

垂線ベクトルの小技

中村文則

○空間に点や図形をレイアウトしよう！

<先生> 質問です。次の式は何を表しているだろうか。

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \dots\dots(*)$$

<まなぶ> 前振りもなくいきなり？。もちろん、絶対値の性質でしょ。

<かず子> あほ、矢印がみえないの？、まあっ、自分の進む矢印もはっきりわからないのだからしょうがないかもね。

これ、スカラー積ではなく、ベクトルの内積ですよ。2つのベクトルの少なくとも一方が $\vec{0}$ のときは、明らかな式だけど、そうでないときはどうなるのかしら。内積の定義では2つのベクトルのなす角を θ とすると、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

こうなるけど、 $\cos \theta$ が(*)の右辺では消えている。

<よしお> (*)の左辺に代入してみればいいと思うよ。

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \theta|$$

これから、 \vec{a} と \vec{b} が $\vec{0}$ でないときは、(*)の両辺を $|\vec{a}| |\vec{b}|$ で割ると、

$$|\cos \theta| = 1 \quad \text{すなわち} \quad \cos \theta = \pm 1$$

<アリス> θ が求められます。2つのベクトルのなす角 θ は $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ だから、 $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ です。

<まなぶ> ということは、 \vec{a} と \vec{b} は平行ということか。

<よしお> ベクトルの平行条件は、一方のベクトルが他方のベクトルの実数倍、すなわち、

$$\vec{a} = k\vec{b} \quad (k \text{ は } 0 \text{ 以外の実数}) \dots\dots(**)$$

という関係でしたけど、(*)でもいいということでしょうか。

<先生> その通り。(**)から(*)を導くことで確認してみよう。

$$(**) \text{より, } \vec{a} \cdot \vec{b} = (k\vec{b}) \cdot \vec{b} = k|\vec{b}|^2$$

$$\vec{b} \neq \vec{0} \text{ のとき, } k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \quad (**)\text{に代入すると, } \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

$$\text{両辺の大きさを求めて, } |\vec{a}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|^2} |\vec{b}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

分母を払うと(*)が得られる。(**)から(*)は先ほどみんなが示した通りだ。

<まなぶ> なるほどね。でも(**)の方が分かり易い。(*)を考える意味はあるのかな。

<かず子> まなぶの性格と違い、いろんな風に表現できるのが面白いでしょ。

<アリス> まなぶさんの性格ってどういう風に表されるんですか。

<まなぶ> ぼくも是非聞きたい。

<先生> それは後で話し合っしてほしい。

さて、(*)の意味するところだけど、

$$\vec{a} = \overrightarrow{HA}, \quad \vec{b} = \vec{n} \quad (n \neq 0)$$

とする。(*)より、 $|\overrightarrow{HA} \cdot \vec{n}| = |\overrightarrow{HA}| |\vec{n}|$ 。これから、

$$|\overrightarrow{HA}| = \frac{|\overrightarrow{HA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

この式をみて何か気がつくことはないだろうか。

<かず子> \vec{n} は法線ベクトルとしてよく用いますよね。

<アリス> 点Hは、直線とその垂線との交点で使われます。

<まなぶ> さらに、 \overrightarrow{HA} と \vec{n} は平行なんだから、右図の位置関係が予想できる。

これって、もしかしたら垂線AHの長さってこと。

<よしお> なるほど。点と直線の距離を表しているということなんですね。

<先生> 調べてみよう。右辺の分子を変形する。

$$\overrightarrow{HA} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OH}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{OA} \cdot \vec{n} - \overrightarrow{OH} \cdot \vec{n} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、直線 $l: ax + by + c = 0$ を考える。

その法線ベクトルは $\vec{n} = (a, b)$ としていい。

点 $A(x_1, y_1)$ から直線 l に下ろした垂線をAHとし、点Hの座標を $H(x_0, y_0)$ とする。

$\overrightarrow{OA} \cdot \vec{n}$ と $\overrightarrow{OH} \cdot \vec{n}$ を計算してごらん。

<アリス> $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{n} = ax_1 + by_1$, $\overrightarrow{OH} \cdot \vec{n} = ax_0 + by_0$ です。

<かず子> でも点と直線の距離の公式では垂線AHの点Hの座標は分からないですよね。 $\overrightarrow{OH} \cdot \vec{n}$ を実際に求めることはできないのではないのでしょうか。

<先生> 点Hは直線 l 上の点だね。

<まなぶ> なるほど。直線 l の方程式に点Hの座標を代入できるということだ。そうすると、

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

そうか、 $ax_0 + by_0 = -c$ 。これから、 $\overrightarrow{OH} \cdot \vec{n} = -c$ になる。

だから、点Hの座標は必要ないんだ。

<よしお> そうすると、 $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\overrightarrow{HA} \cdot \vec{n} = ax_1 + by_1 - (-c) = ax_1 + by_1 + c$$

きれいにまとめることができました。

<先生> ここで、 $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ だから、次のようになる。

$$|\overrightarrow{HA}| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

<かず子> 本当だ。「点と直線の距離の公式」だ。

<先生> でもね、実をいうとこの「点と直線の距離の公式」にしてしまうのは、とても「もったいない」ことなんだ。

<アリス> 日本人の美徳のあの「もったいない」ですか。

<かず子> よく分からないわ。点から直線に下ろした垂線の長さが分かれば、三角形の面積や最小問題なんかにも使える。とても便利な公式だと思いますが。

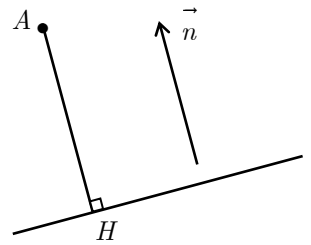
<先生> そうだね。でもこの公式を用いるとき、「あれ」も分かっていたらいいのにと感じたことはないかな。

<まなぶ> アレって、あれではないし、あれかもしれないし、あれれ？

<かず子> 一人でやってなさい。

<先生> それではヒントをあげよう。次の問題を考えてごらん。

直線 $l: 3x + 4y - 5 = 0$ に、点 $A(3, 2)$ から下ろした垂線をAHとする。
AHの大きさと、点Hの座標を求めよ。



<アリス> 公式そのままですね.

$$AH = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5}$$

そして, 点 A を通り l に垂直な直線 g と直線 l との交点が H になります.

<かず子> 点 H は次のように求めます.

直線 l の法線ベクトル $\vec{n} = (3, 4)$ に垂直なベクトルは $\vec{m} = (4, -3)$ です. 直線 g は点 $A(3, 2)$ を通るから, 方程式は,

$$4(x - 3) - 3(y - 2) = 0$$

$$\therefore 4x - 3y - 6 = 0$$

直線 l と直線 g の連立方程式を解いて,

$$x = \frac{39}{25}, \quad y = \frac{2}{25}$$

$$\text{以上より } H \left(\frac{39}{25}, \frac{2}{25} \right)$$

できました. 先生, 解いているときに思ったんですけど, 垂線の長さ AH の後に点 H の座標を求めるという順番は何かしっくりこないのですが, 「あれ」と関係ありますか.

<まなぶ> それはたぶん, 先に点 H の座標が分かれば線分 AH の長さは 2 点間の距離の公式で求められてしまう.

だから「点と直線の距離の公式」は必要ないことになる. それがしっくりこない理由だろ.

<先生> そうです. そして, それももったいないということなんだ. 整理してしてみよう.

\vec{HA} と \vec{n} が平行より, $\vec{HA} = k\vec{n}$ とする.

$\vec{HA} \cdot \vec{n} = k|\vec{n}|^2$ から, $k = \frac{\vec{HA} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}$. これから定数 k が求められた. よって,

$$\vec{HA} = \frac{\vec{HA} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

ここで, $f(x, y) = ax + by + c$ とする.

先ほどの結果から, 点 $A(x_1, y_1)$ から直線 $f(x, y) = 0$ に引いた垂線を AH とすると,

$$\vec{HA} \cdot \vec{n} = f(x_1, y_1)$$

すなわち②は次のように表すことができる.

$$\vec{HA} = \frac{f(x_1, y_1)}{|\vec{n}|^2} \vec{n} \quad \dots(\star)$$

<アリス> あれ?. 垂線って, ベクトルで表現できるんですね.

<まなぶ> それが「あれ」ってことか.

<先生> このベクトルを仮に「垂線ベクトル」ということにしよう.

このように垂線はベクトル表現できるのに「点と直線の距離」はその大きさだけを取り出している.

格下げしたみたいで, とても, もったいない.

<かず子> 本当にもったいないですね.

あっ, ということは, これから点 H の座標が求められるのでは.

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AH} = \vec{OA} - \vec{HA}$$

となります. 先ほどの問題を解いてみます.

$$f(3, 2) = 3 \times 3 + 4 \times 2 - 5 = 12$$

$$\vec{n} = (3, 4) \text{ より, } |\vec{n}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\therefore \vec{OH} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{12}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 39 \\ 2 \end{pmatrix}$$

できたわ. あとは, AH の長さを 2 点間の距離の公式で求めればいい.

<よしお> いや、AHの長さは「点と距離の公式」を使った方がいい。

距離の公式で平方和をしてルートをとるのってちょっと面倒だと思う。

<先生> そうだね、実際の計算は効率的な考えることも大事だね。

<まなぶ> 先生、でもまだちょっと気になることがあるのだけど。

問題では、点Aから直線に下ろした線分の長さAHを要求している。それなのになぜ \overrightarrow{HA} なんだろう。

実際、②の式の両辺を-1倍してベクトルの向きを変えると、

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

こちらの方がずっといい。

<かず子> そんなこと、どうでもいいでしょ。ルーズなまなぶらしくないよ。

<まなぶ> それ褒めてるの、それともけなしてるの。

だって、問題のイメージを図で表現するならば、「点Aから下ろして点H」であり、「点Hから上げて点A」って

なんか変でしょ。それに、「えーっ、エッチ」の方が「エッチ、えーっ」より響きがいいし。

<かず子> 結局、それ？。まなぶがいうと、とてもいかがわしく聞こえる。

<先生> 実はまなぶの疑問はとても重要なことなんだ。もう一度整理すると、

$$\overrightarrow{HA} = k\vec{n} \text{ のとき, } k = \frac{f(x_1, y_1)}{|\vec{n}|^2}$$

これから、 $k > 0$ のとき、 $f(x_1, y_1) > 0$ となっている。

だから、 \overrightarrow{HA} と \vec{n} は同じ向きのベクトルになる。

<よしお> そうか。 \overrightarrow{AH} にしまうと、 \vec{n} と同じ向きになる場合は $f(x_1, y_1) < 0$ だから分かり難いということですね。

<まなぶ> それで「えっち、えーっ」か。しょうがない、慣れよう。

<かず子> なんか違ったこと考えていない？

<先生> そしてもう一つ大事なことがある。 \overrightarrow{HA} にしないとこれも、とてももったいないんだ。

<まなぶ> 「もったいない」はもう解決したと思っていた。

<先生> ②の式をもう一度みてみよう。これは、点と直線の距離だけを表す関係だろうか。

<アリス> 質問の意味が分からないのですが。

<先生> 直線の方程式の一般形 $ax + by + c = 0$ は次のように求めた。

平面上の点Aを通り、 \vec{n} に垂直な直線上の点Pは $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$ を満たす。よって、

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

このときの点P(x,y)の軌跡として得られる。では、空間内で考えれば、③は何を表しているだろう。

<よしお> \overrightarrow{AP} と \vec{n} が垂直であるように点Pが動くとき、その軌跡は平面になります。

その方程式は $ax + by + cz + d = 0$ であり、法線ベクトルは $\vec{n} = (a, b, c)$ でした。

<まなぶ> そうか、②は平面上では点Aから直線に下ろした垂線ベクトルだけど、空間では点Aから平面に下ろした垂線ベクトルなのか。

<先生> 正解。でもまだ「もったいない」はすべて言えていない。

$f(x, y, z) = ax + by + cz + d$, $A(x_1, y_1, z_1)$ とする。②から導かれた(☆)はどう変わるだろう。

<アリス> z成分が増えるだけだから(☆)は次のようになります。

$$\overrightarrow{HA} = \frac{f(x_1, y_1, z_1)}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

<かず子> 空間では、平面に垂直な垂線ベクトルが表現できるんですね。そしてその大きさを考えると「点と平面の距離の公式」になるってことだわ。

<先生> さらに、空間内の点と平面 $f(x, y, z) = 0$ との位置関係を調べることができる。

平面上で考えた場合と同様に、次のことが言える。

$f(x_1, y_1, z_1) > 0$ のとき、垂線ベクトルと法線ベクトル \vec{n} は同じ向き
 $f(x_1, y_1, z_1) < 0$ のとき、垂線ベクトルと法線ベクトル \vec{n} は逆の向き

なお、平面 $f(x, y, z) = 0$ を境界面とするとき、

$f(x, y, z) > 0$ である空間部分を正領域
 $f(x, y, z) < 0$ である空間部分を負領域

という。

<かず子> 空間の場合は、点、直線、平面、法線ベクトルなんかの位置関係を図で表そうとすると、適当に描くしかなかった。その適当ってことが誰かを思い出してしまい、とても嫌だったんです。それがかなり正確に図のイメージができるということですね。なんかほっとしました。

<まなぶ> 「ほっとする」という言い方はおかしいだろ。でも先生、点が平面上や下にあることは分かるだけで結局は点をプロットするのは適当だよな。

<かず子> なんで「適当」に戻そうとするかな。

<先生> 確かに適当にはなるけど平面からどれだけ離れているかは示すことができる。

2点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ から平面に下ろした垂線をそれぞれ、 H_1A , H_2B とする。このとき、

$$|H_1A| = \frac{|f(x_1, y_1, z_1)|}{|\vec{n}|}, \quad |H_2B| = \frac{|f(x_2, y_2, z_2)|}{|\vec{n}|}$$

これから、 $H_1A : H_2B = |f(x_1, y_1, z_1)| : |f(x_2, y_2, z_2)|$

$f(x, y, z)$ に点の座標を代入した値の比をみると、どれだけ点が平面から離れているかということが分かる。

<アリス> こんなにたくさんの情報が垂線ベクトルから分かるのに、いままで距離しか考えていなかったのは、凄くもったいないことだったんですね。

<先生> 次の問題で実感してみよう。

空間に2点 $A(1, 2, 3)$, $B(-1, -1, 2)$ と平面 $\alpha : x - y + 2z = 2$ がある。
このとき、 $AP + BP$ が最小となる平面 α 上の点 P の座標を求めよ。

まず、点や法線ベクトルの位置を平面 α にレイアウトしてごらん。

<かず子> $f(x, y, z) = x - y + 2z - 2$ とおきます。このとき、

$$f(1, 2, 3) = 3, \quad f(-1, -1, 2) = 2$$

これから、2点 A , B はどちらも平面 α に対して正領域にある点です。

垂線 H_1A_1 と H_2B の長さの関係は、

$$H_1A_1 : H_2B = 3 : 2$$

となります。

<先生> 法線ベクトル \vec{n} との関係はどうなっていますか。

<アリス> $\vec{n} = (1, -1, 2)$ です。 $f(x, y, z)$ に代入した値は点 A , B のどちらも正より \vec{n} , $\overrightarrow{H_1A}$, $\overrightarrow{H_2B}$ はすべて同じ向きです。

<先生> では、平面 α の法線ベクトル \vec{n} を、原点 O を始点として記入してみよう。

<よしお> $f(0, 0, 0) = -2$ より原点は負領域にあります。 $f(1, -1, 2) = 4$ 。終点は正領域ですね。

だから法線ベクトルは、平面の下にある原点から平面を垂直に横切り上に延びています。

<まなぶ> 始点と終点の平面からの離れ具合もわかるよ。

$$|f(0, 0, 0)| : |f(1, -1, 2)| = 2 : 4$$

これを基準にして点 A と点 B をプロットできる。

<先生> 以上の情報からレイアウトすると、右図のようになる。

<アリス> とっても分かり易い図が描けたわ。

<先生> それでは、この図を参考にして $AP + PB$ の最小値を考えよう。

<かず子> 点Aと点Bは平面 α に対して正領域、すなわち同じ側にあるのね。

<アリス> 領域が異なっていれば、線分ABと平面 α との交点が最小となる点Pですね。

同じ側にある場合はどうすればいいのでしょうか。

<よしお> 点Aを平面 α に関して対称移動すればいい。対称移動した点を A' とすると、

$$AP + PB = A'P + PB \geq A'B$$

これから、線分 $A'B$ と平面 α との交点が最小となる点Pです。

<かず子> 点 A' の座標を求めればよいということね。そのためには、点 H_1 の座標が分かれば、点 A' は線分 AH_1 を1:2に外分する点になる。点 H_1 を求めるためにいよいよ垂線ベクトルの登場ね。

<まなぶ> 外分するより、 $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AH_1}$ とした方がラクだよ。

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{H_1A}$$

ほら、これを計算すればいいだけだ

<かず子> たまにはいいこというのね。やってみます。

$$\overrightarrow{H_1A} = \frac{f(1,2,3)\vec{n}}{|\vec{n}|^2} = \frac{3}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

これから、

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

できた。 A' の座標は、 $A'(0,3,1)$

<アリス> 最後に線分 $A'B$ と平面 α との交点を求めるとおしまいです。直線 $A'B$ のベクトル方程式か、 x, y, z で直線の方程式として表すか、どちらで考えればいいのでしょうか。

<先生> ここで、垂線ベクトルを使わないともったいないよ。レイアウト図をよくみてごらん。

<よしお> そうか、相似比が使えるのですね。

<アリス> 相似比……、分かりました。 $\triangle A'PH_1$ と $\triangle BPH_2$ は相似ということですね。だから、

$$A'P : PB = A'H_1 : BH_2 = AH_1 : BH_2 = 3 : 2$$

点Pは線分 $A'B$ を3:2に内分する点です。これから、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA'} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

できました。 $P\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}\right)$ となります。

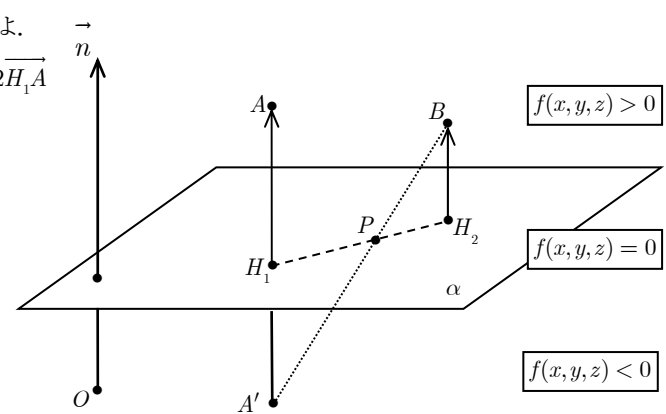
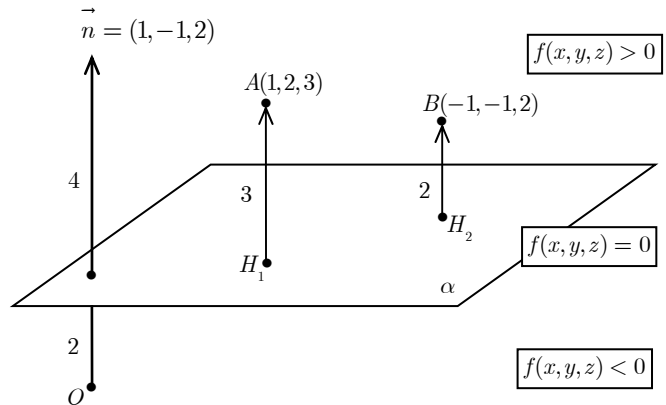
<よしお> 解法は、ベクトル方程式でもなく、 x, y, z の方程式でもない、でもずいぶん鮮やかに解けている。

<先生> それは垂線ベクトルには情報がいっぱい詰まっているからできることなんだよ。

<かず子> いろいろな情報をもったいないから引き出して使う。その情報がひとつしかなかったら面白くもない。例えば人に例えれば、残念な生き物ということになるわ。

<アリス> あっ、「まなぶさんの性格と違いいろんな風に表現できる」とはそういうことですか。なんか分かりました。

<まなぶ> そんなこと、分からなくていいよ。



あとがき

小手技は、生徒4人が知恵を絞り演習問題を解くという流れが一般的ですが、本稿は構成を少し変えています。先生のレクチャーで公式を導くことから始まり演習問題で理解する、よりライブ的な授業風景になるようにしました。さて、その公式である「垂線ベクトル」は造語です。数学用語としては「正射影ベクトル」のことを表しています。

右図のように、 \vec{OA} 上に落とした \vec{OB} の影である \vec{OH} を、 \vec{OB} の \vec{OA} 上への正射影ベクトルといいます。正射影ベクトルは次のように求めます。

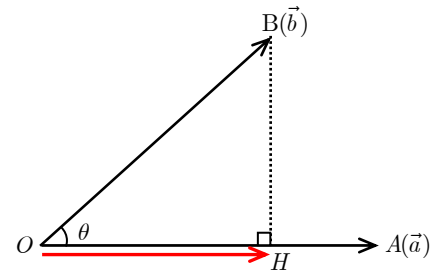
$$\vec{OH} = k\vec{a} \text{ とすると,}$$

$$\vec{BH} = \vec{OH} - \vec{OB} = k\vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{BH} \perp \vec{OA} \text{ より, } \vec{BH} \cdot \vec{OA} = 0$$

$$\text{これより, } (k\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \quad \therefore k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}$$

$$\text{以上より, } \vec{OH} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$



空間において、点Aから平面 α に下ろした垂線AHも正射影で考えることができます。

平面 α の法線ベクトルを \vec{n} 、平面上の点をBとすると、 \vec{AH} は \vec{AB} の \vec{n} 上への正射影ベクトルです。したがって、

$$\vec{AH} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} \quad \dots (*)$$

ところで、本稿では平面 α 上の点Bとして、垂線AHの求点Hを考えています。それは、2つのベクトルの平行条件から法線ベクトルの対となる垂線ベクトルを考察するという意図に因ります。

また、 \vec{AH} ではなく \vec{HA} である、とも主張しています。平面の方程式 $f(x,y,z) = 0$ を境界面にするとき、 \vec{HA} のほうが空間の正領域、負領域が判定しやすくなり、点や直線を空間にレイアウトしやすいからです。でも本来は、正射影ベクトル \vec{AH} で表現の方が種々の性質を理解するためには適しています。本稿は点と直線(平面)の位置関係に内容を限定したため、「垂線ベクトル」なる造語を用いることになりました。

ところで、 $\vec{e} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ とすることで、(*)は次のように変形できます。

$$\vec{AH} = \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right) \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (\vec{AB} \cdot \vec{e}) \vec{e}$$

ここで、 $|\vec{e}| = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{n}|} = 1$ です。この \vec{e} を平面の単位法線ベクトルといいます。これから、

$$|\vec{AH}| = |\vec{AB} \cdot \vec{e}| |\vec{e}| = |\vec{AB} \cdot \vec{e}|$$

単位法線ベクトルを考えることで、公式はすっきりした形で整理できます。

以上、まとめると、

平面 α 上の点をB、単位法線ベクトルを \vec{e} とする。点Aから平面 α に垂線AHを下ろすとき、
 垂線ベクトルは、 $\vec{AH} = (\vec{AB} \cdot \vec{e}) \vec{e}$
 点Aと平面の距離は、 $|\vec{AH}| = |\vec{AB} \cdot \vec{e}|$
 である。

このようにベクトルを単位ベクトルに変換することで、平面や空間のベクトル表現はとても見やすいものになります。

ベクトルは、大きさと向きで表せる量であり、 \vec{a} の大きさは $|\vec{a}|$ と表されます。では、 \vec{a} の向きは何かということは意外とおざなりかもしれません。

$$\vec{a} = |\vec{a}| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

このようにみれば、 $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ がベクトルの向きを表していることになります。このとき、 xy 平面上で、 \vec{a} が x 軸の正の向き

となす角を θ とすると、 $\vec{e} = (\cos \theta, \sin \theta)$ となり、角度で向きが決まることが理解できるでしょう。

では単位法線ベクトルにより、直線の方程式を表現してみましょう。

直線の方程式の一般形 $ax + by + c = 0$ の両辺を $\sqrt{a^2 + b^2}$ で割ります。

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

このとき、法線ベクトル \vec{n} は、

$$\vec{n} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

これが単位法線ベクトルです。

ここで、座標平面上で x の正の向きと \vec{n} のなす角を α とすると、

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

と表すことができます。また、

$$p = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (p > 0 \text{ となるようにする})$$

とおきます。これから直線の方程式は次のようになります。

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \quad \dots(\#)$$

(#)を直線の法線標準形(Normal Form)、またはヘッセの標準形(Hesse Standard Form)といい、ドイツの数学者Ludwig Otto Hesse(1811-1874)に因み命名されています。

直線の表現方法には、標準形、一般形、切片形などがあり、利用しやすいファクターにより方程式の形態が変わります。(#)もまたその形態の1つになります。

さて、この方程式で表現すると、座標平面上では原点から直線の距離は右辺の p になります。角度 α を変化させると、直線は原点との距離 p を保ちながら包絡線を描き、軌跡として円が浮かんできます。

ヘッセの標準形は、原点を中心とする半径 p である円の接線群を表しているともいえます。

また、 y 軸の正の向きと法線ベクトル \vec{n} のなす角を β とすると、

$$\alpha + \beta = 90^\circ \text{ より,}$$

$$\sin \alpha = \sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta$$

これからヘッセの標準形は次のように表現できます。

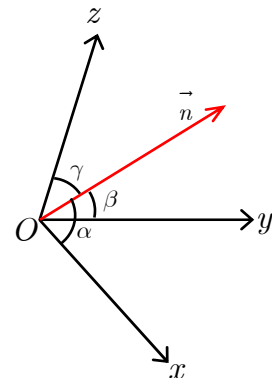
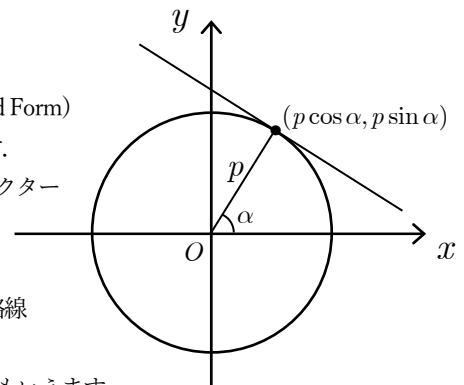
$$x \cos \alpha + y \cos \beta = p$$

なお、ベクトルが x 軸、 y 軸となす角の余弦を方向余弦といいます。方向余弦を用いると、ヘッセの標準形は空間で平面の方程式にも適用することができます。

空間において、平面 π の法線ベクトル \vec{n} とします。

\vec{n} が x 軸、 y 軸、 z 軸の正の向きとなす角をそれぞれ、 α 、 β 、 γ とすると、

単位法線ベクトル \vec{e} は、次のように表すことができます。



$$\vec{e} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\text{これから, } |\vec{e}|^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

平面 π の方程式は,

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p \quad (p > 0)$$

となります. このとき, 原点から平面に下ろした垂線の長さは p であり, 平面 π は原点を中心とする半径 p である球面の接平面を表しています.

平面の方程式 $\pi: 2x - y - 2z + 6 = 0$ をヘッセの標準形で表してみましょう.

平面の法線ベクトルは,

$$\vec{n} = (2, -1, -2)$$

$$\therefore |\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$$

$|\vec{n}| = 3$ より, 右辺が正になるように平面の方程式 $2x - y - 2z = -6$ の両辺を -3 で割ります.

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 2$$

ヘッセの標準形で表すことができました. 原点と平面 π との距離は 2 になります.

話題を本文に戻します.

実は, 本文では, いつものまなぶなら絶対に突っ込みをいれるべきことをまなぶは失念しています.

<まなぶ> 先生, 平面上の点と直線の距離の公式が, 空間では点の平面の距離の公式に昇格したのは分かったけど, それならば, 空間で点と直線の距離の公式はどうなるのかな.

そこで, まなぶが失念した疑問に応え, 空間内では点と直線の距離はどう表現できるか考えてみましょう.

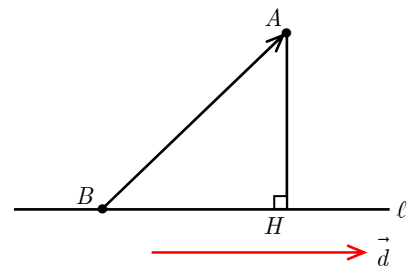
直線 ℓ 上の点を B とし方向ベクトルを \vec{d} とします.

点 A から直線 ℓ に下ろした垂線ベクトルを, 次のように視点を変えて眺めてみます.

「点 A を通り法線ベクトルが \vec{d} である平面に, 点 B から垂線 BH を下ろす」

そうすると, 本文の垂線ベクトルの考え方により,

$$\vec{BH} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|} \vec{d}$$



となります. ここで,

$$\vec{BH} \cdot \vec{d} = (\vec{BA} + \vec{AH}) \cdot \vec{d} = \vec{BA} \cdot \vec{d} + \vec{AH} \cdot \vec{d} = \vec{BA} \cdot \vec{d} \quad (\because \vec{AH} \perp \vec{d} \text{ より, } \vec{AH} \cdot \vec{d} = 0)$$

$$\therefore \vec{BH} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|} \vec{d} \quad (\text{垂線ベクトルという造語で進めたために, こういったところに弊害が生じます})$$

ここで, 方向ベクトル \vec{d} を単位方向ベクトルにします.

$$\vec{e} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} \quad \text{これから,}$$

$$\vec{BH} = \left(\vec{BA} \cdot \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} \right) \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = (\vec{BA} \cdot \vec{e}) \vec{e}$$

よつて, $\vec{AH} = \vec{AB} + \vec{BH}$ であることから,

$$\vec{AH} = \vec{AB} - (\vec{AB} \cdot \vec{e}) \vec{e}$$

さらに、 \overrightarrow{AH} の大きさを求めれば「空間での点と直線の距離の公式」が得られます。

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AH}|^2 &= \left| \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{e}) \vec{e} \right|^2 \\ &= |\overrightarrow{AB}|^2 - 2(\overrightarrow{AB} \cdot \vec{e}) \overrightarrow{AB} \cdot \vec{e} + \left| (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{e}) \vec{e} \right|^2 \\ &= |\overrightarrow{AB}|^2 - 2(\overrightarrow{AB} \cdot \vec{e})^2 + (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{e})^2 \\ &= |\overrightarrow{AB}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{e})^2 \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{e})^2}$$

以上より、まとめると次ようになります。

直線 ℓ 上の点を B, 単位方向ベクトルを \vec{e} とする. 点 A から直線 ℓ に垂線 AH を下ろすとき,

$$\text{垂線ベクトルは, } \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{e}) \vec{e}$$

$$\text{点 A と直線の距離は, } |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{e})^2}$$

である.

このように点と平面の距離同様に公式化することができました.

なお, 垂線ベクトル(正射影ベクトル)を必要とせず, 「空間における点と直線の距離」だけであれば次のように簡単に求めることができます.

直線の単位方向ベクトル \vec{e} の始点を B, 終点を C とします.

このとき, 三角形 ABC の面積は,

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} AB \cdot AH$$

一方ベクトルで面積を表すと,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2 |\vec{e}|^2 - (\overrightarrow{BA} \cdot \vec{e})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{e})^2}$$

この2式より,

$$AH = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{e})^2}$$

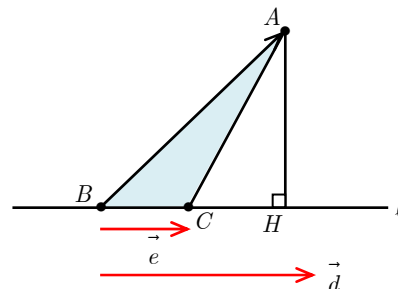
こちらの方が, まなぶは納得するでしょう.

では, 公式を用いて次の問題を解いてみましょう.

空間の3点を,

$$A(1, 2, 3), B(3, 3, 1), C(0, -3, 4)$$

とする. 点 A から直線 BC に下ろした垂線 AH を表すベクトルとその大きさを求めよ.



解) 直線の方向ベクトル \vec{d} を,

$$\vec{d} = \overrightarrow{BC} = (-3, -6, 3) = 3(-1, -2, 1)$$

とします.

$$|\vec{d}| = 3\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3\sqrt{6}$$

よって, 直線の単位方向ベクトルは,

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -2, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 1, -2) \text{ より, } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2 - 2 - 2) = -\sqrt{6}$$

$$\therefore \overrightarrow{AH} = (2, 1, -2) + \sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -2, 1) = (1, -1, -1)$$

$$\text{これから, } |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

このように、垂線ベクトルを求めていけば、垂線AHは点と直線の距離の公式を用いる必要はありません。

さらに垂線ベクトルもまた、 \overrightarrow{BA} の \vec{e} への正射影ベクトル \overrightarrow{BH} を求めれば

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}$$

で得られます。

また垂線AHは、正射影ベクトル \overrightarrow{BH} の大きさBHから三角形ABHに三平方の定理を用いても求めることもできます。

結局、 \overrightarrow{BA} の方向ベクトル \vec{d} への正射影ベクトル \overrightarrow{BH} さえ求めるだけで十分であるといえるのです。

参考として、この問題の一般的解法を示しましょう。

解2) 以下の証明では、列ベクトルで示します。

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ より, 直線BCの方向ベクトルを, } \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とします. これから,}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + t\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって、

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = (2-t)^2 + (1-2t)^2 + (-2+t)^2 = 6t^2 - 12t + 9 = 6(t-1)^2 + 3$$

点Hは $|\overrightarrow{AP}|$ が最小となるときの点Pより、

$$t=1 \text{ のとき, } |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{3}$$

また、このとき、

$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

解3)

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + t\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

点Hは、 $\overrightarrow{AP} \perp \vec{d}$ となるときの点Pである。

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{d} = 0 \text{ より,}$$

$$(-2 - 2 - 2) + (1 + 4 + 1)t = 0 \quad \therefore t = 1$$

これから、 \overrightarrow{AH} とその大きさが求められる。

このように、空間で点から直線に下ろした垂線ベクトルや大きさは公式化するほど価値があるものではなく、もったいないとはいえないでしょう。知ってか知らずか、まなぶが質問しなかったのは「意味ないよね」と自分に返ってくる評価を本気で忌避したのかもしれませんが。

でも必要ないというのは、正射影ベクトルで垂線が求められるから言えることです。正射影ベクトルは思考法を広げる概念であり、とても重要なのです。そこで「垂線ベクトルの小手技」の姉妹編として「正射影ベクトルの小手技」を執筆しました。こちらもよろしければご覧ください。4人の生徒が月影という正射影を探して八面六臂の活躍をみせます。