$$

であるから、x軸の正の方向となす角が $\frac{p}{4} - \frac{q}{2}$ である直線が不動直線である。

Nature6

直線群 $\ell_k : y = -\tan q(x - j(k))$ は、 $f$ により、直線群 $\ell'_k : x = j(k)$ に変換される。

これは、一次変換 $f$ が、 $f : P_0P_{n-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることと、x軸上の点が不動点であることから分かる。

$$\ell_k \text{ のベクトル方程式は、 } \vec{p} = t \begin{pmatrix} -\cos q \\ \sin q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j(k) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ であるから、}$$

$$f(\vec{p}) = T \left( t \begin{pmatrix} -\cos q \\ \sin q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j(k) \\ 0 \end{pmatrix} \right) = tT \begin{pmatrix} -\cos q \\ \sin q \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} j(k) \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j(k) \\ 0 \end{pmatrix}$$

このNature6から、新世界におけるy座標軸が確定する。一次変換 $f$ は、x軸方向のずらしを表す変換であったが、この変換の特徴は同じ傾きのものを同じ角度だけずらすということである。表現行列 $T$ の場合は、その角度は $90^\circ - q$ である。

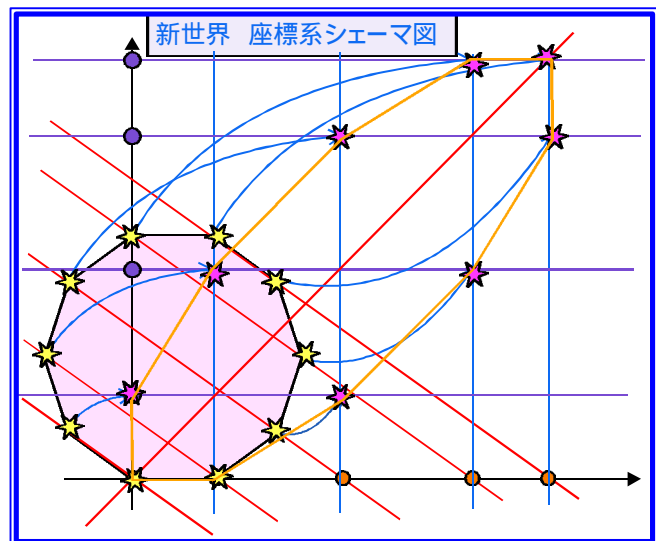
imageとしては、この変換は次のように捉えればよいだろう。

原図の $P(n)$ はもちろんx-y直交座標上の図形であり、それが $f$ による斜交座標上の新図に変換される。これを、もともとの図形をx軸と直線 $P_0P_{n-1}$ を軸とする斜交座標とみれば、相対的には $f$ により直交座標へ変換されることになる。ただ、新図においては軸の目盛間隔が、一定ではない(ある意味では一定だが)。よって、目盛幅をplotできれば、新世界における新図の作図ができることになる。

それをNature6の性質が可能にする。

では実際に作図をしてみよう。

- 適当な $P(n)$ を描く。
- 二頂点 $P_k$ と $P_{n-k-1}$ を結ぶ直線をすべての頂点について引く。  
( $n$ が奇数の場合、頂点 $P_{\frac{n-1}{2}}$ については、その頂点を通り他の直線に平行な直線を引く。)
- (b)で引いた直線とx軸との交点を通る点を新世界の目盛幅とする。
- x軸上の目盛幅をy軸上と同じ幅に取る。
- 新しく作られた格子点上に、直線 $y=x$ に関して対称になるように $P(n)$ の頂点を移す。



以上の操作で新世界における新図が完成する。

ただ、これだけでは単に描けるというだけで、実際の問題への応用はできない。

そこで次にこの新世界での目盛幅の規則性を考えてみよう。

Nature7

新座標軸の目盛を  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots$  とすると、

$$x_0 = 0, x_k - x_{k-1} = \frac{\sin kq}{\sin q} \quad (k \in N) \text{ である。}$$

まず、 $P_k$  の座標を求めよう。

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より、 } \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos q \\ \sin q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cos q \\ \sin q \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

以下、同様に

$$\overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 1 + \cos q \\ \sin q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2q \\ \sin 2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cos q + \cos 2q \\ \sin q + \sin 2q \end{pmatrix}$$

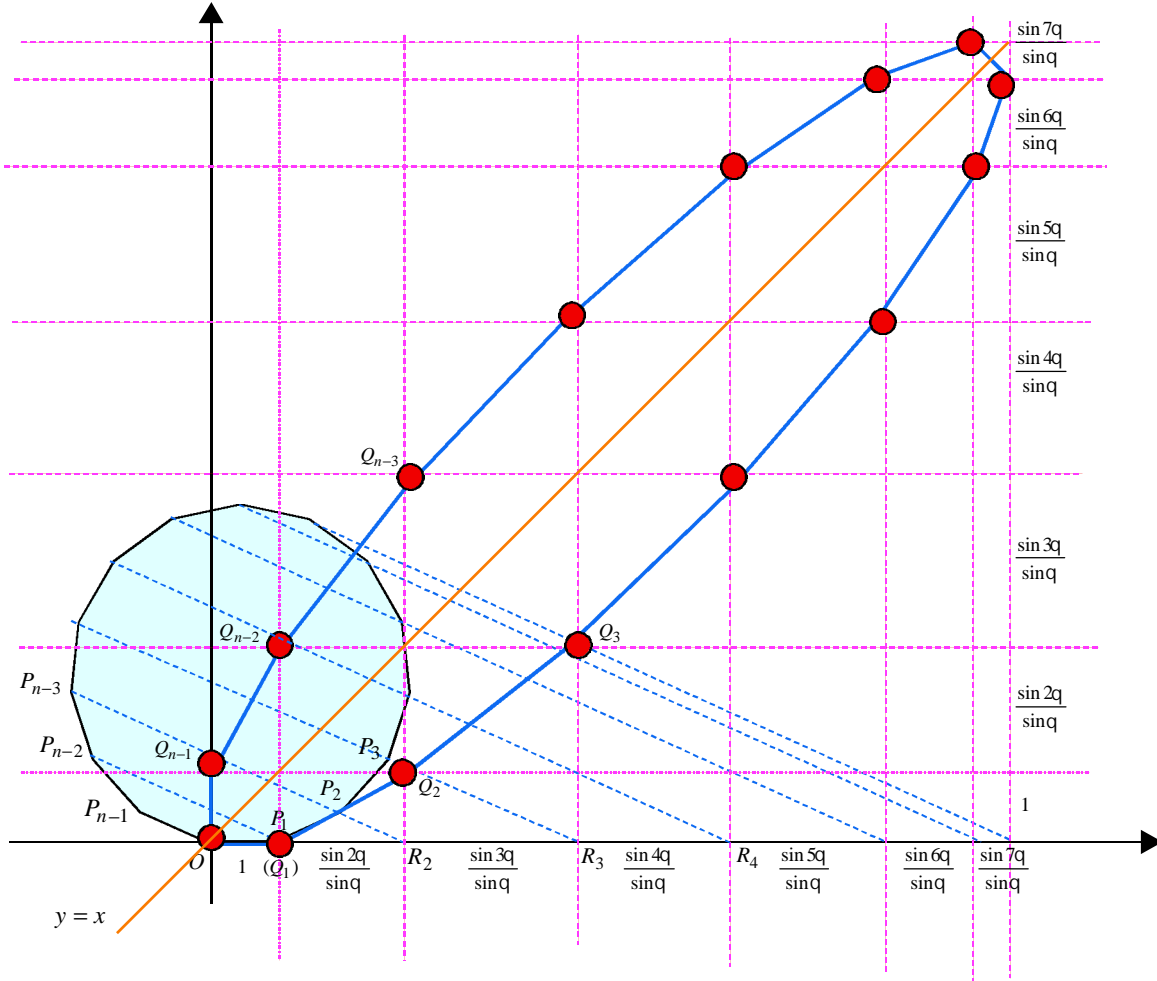
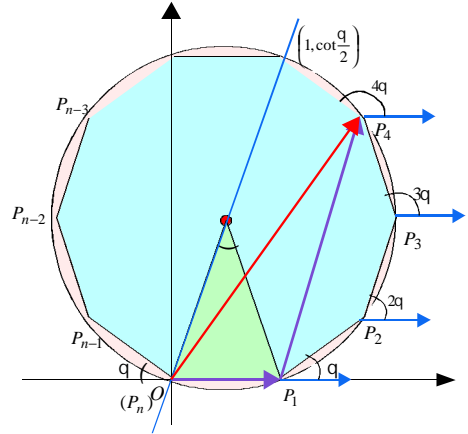
$$\overrightarrow{OP_k} = \overrightarrow{OP_{k-1}} + \overrightarrow{P_{k-1}P_k} = \begin{pmatrix} 1 + \cos q + \cos 2q + \dots + \cos(k-2)q \\ \sin q + \sin 2q + \dots + \sin(k-2)q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(k-1)q \\ \sin(k-1)q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^k \cos(m-1)q \\ \sum_{m=1}^k \sin(m-1)q \end{pmatrix}$$

これより、直線  $P_k P_{n-k-1}$  の方程式は、 $y = -\tan q \left( x - \sum_{m=1}^k \cos(m-1)q \right) + \sum_{m=1}^k \sin(m-1)q$

よって、x軸との交点  $R_k(x_k, 0)$  を求めると、

$$x_k = \cot q \sum_{m=1}^k \sin(m-1)q + \sum_{m=1}^k \cos(m-1)q = \sum_{m=1}^k \left( \frac{\sin(m-1)q \cos q + \cos(m-1)q \sin q}{\sin q} \right) = \sum_{m=1}^k \frac{\sin mq}{\sin q}$$

以上より、 $x_k - x_{k-1} = \sum_{m=1}^k \frac{\sin mq}{\sin q} - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\sin mq}{\sin q} = \frac{\sin kq}{\sin q}$



## 5 .新世界のスリム化

こうして新世界への扉は開かれた。

この新世界の座標系の一番の特徴は、直線  $y=x$  に関して、頂点が対称に配されるということである。これは、 $x$  軸と  $y$  軸の目盛幅を同じ間隔に取ることにより、新世界において座標の擬似正規化をしたためである。しかし、このことにより元図から新図への変換過程が少し複雑なものになってしまった。もう少し、simple で slim な変身ができないか次に考えてみる。

一次変換を表す行列で、この  $y$  軸の目盛間隔の正規化に関与したのは、 $y$  軸方向の拡大(縮小)変換を表す表現行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos ecq \end{pmatrix} \dots\dots\dots(*)$$

である。この行列を通過せずにせん断を表す一次変換

$$g : S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & \cot q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P(n)$  を移してみよう。

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x + y \cot q \\ y \end{pmatrix}$$

であるから、 $y$  座標は不変で  $x$  座標だけが  $y \cot q$  分傾くことになる。この一次変換の像を新たな新世界とすると元世界との対比が容易である。変換  $f$  では、本来は  $x, y$  座標ともに基底が変換されるため、新図を描こうとすると新たに座標を作らなければならない。元図の中に書き込むことには無理があるのである。しかし、変換  $g$  はスライドするだけであるから元図の中に混在させることが可能である。変換  $g$  の性質を次に示す。

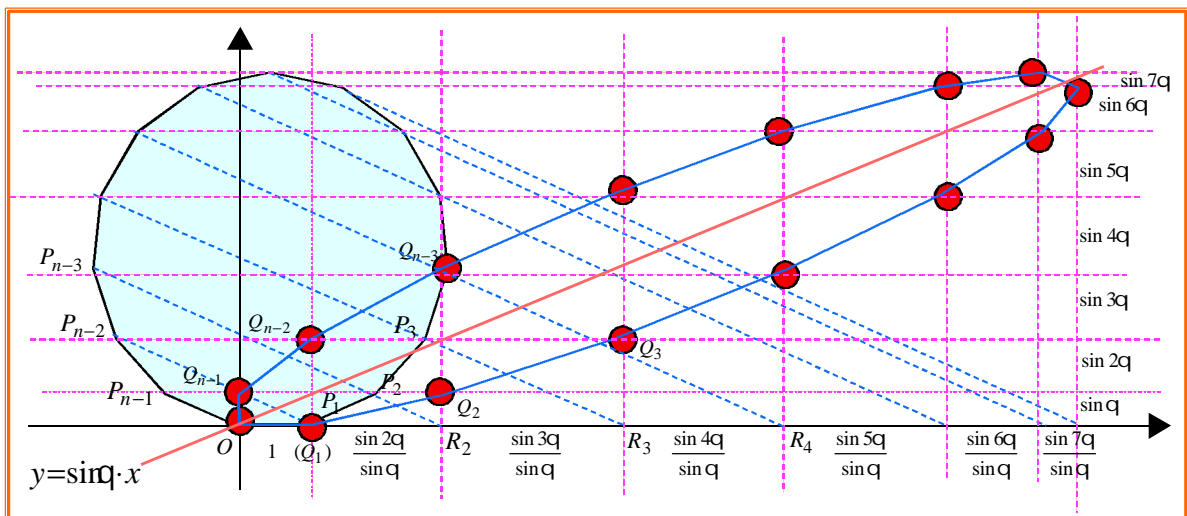
- (1) 直線  $OC$  の像は直線  $y = \sin q \cdot x$  である。
- (2) 新図では  $y$  軸の目盛間隔は、 $x$  軸の間隔の  $\sin q$  倍である。
- (3) 一次変換  $g$  は等面積変換である。

(1),(2)は、拡大縮小変換(\*)の性質を考えれば明らかである。(3)は、

$$\det(S) = 1$$

となることから分かる(なお、 $f$  では、 $\det(T) = \cos ecq$  より、面積は、 $\frac{1}{\sin q}$  倍であった)。

これらの性質は、受験問題の解法などでは元図では見え難い背景を新図で考えることにより、思考そのものも slim 化できるのである。この座標系で描いた  $P(n)$  の新世界を巻末に載せたのでごらんいただきたい。





## 6. 一般の多角形の変身

これまで正多角形  $P(n)$  の変身を考えてきたが、スケーリングのずらし変換はどんな図形に対しても実際は可能である。正多角形のように、容姿端麗である必要はない。

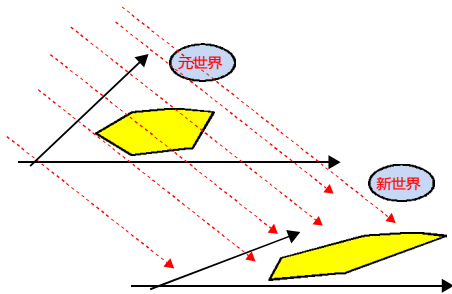
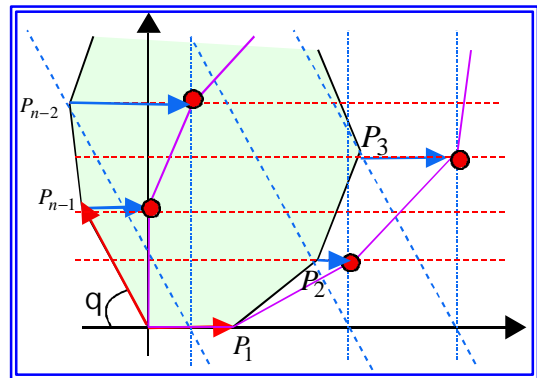
ただだって新世界へのキップはもっている。

問題は、何を新世界の基底として考えるかである。一次変換  $g$  の働きをみると、変換に関わっていたのは、 $P(n)$  の二辺  $OP_1$  と  $OP_{n-1}$  である。 $OP_1$  を  $x$  軸上にとり単位ベクトルとすることで、 $OP_{n-1}$  を  $y$  軸上に移せばよかつただけで、正多角形  $P(n)$  の中心角に対して表現行列  $S$  を確定する必要はないのである。したがって一般の多角形  $P_1P_2\cdots P_{n-1}P_n$  についても、 $q = \angle P_{n-1}OX_{-\infty}$  とし、この に対して、一次変換

$$g : S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & \cot q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

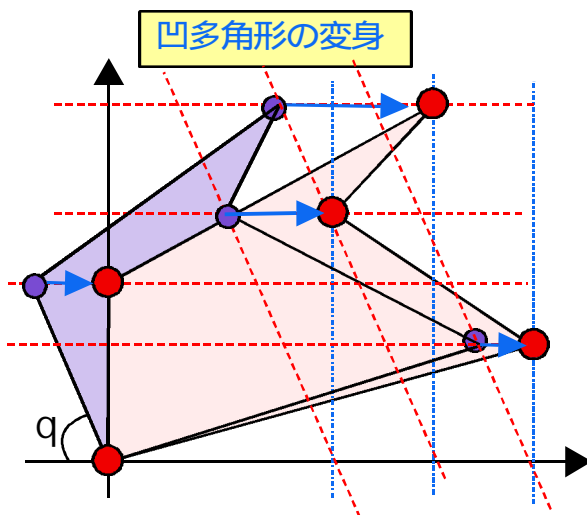
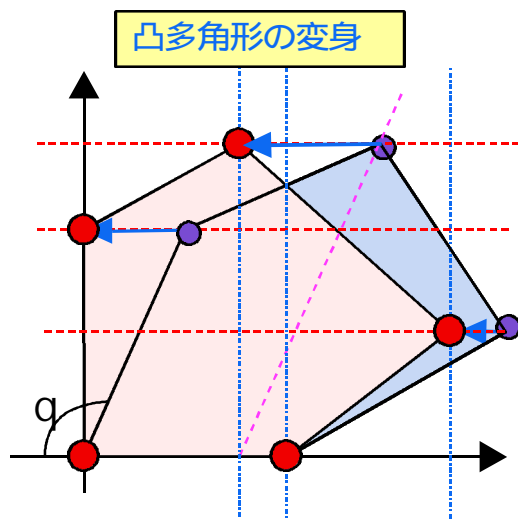
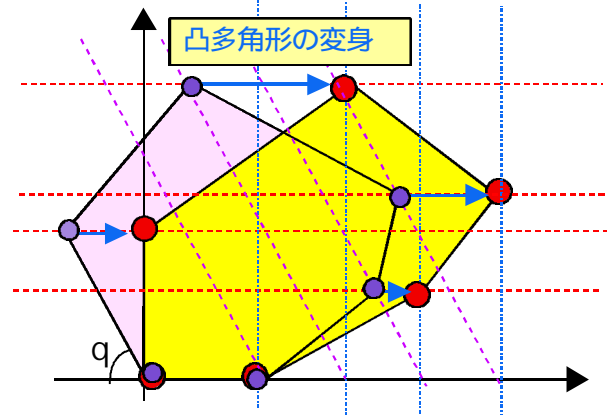
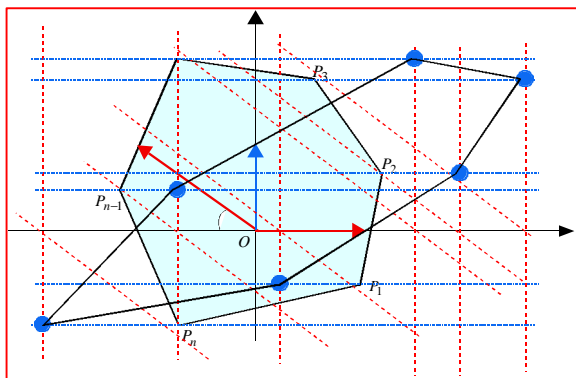
を考えればよい。あとは、 $OP_{n-1}$  に平行で各頂点を通る直線と  $x$  軸との交点を新世界での目盛幅として設定していく。

このように考えるとどんな多角形でも新世界に trip できるのである。

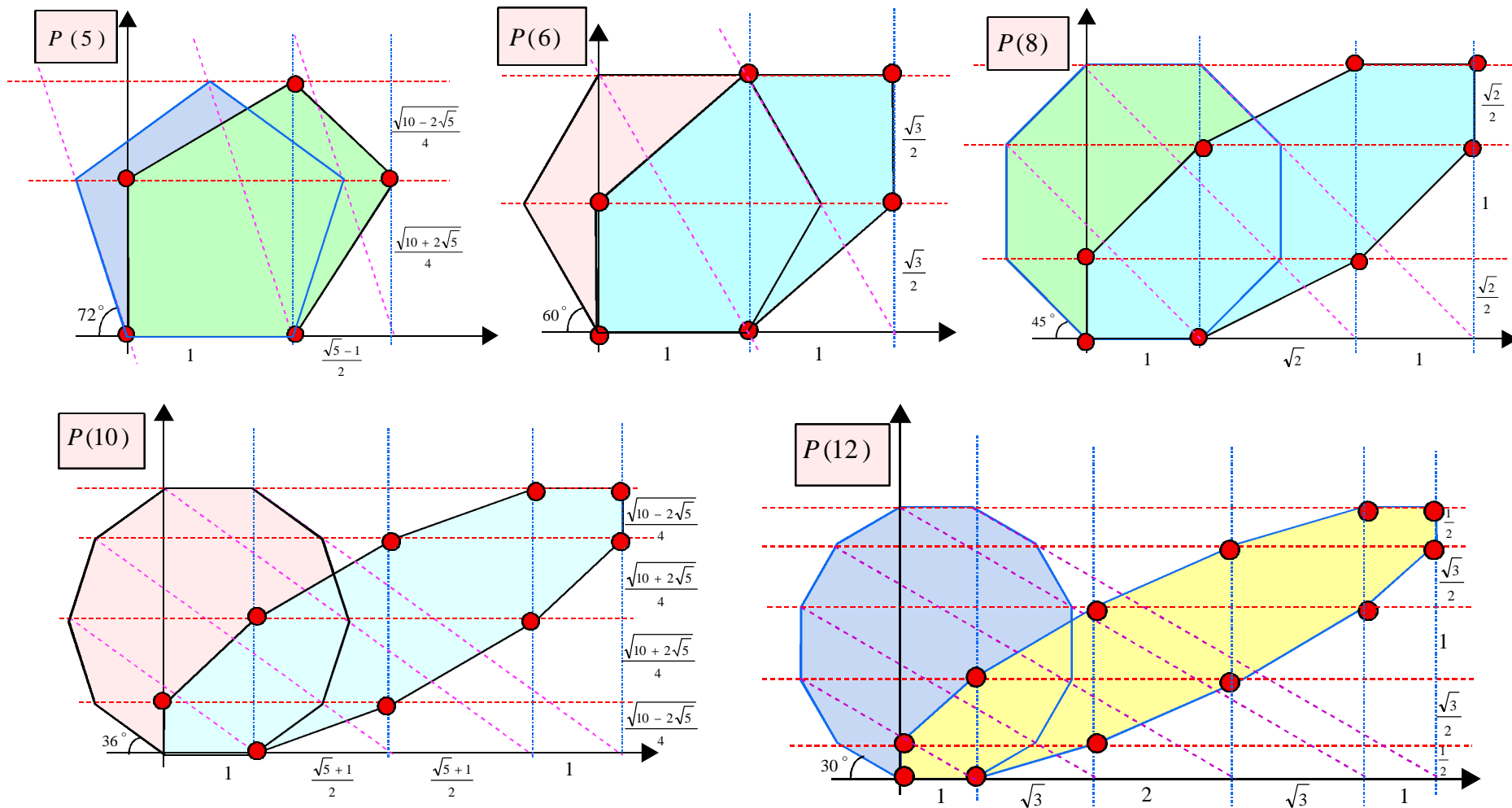


実は、二辺を基底と考える必要すらない。 $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \cdot \vec{b}$  のとき、この2つのベクトルを基底として平面が作られるわけであるから、平面上に適当に置かれた図形に対して、適当に基底を決めれば上記の手順から変身多角形が作られることになる。ただ、どう変換しても多角形の高さ ( $y$  座標の目盛間隔) は変わらない。  $x$  軸方向にスライドするだけである。すなわち、ずらしの度合いが、 の設定によって微妙に変化していく。

例えば、太陽光が、刻々と変化して我々の世界に射し込むときにできる影のように、ある平面世界に光が射すとき、その平面に平行な平面世界に映る影が変身多角形なのである。



# 正多角形変身力カタログ



## あとがき .....そして感謝

山峡のせせらぎにひとひら舞い落ちる梅花。流れに浮き沈み清流に遊び、激流に弄ばれ、ルパートに、アチェルランドに春の新緑の中に溶け込んでいく。

バッハ作曲のゴールドベルグ変奏曲は、そんな情景を思い浮かばせる。ヴァルハの弾くチェンバロは、モチーフの典雅なアリアを、優しく、力強く、悲しく、楽しく、様々に変容し、多彩なバリエーションを編み上げる。

きっと大山先生は、バッハが好きだと思う。

音楽（合唱）と数学という二つの青春を通して教職人生を駆け抜けていった先生。その先生の実践の後ろ姿を溼標として追い、多くの後輩教師達は励まされてきた。先生は周りの人間も花開かせた。その先生の無二無三な姿勢、そして一途な学問への追及心は、バッハがこよなく似合う。

バッハの曲は、緻密に組立てられた作曲技法の理論上にある完成された音楽である。崇高な哲学とも言えるその音楽は、完成された調和美の世界である。「G線上のアリア」を聴く子供達の顔を見るといい。無垢な心に受け入れられるバッハの音楽の深遠さに触れることができるだろう。

ヘンデルは、バロック時代、バッハと肩を並べた音楽家であるが、二人は、同じ年に生まれ（ヘンデルの1ヶ月後にバッハが生まれる）出生地も隣町、晩年の境遇も似ている。しかし、その曲風は対極に位置する。ヘンデルの曲は、春爛漫、桜吹雪が舞うような華やかな色彩に彩られた情感的音楽である。主旋律にぶら下る装飾音はともすれば旋律さえも食ってしまう賑やかさ。「水上の音楽」や「王宮の花火の音楽」といった宮廷音楽や野外音楽の楽しさは胸踊るものといえるだろう。

ところで、一説によるとヘンデルの音楽は剽窃が多いと言われている。今流に言えば、他人の作った旋律をパクるということだろうか。そのメロディにはどこかで聞いたフレーズがずいぶんあるようなのだ。その真偽は定かではないし、多分、ヘンデルの名声を妬んだ者の中傷だと思う。でも、万が一そうであってもその音楽の秀逸さと価値は少しも揺るぐものではない。それほどヘンデルの曲にもまた完成された素晴らしさがある。

さて、本レポート「変身多角形のスリムメタモルフォーゼ」は序文で述べたように、大山先生の発表された「正多角形の変身～面白いデフォルメ～」のパクリである。日数教山口大会でも発表されたそのレポートは、先生にとっては大切な1篇である。札幌東高の生徒と楽しい思い出が詰まっているものだし、先生自身も数実研の講演の中で、「ベクトルについては随分拘っていた」と述べられている。そんな大切なレポートをパクったわけだから、この後大山先生の信奉者に袋叩きにあいそうな気がする。でも、その前に弁明を.....

大山先生の論理はパクるべきものだと思う。開き直っているわけではない。

私達は、数学者ではなく数学教育者であろう。私達の研究は、生徒が数学という素晴らしい学問を感動をもって体感できるよう、その思考のアシストに最大限の努力を払ってされるべきである。生徒も私達の思考をパクっていく。「パクる」とは「食べる」とことと解釈できる。咀嚼しながらやがては自分の血となり肉となる。極上の食べ物が目の前にあって食べないことのほうがよっぽど失礼ではないだろうか。

**「まねる まねぶ まねぶ」**

私の好きな言葉である。これも正多角形の変身と同様、ひとつのデフォルメ。デフォルメとは進化ともいえるかもしれない。

実は、バッハの音楽理論はデカルトの哲学に似ている。著書、方法序説の中では「明証的に真と認めることなしには、いかなることも真であるとして受け取らない」そして「困難は分割せよ」と述べている。モチーフから繰り上げられるバリエーション（進化）を愛したバッハとどこか似ているのである。

そしてヘンデルは、パスカルと似ている。デカルトが分割した末のエッセンスから新たに論理を再構築したのに対し、パスカルは統合的に論理を見なおす。分割と統合、デカルト（バッハ）とパスカル（ヘンデル）の違いである。私達が問題を解くとき、いつもこの二つの考えがぶつかり逡巡する。でも人は誰でもバッハになれるというわけではない。論理が組立てられないから誰かの論理を参考にする。パクリ、統合的に解釈するのである。パスカル的な考え方の方が組み易いわけだ。ヘンデルの装飾音は、パクリのデフォルメの一過程なのかもしれない。

私は、バッハにもヘンデルにもなれない。だからせめて真似ることから始めることができるといつも思っている。

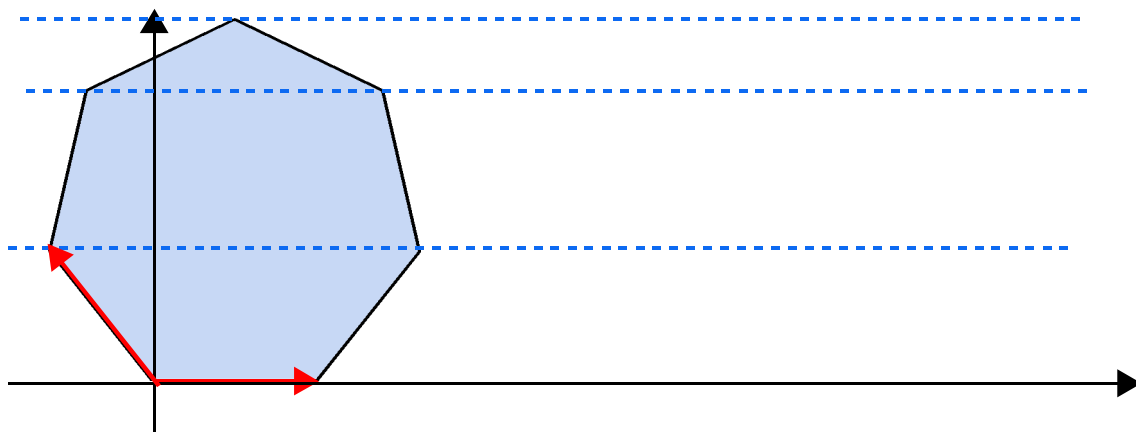
本レポートを書いている中で面白く思ったことがある。変身多角形の「新世界シェーマ図」を描いているとき、頂点が惑星に思え、その配列が銀河系に見えてきた。新世界が宇宙の中に漂っていたのである。これは物理学的な思考だろうか。物理学科出身の大山先生がみたであろう景色を私も垣間見ることができた。

最後に、正多角形の変身という素晴らしい口マンを与えてくださった大山先生に紙面を借りて、あらためて感謝の気持ちを捧げたい。

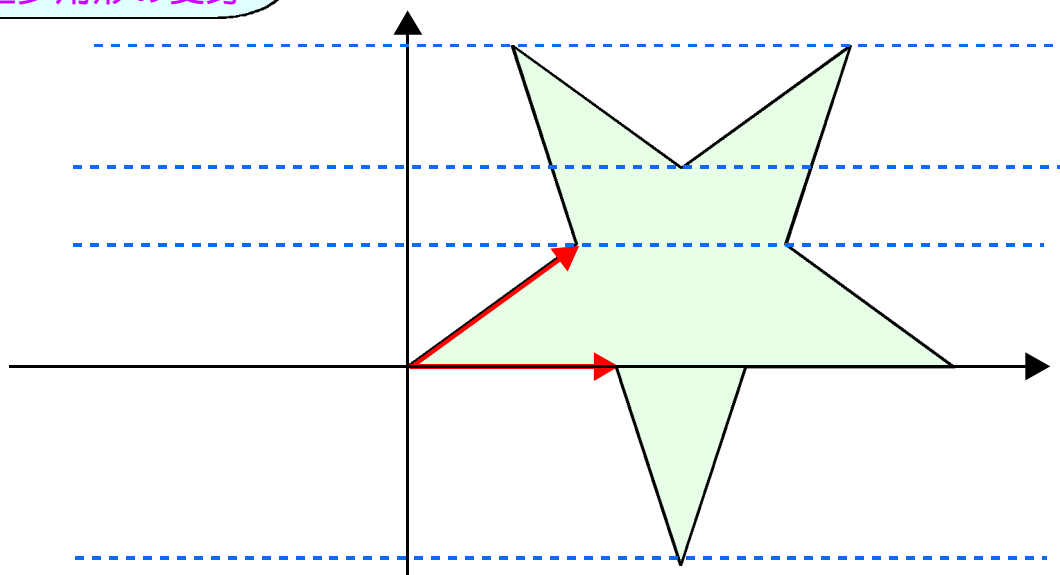
(1999.3.12)

# 多角形の変身にTRY

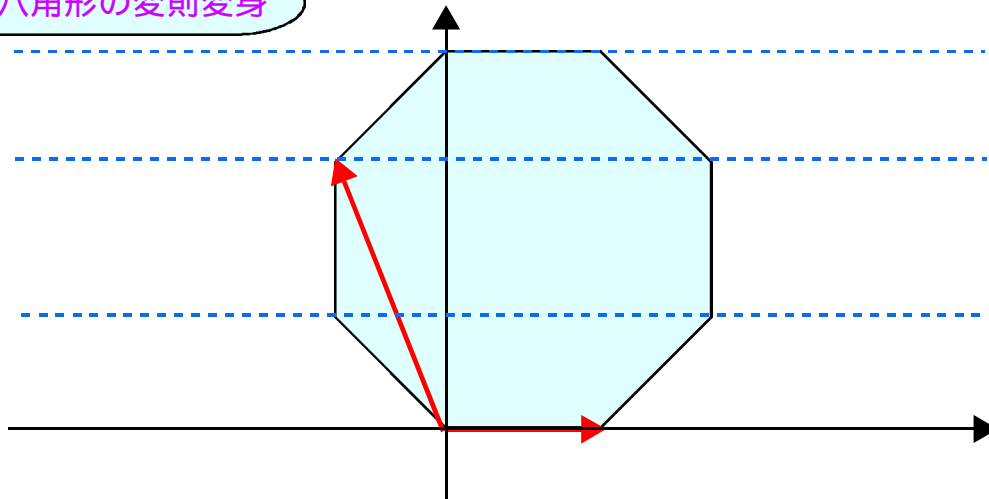
## 正七角形の変身



## 星型多角形の変身

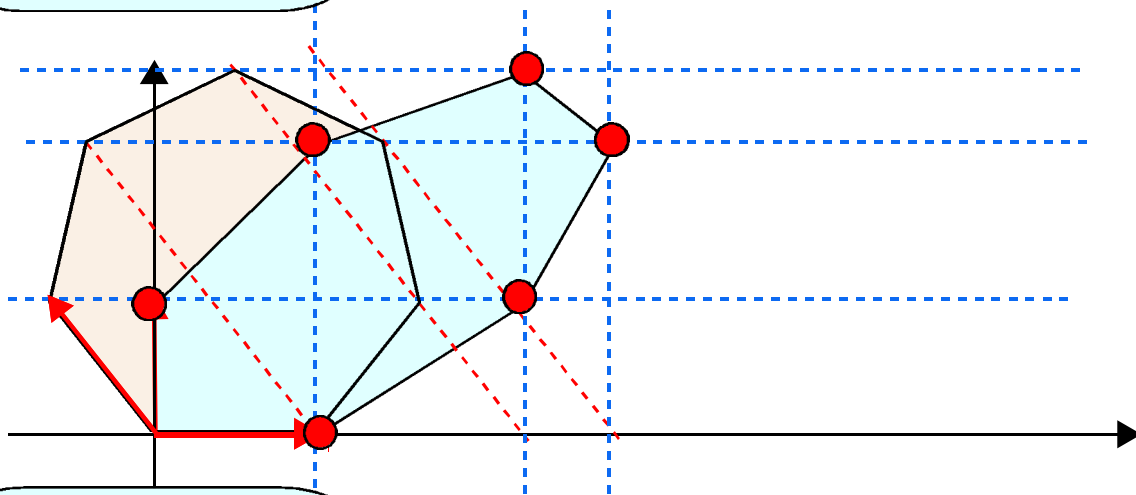


## 正八角形の変則変身

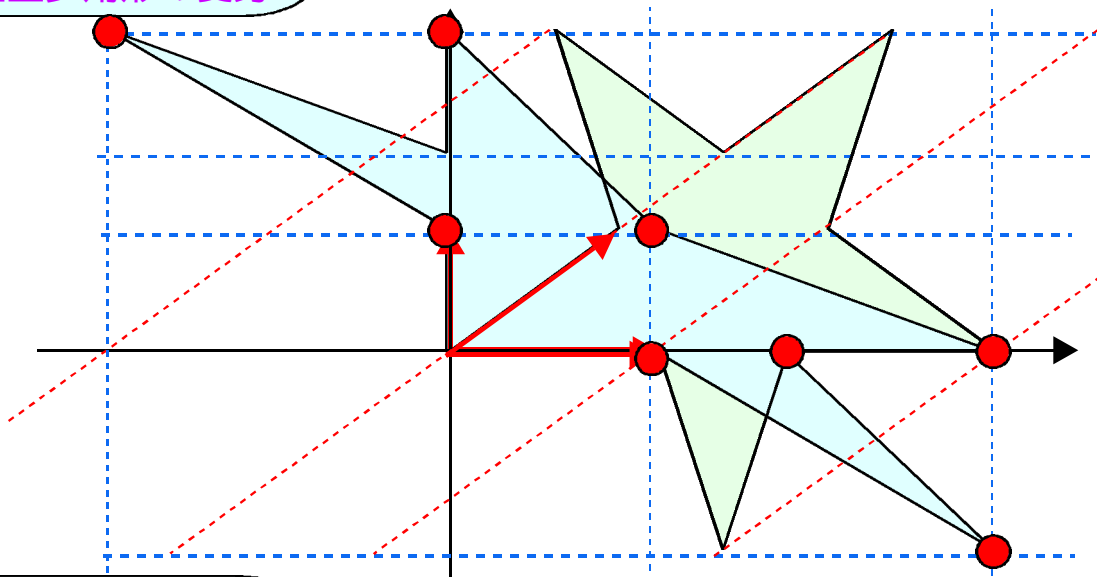


# 多角形の変身にTRY

正七角形の変身



星型多角形の変身



正八角形の変則変身

