

トレミーを散りばめる

札幌旭丘高校 中村文則

〇はじめに

円に内接する四角形において、2組の対辺の積の和は対角線の積に等しい。

これをトレミーの定理という。

トレミー(Ptolemy: 85-165)はヘレニズム後期に活躍したアレキサンドリアの天文学者である。彼のラテン語での呼び名はプトレマイオス(Ptolemaios)であり、天動説を唱え体系化した学者として知られている。著書 *Almagest*(天文学大全:原語は「もっとも偉大なるもの」の意)は古典天文学の聖典とも言われており、その中には 60 進法の記載がみられ、この記法から緯度、経度を導入し、月や遊星といった天文の運行の研究をして、天動説を揺るぎのないものとした。

彼にとって幾何学は天文学のための一道具に過ぎなかったが、日時計を作るために立体の射影を研究したため、画法幾何学の開祖といわれたり、星の運行の計測をするために三角法概念の基礎を築いている。

なお、トレミーの定理はヒッパルコス(Hipparchus:B.C190-125)が既に証明していたともいわれる。ヒッパルコスはヘレニズムの天文学を科学的に分析した最初の人物で「三角法の父」といわれているが、その著書は残されてはいない。しかし、トレミーの *Almagest* の中にはヒッパルコスの研究が随所に語られ、その偉業を伺うことができるのである。トレミーの定理もその中のひとつとみなすことができる。

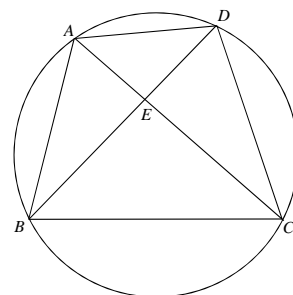
さて、ヘレニズム文化にあって、幾何の発展にトレミーの定理はどのように関わってきたのであろうか。ここでは、トレミーの定理が引き継いだもの、そして引き継がれたものについて少し考えてみよう。

〇トレミーの定理の証明

トレミーの定理を具体的に記述すると、次のようになる。

円に内接する四角形を $ABCD$ とすると、

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$
 である。



定理の証明を幾つかの方法で試みる。

【初等幾何による証明】

証明)

$\angle BAC > \angle CAD$ とする。

$\angle BAF = \angle CAD$ となる点 F を線分 BD 上にとる。

このとき、三角形 BAF と三角形 CAD において、

$$\angle BAF = \angle CAD$$

$$\angle ABF = \angle ACD \quad (\text{弦 } AD \text{ の円周角})$$

より、2角が等しいから、 $\triangle ABF \sim \triangle ACD$ である。

$$\text{ゆえに } \frac{AB}{BF} = \frac{AC}{CD} \text{ より、 } AB \cdot CD = AC \cdot BF \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

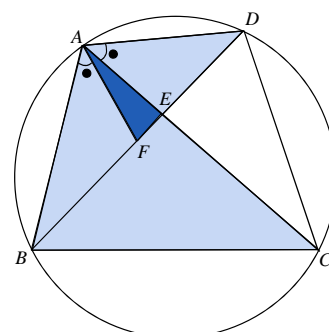
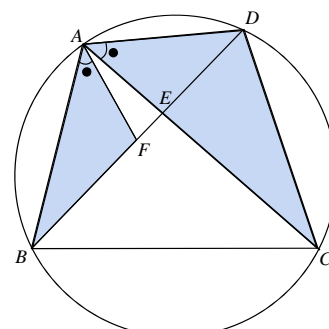
また、三角形 AFD と三角形 ABC において、

$$\angle FAD = \angle FAE + \angle EAD = \angle FAC + \angle BAF = \angle BAC$$

$$\angle ADF = \angle ADB = \angle ACB \quad (\text{弦 } AB \text{ の円周角})$$

より、2角が等しいから、 $\triangle AFD \sim \triangle ABC$

$$\text{ゆえに } \frac{AD}{DF} = \frac{AC}{BC} \text{ より、 } AD \cdot BC = AC \cdot DF \quad \dots\dots \textcircled{2}$$



①と②を辺々加えて,

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC(BF + DF) = AC \cdot BD$$

Q.E.D

幾何では図形に張り巡らされた見えぬ糸が1本の補助線によりすべて繋がり, その解法が編み上げられていく. この証明もその補助線に妙がある. 相似な三角形を作ることで, 比例問題として定理は編み上がるのである. そして, この補助線の引き方(発想)は, 必ずしも円に内接しない一般の四角形においても極めて自然な流れとして拡張されていく.

四角形 $ABCD$ に対して,
 $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$
 が成立する.

証明)

$\angle BAC > \angle CAD$ とする.

点 F を $\angle BAF = \angle CAD, \angle ABF = \angle ACD$ となるようにとると,

三角形 $\triangle ABF \sim \triangle ACD$ である.

ゆえに $\frac{AB}{BF} = \frac{AC}{CD}$ より, $AB \cdot CD = BF \cdot AC \dots\dots ①$

次に, 三角形 $\triangle AFD$ と三角形 $\triangle ABC$ において,

$$\angle FAD = \angle FAC + \angle CAD = \angle FAC + \angle BAF = \angle BAC$$

ここで, $\triangle ABF \sim \triangle ACD$ であるから,

$$\frac{BA}{AC} = \frac{AF}{AD} \text{ より, } \triangle ABC \sim \triangle AFD \text{ である.}$$

ゆえに $\frac{AD}{FD} = \frac{AC}{BC}$ より, $AD \cdot BC = AC \cdot FD \dots\dots ②$

①と②を辺々加えて,

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC(BF + FD) \geq AC \cdot BD$$

ここで, $BF + FD \geq BD$ において等号が成立するのは, F が辺 BD 上の点のときである.
 すなわち, $\angle ABF = \angle ACD$ のとき, 四角形は円に内接する.

Q.E.D

なお, 一般化されたトレミーの定理はオイラーの定理ともいわれる.

ところで, 証明の等号成立では, 四角形が円に内接するための必要十分条件として, 円周角が等しいことを利用している. しかし, 円の内接条件は,

内対角の和が 180° (補角)

とみることもできる. 等号条件からこのことを導き出してみよう.

$$\triangle ABF \sim \triangle ACD \text{ より, } \angle ADC = \angle BFA$$

$$\triangle ABC \sim \triangle AFD \text{ より, } \angle ABC = \angle AFD$$

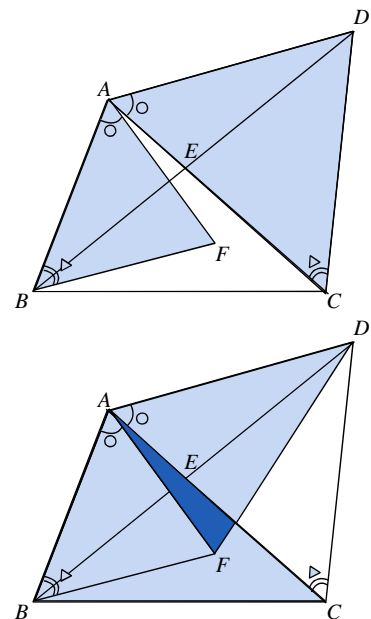
$$\text{よって, } \angle BFD = \angle BFA + \angle AFD = \angle ADC + \angle ABC$$

これから, $\angle BFD = 180^\circ$, すなわち $\angle ABC$ と $\angle ADC$ が補角の関係であるとき, 四角形は円に内接する.

また, ここで, $\angle BFD = \theta$ とおくと, $\triangle BFD$ において余弦定理より,

$$BD^2 = BF^2 + DF^2 - 2BF \cdot DF \cos \theta \dots\dots ③$$

③の両辺に AC^2 を乗じて, ①, ②を代入すると,



$$AC^2 \cdot BD^2 = AC^2 \cdot BF^2 + AC^2 \cdot DF^2 - 2AC \cdot BF \cdot AC \cdot DF \cos \theta$$

$$= AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 - 2AB \cdot CD \cdot AD \cdot BC \cos \theta$$

以上より,

四角形 $ABCD$ において,
 $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = p, BD = q$
 $\angle ABC + \angle ADC = \theta$
 とおくと,

$$pq = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd \cos \theta}$$

ここで, 内対角の和 $\theta = 180^\circ$ であることより,

$$\cos \theta = -1$$

よって,

$$pq = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd} = ac + bd$$

トレミーの定理となる.

オイラーの定理はトレミーの定理の逆, すなわち, トレミーの定理が成立するとき, 四角形は円に内接することを表してもいる. これから, トレミーの定理は, 四角形が円に内接するための必要十分条件となる. (方べきの定理も同様に必要十分条件である).

知的発想の遺産である補助線の幾何(ユークリッド幾何)は, 解析幾何が参入するにいたり, 歴史に埋没し, 補助線は雲散霧消することになる. その解析幾何の一手法である複素数平面に図形をおくことで, 次に, オイラーの定理を証明してみよう.

【複素数による証明】

証明)

四角形 $ABCD$ の対角線の交点 O を原点とし,

$$A(\alpha), B(\beta), C(\gamma), D(\delta)$$

と座標を与える.

ここで, 4点 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に対して,

$$\begin{aligned} &(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma) \\ &= (\alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\gamma + \beta\delta) + (\alpha\beta - \alpha\gamma - \delta\beta + \delta\gamma) \\ &= \alpha(\beta - \delta) - \gamma(\beta - \delta) \\ &= (\alpha - \gamma)(\beta - \delta) \end{aligned}$$

なる関係が成立する. これを利用して,

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + AD \cdot BC &= |\alpha - \beta||\gamma - \delta| + |\alpha - \delta||\beta - \gamma| \\ &\geq |(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma)| \\ &= |(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)| \\ &= AC \cdot BD \end{aligned}$$

等号成立は,

$$|(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)| + |(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)| = |(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)|$$

のときであるが,

$$z_1 = (\alpha - \beta)(\gamma - \delta), z_2 = (\alpha - \delta)(\beta - \gamma)$$

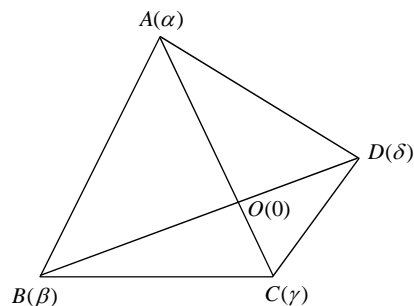
とおくと,

$$z_1 + z_2 = (\alpha - \gamma)(\beta - \delta)$$

であるから,

$$|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$$

これから, 3点 $0, z_1, z_2$ はこの順に一直線上にあるとしてよい.



よって, $\frac{z_1}{z_2} > 0$ である.

すなわち, $\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)} > 0$ より, $\frac{\beta - \alpha}{\delta - \alpha} \cdot \frac{\delta - \gamma}{\beta - \gamma} < 0$

ゆえに $\arg \frac{\beta - \alpha}{\delta - \alpha} + \arg \frac{\delta - \gamma}{\beta - \gamma} = (2n + 1) \times 180^\circ$

以上より, $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ のときに, 等号は成立する.

Q.E.D

オイラー(Euler:1707-1783)は「人が息をするように、鷲が空を舞うように、計算をした」と言われる。それほどまでに、複素数による幾何の解法は、発想を根こそぎ引き抜いていったのである。そして、トレミーの定理は、オイラーの定理により何事もなかったかのように吸収されてしまう。

「トレミーとオイラーとの間の一千年が一呼吸の間に短縮されているのはおもしろい」

高木貞治先生はこう述べているがなんとも意味深な言葉であろう。

次に、発想的(等幾何的), 機械的(解析幾何)の両者の手法を加味してトレミーの定理の証明を考えてみよう。

【反転による証明】

半径 r , 中心 O の円内の点 P に対して, 点 OP の延長上に点 Q を

$$OP \cdot OQ = r^2$$

を満たすようにとるとき, 点 Q を点 P の反転という。

反転は, 鏡像変換とも呼ばれる。点 O を反転の中心, r を反転の半径という。

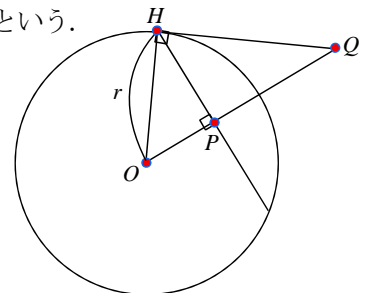
点 P を通り, OP に垂直な直線と円との交点1つを H とするとき, 点 H における接線と直線 OP との交点が点 P の反転 Q である。

このことは, $\triangle OPH \sim \triangle OHQ$ であるから,

$$OP : OH = OH : OQ$$

より導かれる。

この反転を利用して証明を試みる。



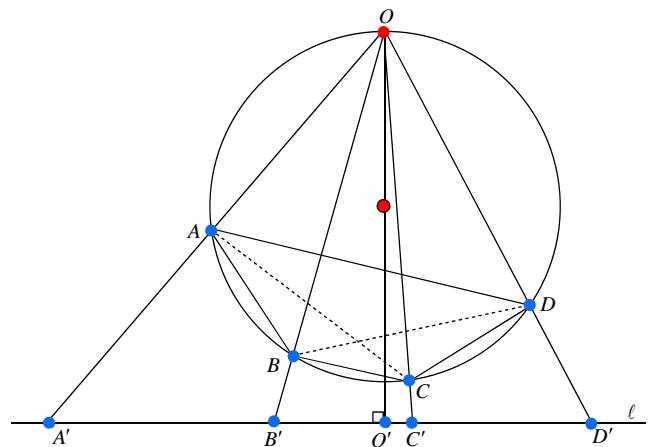
証明)

反転の中心 O を, 四角形 $ABCD$ の外接円の周上にとり, 反転の半径を r とする。

4点 A, B, C, D を反転させた点を A', B', C', D' とすると, 4点 A, B, C, D はすべて同一円周上の点で, 反転の中心もこの円周上の点である。円々対応の性質により, 外接円は直線に変換され, 4点 A', B', C', D' は, この順に一直線上に並ぶ。

ここで, 直線上の適当な点を原点とし, 原点から, 4点 A', B', C', D' までの距離を, a, b, c, d とすると,

$$\begin{aligned} & A'B' \cdot C'D' + A'D' \cdot B'C' \\ &= (b - a)(d - c) + (d - a)(c - b) \\ &= bd - bc - ad + ac + cd - bd - ac + ab \\ &= ab + cd - bc - ad \\ &= a(b - d) - c(b - d) \\ &= (a - c)(b - d) \\ &= A'C' \cdot B'D' \end{aligned}$$



$$\therefore A'B' \cdot C'D' + A'D' \cdot B'C' = A'C' \cdot B'D' \quad \dots\dots(*)$$

次に、反転の性質より、

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$$

この式から方べきの定理の逆を考えると、4点A,A',B,B'は同一円周上の点(共円)であることが分かる。

よって、 $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$ より、 $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{r^2}{OA \cdot OB}$

$$\therefore A'B' = \frac{AB}{OA \cdot OB} r^2$$

同様に考えて、

$$B'C' = \frac{BC}{OB \cdot OC} r^2, C'D' = \frac{CD}{OC \cdot OD} r^2, A'D' = \frac{AD}{OA \cdot OD} r^2,$$

$$A'C' = \frac{AD}{OA \cdot OC} r^2, B'D' = \frac{BD}{OB \cdot OD} r^2$$

これを(*)に代入して、

$$\frac{AB}{OA \cdot OB} \cdot \frac{CD}{OC \cdot OD} + \frac{BC}{OB \cdot OC} \cdot \frac{AD}{OA \cdot OD} = \frac{AC}{OA \cdot OC} \cdot \frac{BD}{OB \cdot OD}$$

両辺に $OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD$ をかけて、

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

Q.E.D

この証明から、トレミーの定理は、反転された4点が同一直線上に並んでいれはよいことが分かる。
(*)の式もオイラーの定理という。

○トレミーが継いだもの …… 三平方の定理

ピュタゴラス(Pythagoras:B.C570-501)がパルテノン神殿の敷石を眺めてピュタゴラスの定理を発見したのは、トレミーの定理から遡ること、600年以上前のことである。

ピュタゴラスの定理は、「万物は数」と唱えた教団の思想そのものであるが、数を粒子とみなす原理の真偽を追求する過程により、当時は死者もでたといわれる。教団は「アロゴン」～秘密にせよ～、といい、外部に無理数の存在が漏れることを恐れた。

このように、宗教色の強い古代ギリシアの幾何は、やがてアレキサンドリアで、体系化された科学的数学にとって変わるが、その中で生まれたのがトレミーの定理である。そして、このトレミーの定理は、意図したかどうかは分からぬが、ピュタゴラスの定理を含むものになっている。

直角三角形ABCの外接円を考える。

直角三角形の斜辺 $AB = c$ は直径であり、他の2辺 $BC = a, CA = b$ で作られる長方形の対角線を表している。

そこで、この長方形にトレミーの定理を使うと、

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ピュタゴラスの定理が現れるのである。

さらに、ピュタゴラスの定理のひとつの拡張として、三角比の余弦定理があるが、トレミーはこの定理をも含む。

三角形ABCの外接円を考え、ACを底辺とする等脚台形ADBCを円に内接させる。AC > BDとしよう。

$$AB = c, BC = a, CA = b, \angle BCA = \theta$$

とすると、

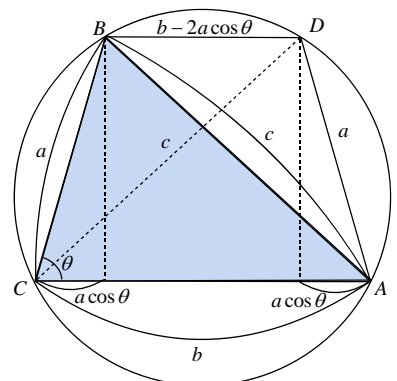
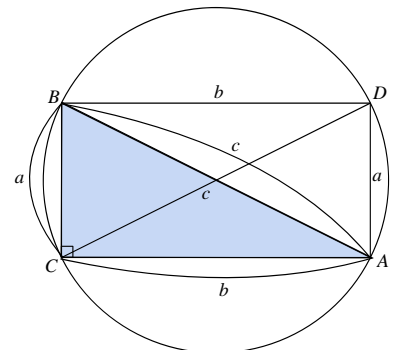
$$AD = BC = a, CD = AB = c$$

である。また、

$$BD = AC - 2BC \cos \theta = b - 2a \cos \theta$$

よって、トレミーの定理を利用して、

$$a^2 + b(b - 2a \cos \theta) = c^2$$



これから、 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$
 を得る。また、 $AC < BD$ のときは、鈍角に関する余弦定理となる。

○トレミーを継いだもの …… 加法定理

トレミーは、半径 60 の円の中心角に対応する弦の長さ(すなわち正弦の値)を求め正弦の表をつくるために、トレミーの定理を利用したが、加法定理もトレミーの定理から導いていたといわれている。次にそのことを示そう。

四角形 $ABCD$ の対角線 AC がその外接円の直径であるとき、正弦の加法定理を導くことができる。以下、直径の長さを 1 として考える。

$\triangle ACD, \triangle ACB$ は、直径 AC を斜辺とする直角三角形であるから、

$$\angle DAC = \alpha, \angle CAB = \beta$$

とすると、

$$AD = \cos \alpha, CD = \sin \alpha$$

$$AB = \cos \beta, BC = \sin \beta$$

また、弦 BD の円周角は $\alpha + \beta$ であるから、

$$BD = \sin(\alpha + \beta)$$

よって、トレミーの定理より、

$$\cos \beta \sin \alpha = \sin \beta \cos \alpha = 1 \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

すなわち、

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

を得る。

次に、 AB が直径であるように、四角形 $ABCD$ を内接させる。

AB は直角三角形 ABC, ABD の斜辺であるから、

$$\angle DAB = \alpha, \angle CAB = \beta \quad (\alpha > \beta)$$

とすると、

$$BD = \sin \alpha, AD = \cos \alpha$$

$$BC = \sin \beta, AC = \cos \beta$$

また、 BD の円周角は $\alpha - \beta$ より、

$$BD = \sin(\alpha - \beta)$$

よって、トレミーの定理より、

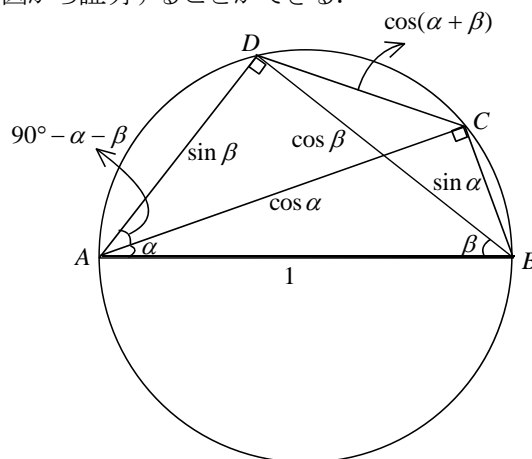
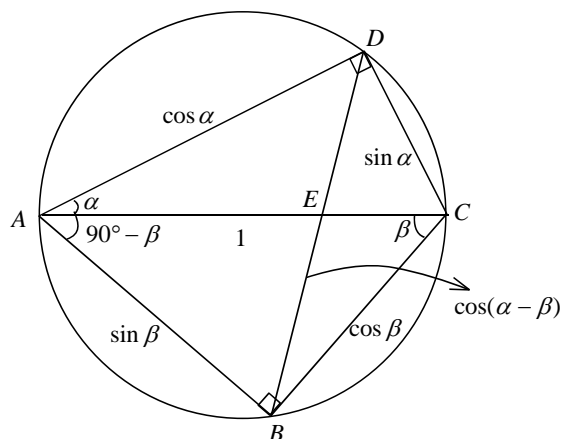
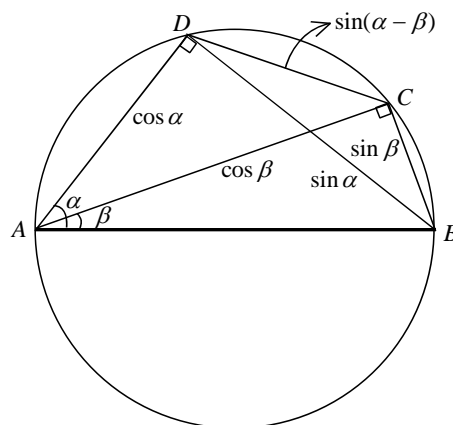
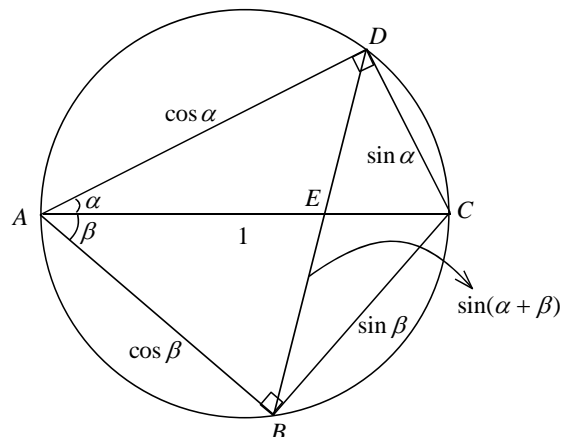
$$1 \cdot \sin(\alpha - \beta) + \cos \alpha \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta$$

これから、正弦の減法定理

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

が得られる。

同様に、余弦に関するも、加法・減法定理は、直径 1 である円に内接する四角形の辺または対角線が円の直径なるようにすると、トレミーの定理により、次の図から証明することができる。



ただし、これらの場合の加法定理はもちろん、鋭角において成立するものであるが、一般角での拡張はそれほど難しいことではない。

例えば $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ であれば、 $\alpha = \alpha' + \frac{\pi}{2}$ ($0 < \alpha' < \frac{\pi}{2}$) とすると、

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\left(\alpha' + \beta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos(\alpha' + \beta) \\ &= \cos \alpha' \cos \beta - \sin \alpha' \sin \beta \\ &= \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cos \beta - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

同様にして、拡張していけばよい。

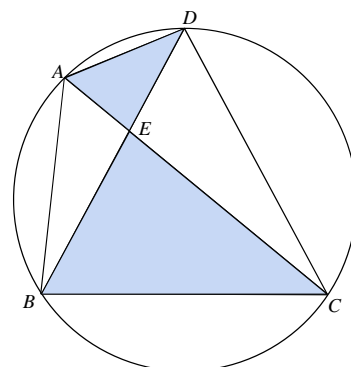
○トレミー定理とその周辺

トレミーの定理は、円に内接する四角形の他の性質を利用することで、種々な要素を引き出すことが可能となってくる。

まず、その代表的な性質として知られるのは、円内の点における方べきの定理であろう。

性質 A)

円に内接する四角形 $ABCD$ の対角線の交点を E とすると
 $AE \cdot EC = BE \cdot ED$
 である。



この証明は、 $\triangle AED \sim \triangle BEC$ であることより、

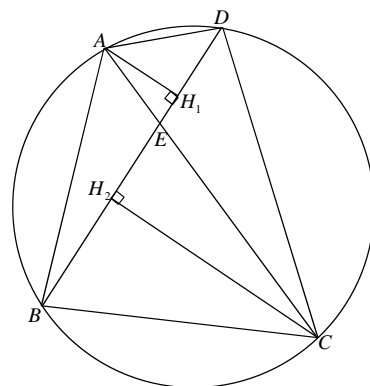
$$AE : BE = DE : CE$$

からすぐに導かれる。

また、 $\triangle ABD$ と $\triangle CDB$ の面積を比較することにより、

性質 B)

円に内接する四角形 $ABCD$ の対角線の交点を E とすると
 $AB \cdot AD : CB \cdot CD = AE : EC$
 $BA \cdot BC : DA \cdot DC = BE : ED$
 である。



証明)

頂点 A, C から対角線 BD に下ろした垂線の足をそれぞれ H_1, H_2 とする。

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} BD \cdot AH_1, \triangle CBD = \frac{1}{2} BD \cdot CH_2 \text{ より、}$$

$$\triangle ABD : \triangle CBD = AH_1 : CH_2$$

また、 $\angle BAD = \theta$ とおくと、 $\angle BCD = 180^\circ - \theta$ であるから、

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \theta, \triangle CBD = \frac{1}{2} CB \cdot CD \sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2} CB \cdot CD \sin \theta$$

$$\therefore \triangle ABD : \triangle CBD = AB \cdot AD : CB \cdot CD$$

$$\text{よって、} AB \cdot AD : CB \cdot CD = AH_1 : CH_2$$

ここで、 $\triangle AEH_1 \sim \triangle CEH_2$ であるから、

$$AE : EC = AH_1 : CH_2$$

以上より、 $AB \cdot AD : CB \cdot CD = AE : EC$

$BA \cdot BC : DA \cdot DC = BE : ED$ についても同様である。

Q.E.D

さらに、性質 B を変形すると、

性質 C)

円に内接する四角形 $ABCD$ の対角線の交点を E とすると
 $(AB \cdot AD + CB \cdot CD) : (BA \cdot BC + DA \cdot DC) = AC : BD$
である。

証明) $AB \cdot AD : CB \cdot CD = AE : EC$ であるから、
 $(AB \cdot AD + CB \cdot CD) : CB \cdot CD = (AE + EC) : EC$
 $= AC : EC$

$$\text{よって、 } AB \cdot AD + CB \cdot CD = \frac{CA \cdot CB \cdot CD}{CE} \quad \dots \textcircled{1}$$

同様に、

$$(BA \cdot BC + DA \cdot DC) : DA \cdot DC = BD : ED \quad \text{より、}$$

$$BA \cdot BC + DA \cdot DC = \frac{DA \cdot DB \cdot DC}{ED} \quad \dots \textcircled{2}$$

①÷②より、

$$\frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC} = \frac{ED}{CE} \cdot \frac{CB}{DA} \cdot \frac{AC}{BD}$$

ここで、 $\triangle EDA \sim \triangle ECB$ であるから、

$$CE : ED = BC : AD$$

$$\text{よって、 } \frac{ED}{CE} \cdot \frac{CB}{AD} = 1$$

$$\therefore \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC} = \frac{AC}{BD}$$

以上より、

$$(AB \cdot AD + CB \cdot CD) : (BA \cdot BC + DA \cdot DC) = AC : BD$$

Q.E.D

なお、この性質は、四角形の面積 S を比較をすることで、たちどころに得られる。

$$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = p, BD = q$$

とする。

$$S = \triangle ABC + \triangle CDA = \frac{abp}{4R} + \frac{cdp}{4R} = \frac{(ab + cd)p}{4R}$$

$$\text{一方、 } S = \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{adq}{4R} + \frac{bcq}{4R} = \frac{(ad + bc)q}{4R}$$

この2式より、

$$ad + bc : ab + cd = p : q$$

さて、この性質とトレミーの定理を使うと、円に内接する四角形の4辺の長さが与えられたとき、対角線の長さを求めることができる。

性質 D)

円に内接する四角形 $ABCD$ において、

$$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = p, BD = q$$

とすると、

$$p = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}, q = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}$$

である。

証明)

性質 C より,

$$p = k(ad + bc), q = k(ab + cd) \quad \dots\dots(*)$$

とおける. トレミーの定理より,

$$ac + bd = pq$$

であるから, (*)を代入して,

$$ac + bd = pq = k^2(ad + bc)(ab + cd)$$

$$\therefore k = \sqrt{\frac{ac + bd}{(ad + bc)(ab + cd)}}$$

(*)に代入して,

$$p = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}, q = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}$$

Q.E.D

この値は, 余弦定理を $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ にそれぞれ使って対角線 AC を表すことで求められるが, 性質 C を利用した方が, 簡単であり, 2つの対角線がいつぺんに求められる.

さらに, 対角線の交点 E を AC 上の点とみると,

$$AE = \frac{ad}{ad + bc} AC = \frac{ad}{ad + bc} k(ad + bc) = kad$$

$$CE = \frac{bc}{ad + bc} AC = \frac{bc}{ad + bc} k(ad + bc) = kbc$$

同様に, 交点 E を BD 上の点とみて,

$$BE = \frac{ab}{ab + cd} BD = \frac{ab}{ab + cd} k(ab + cd) = kab$$

$$DE = \frac{cd}{ab + cd} BD = \frac{cd}{ab + cd} k(ab + cd) = kcd$$

以上より,

性質 E)

円に内接する四角形 $ABCD$ の対角線の交点を E とし,

$$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$$

とすると,

$$EA : EB : EC : ED = da : ab : bc : cd$$

である.

次に, 四角形 $ABCD$ の外接円の半径 R を求めてみよう.

性質 F)

円に内接する四角形 $ABCD$ において,

$$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$$

とすると, 円の半径 R は,

$$R = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)}}$$

である.

証明) 四角形 $ABCD$ の面積を S , $AC = p$ とすると,

$$S = \Delta ABC + \Delta CDA = \frac{abp}{4R} + \frac{cdp}{4R} = \frac{(ab+cd)p}{4R}$$

性質 C より,

$$R = \frac{(ab+cd)}{4S} \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}} = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}}{4S}$$

ここで, 円に内接する四角形の面積 S は,

$$S = \frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{4} \quad (\text{ブラマグプタの定理})$$

であるから, 結論を得る.

Q.E.D

最後に, トレミーの定理より得られる美しい図形の性質を紹介しよう.

正五角形 $ABCDE$ において, 外接円の弧 AB 上に任意の点 P をとると,
 $PA + PB + PD = PC + PE$
 が成立する.

証明)

正五角形の辺, 対角線の長さをそれぞれ a, p とする.

四角形 $ABCD$ にトレミーの定理を使うと,

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

$$\therefore a^2 + ap = p^2$$

$$\text{これから, } \frac{a+p}{p} = \frac{p}{a} \quad \dots\dots(*)$$

四角形 $APBD$ にトレミーの定理を使って,

$$AP \cdot BD + PB \cdot DA = AB \cdot PD$$

$$pAP + pBP = aDP \quad \text{より,}$$

$$PA + PB = \frac{a}{p} PD$$

これから,

$$PA + PB + PD = \frac{a+p}{p} PD = \frac{p}{a} PD \quad \dots\dots①$$

四角形 $PCDE$ にトレミーの定理を使って,

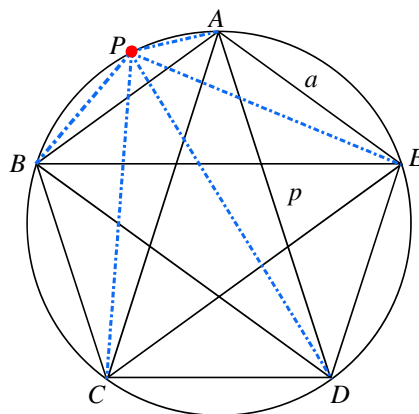
$$PC \cdot DE + CD \cdot PE = CE \cdot DP$$

$$aPC + aPE = pPD \quad \text{より,}$$

$$PC + PE = \frac{p}{a} PD \quad \dots\dots②$$

$$\text{①, ②より, } PA + PB + PD = PC + PE$$

Q.E.D



天文学の研究に生涯を捧げたトレミーは, プトレマイオス体系という宇宙観を確立する. 静止した地球を中心に, 天空の星々がその周りをまわっているという天動説である. 彼の理論は 16 世紀にコペルニクスによって地動説が唱えられるまで, 天空のみならずヨーロッパの思想, 倫理観をも支配し続けるのである.

ところで彼が見つけた古代星座は, 48 個におよび, 「プトレマイオスの 48 星座」と呼ばれ, 47 の星座はいまでも夜空にあって私たちを楽しませてくれる.

最後に示したトレミーの定理の性質には, ピュタゴラス学派が紋章とした五芒星形(ペンタグラム)が見え隠れしている. その中において, 円周上の点 P はまるで彼が名づけた星座のようである. トレミーが求め続けた星座の煌きがこの図には散りばめられているのではないだろうか.