ベクトルの小手技(3題)で考えたかったこと

（問）$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=3$，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=4$ のとき，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ の大きさを求めよ．

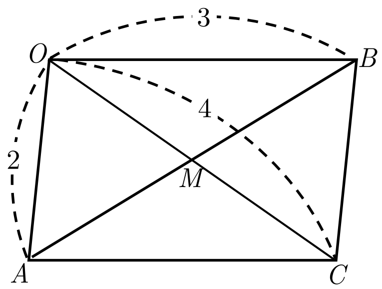
ベクトルで本問題を解くには次のように進めます．

まず，平面上では斜交座標を構成する両軸の目盛り($\vec{a}$ 及び $\vec{b}$ の大きさ)と，両軸のなす角度を示す内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=4$ を用いて求めます．以降は，ひたすら計算すればいいのです(Automatic calculation)．

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3}{2}$　より，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2^2+3^2-2\cdot\dfrac{3}{2}=10$　　$\therefore$　$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{10}$

でも，上述の問題を，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$　とすると，問題は次のように書き換えることができます．

平行四辺形 OACB において，$OA=2$，$OB=3$，$OC=4$　とするとき，対角線 AB の長さを求めよ．



例えば三角比のツールを用いれば，三角形 OAC に余弦定理を用いて，$\angle OAC$ の余弦を求めると，補角の関係より $\angle AOB$ の余弦の値が得られます．そして三角形 OAB に余弦定理を用いて AB の長さを求めます．

平面幾何のツールを用いるともっと簡単です．

平行四辺形の対角線の交点を M とすると，三角形 OAB において中線定理より，

$$OA^2+OB^2=2(OM^2+AM^2)$$

よって，$2^2+3^2=2(2^2+AM^2)$ より，$AM=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　$\therefore$　$AB=2AM=\sqrt{10}$

三角比や平面幾何ではどの公式や定理を用いるかを与えられている図形の要素から推測しなければなりません．そこに発想とか論理性が求められることになります．それに比べてベクトルでの解法は図形的な意味はそれほど必要があるわけではなく，基底さえ決めてしまえば思考的考察は省かれます．結果，単純計算に特化してしまうのです．これは面倒な思考から解放される(thinking-free)とも言えるかもしれません．もちろん，それはベクトルでの解法を否定するものではなく，ベクトルはそのようなツールなのであり，思考考察の部分はもっと大事な場面ですればいいということなのです．

ただ問題なのは，教科書でベクトルを履修するときに自分はいまどのような問題を解こうとしていて，それがベクトルによってどのように思考解放されているか知ろうとする機会はあまりに少ないのです．上述の問題はベクトルの単純計算の例として挙げられ，ベクトルの知識や概念を積み上げていっても最後まで単純計算の例として終わっていないでしょうか．

教科書ではベクトルの定義にフィルターがかかっているのがその理由かも知れません．

「内積の図形的な意味はなに？」,「なぜ一次独立であることは確認する必要があるの？」

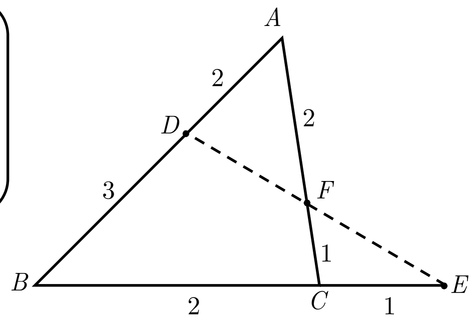
こう問われても，即答できる生徒は少ないはずです．よく分からないけど，ガチガチ計算していたら最後には求められる，苦労した実感はあるけど，満たされた実感はないのです．教科書に沿って学習を展開すると時間的な制約もあってベクトルを意味づけることは難しいかもしれません．でも，例えばベクトルの始点を変えるだけで，自動計算は効率化できます．そこに意味を問うことはできます．内包量としての積はどう扱えばいいか，そこをちょっと触れるだけで図形的なアプローチが生まれてきます．

思考を解放する(thinking-free)のではなく，自由に思考する(free-thinking)ことでベクトルを柔らかく捉えてみてはどうでしょうか．

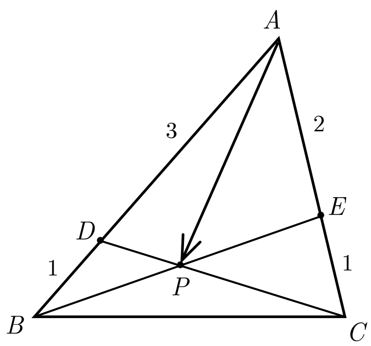
ベクトルの始点と視点の小手技

ベクトル計算は，オートマチックカリキュレートの傾向があります．
でも始点を変えて眺めることで思考的な考察ができるようになるのです．
さらに，視点や支点を工夫するとベクトルの面白味を引き出すこともできます．
応用として，スチュワートの定理，オイラー線，チャップルの定理を扱っています．

問題 1）三角形 ABC において，辺 AB を $2:3$ に内分する点を D，辺 BC を $3:1$ に外分する点を E，辺 CA を $1:2$ に内分する点を F とするとき，3 点 D，E，F は一直線上にあることを証明せよ．



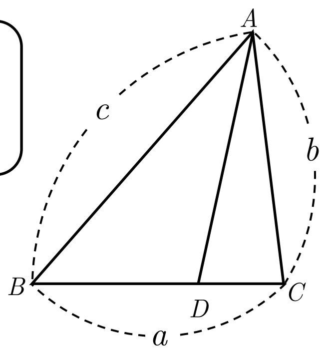
問題 2）三角形 ABC において，辺 AB を $3:1$ に内分する点を D とし，辺 AC を $2:1$ に内分する点を E とする．
線分 DC と線分 BE の交点を P とする．
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ として，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．



スチュワートの定理（*Stewart*）

三角形 ABC において，辺 BC 上の点を D とすると，次の式が成り立つ．

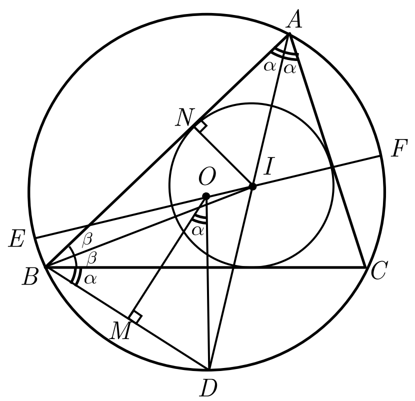
$$DB\cdot b^2+DC\cdot c^2=a(\mathrm{DA}^2+DB\cdot DC)$$



オイラー・チャップルの定理（*Euler-Chapple*）

三角形 ABC の外接円の半径を R，内接円の半径を r とする．
このとき，外心 O と内心 I の距離 OI は，次により与えられる．

$$OI^2=R^2-2Rr$$



垂線ベクトルの小手技

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$$

この一見するとスカラー量の絶対値の性質と同じ式は，ベクトルではシュワルツの不等式において，
等号成立である２つのベクトルの平行条件を表しています．これを利用して垂線ベクトル(造語)を考え
平面上での点と直線の距離，空間内での点と平面の距離をヘッセの標準形により導くことができます．
さらに点が平面によって分けられる空間の正領域，負領域にあるための条件を示し，空間に図形を
レイアウトしてみましょう．

平面上で，点Ａから直線 ℓ に下ろした垂線と直線 ℓ との交点をＨとすると，$\left|\overrightarrow{HA}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{HA}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$ …①

点 $A(x_1, y_1)$ とし，直線 $\ell : ax+by+c=0$ の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,b)$ とすると，$\left|\overrightarrow{HA}\right| = \dfrac{\left|ax_1+by_1+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ …②

すなわち①は平面上の点と直線の距離を表しています．本文ではこれを「もったいない式」と表現しています．$\overrightarrow{HA}$ が分かれば２点間の距離の公式から点と直線の距離は求められるからです．

ベクトルの平行条件は，$\overrightarrow{HA} = k\vec{n}$ でも与えられますが，この式を変形することで，$\overrightarrow{HA} = \dfrac{\overrightarrow{HA}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|^2}\vec{n}$ …③

③を垂線ベクトル(造語)と命名しました．ここで，$f(x,y)=ax+by+c$ とすると，点 $A(x_1,y_1)$ から直線 $f(x,y)=0$ に下ろした垂線ベクトルは，$\overrightarrow{HA} = \dfrac{f(x_1,y_1)}{\left|\vec{n}\right|^2}\vec{n}$ …④　で与えられます．

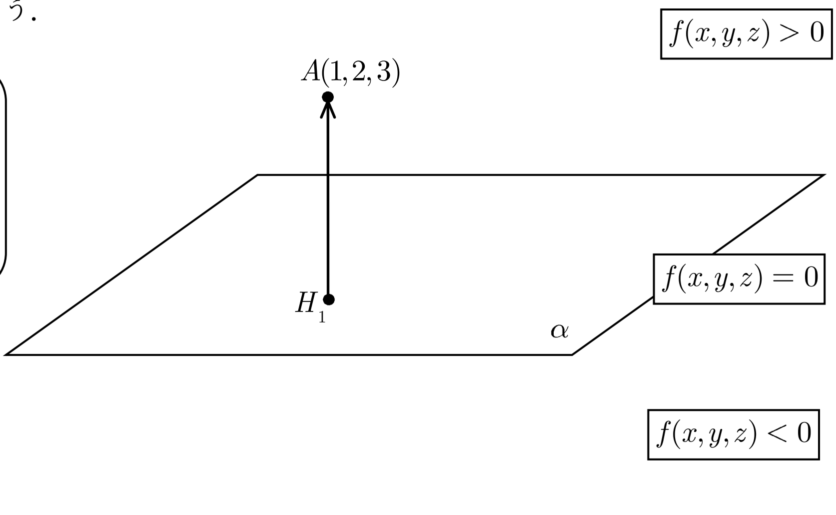
これを空間に拡張することで，点 $A(x_1,y_1,z_1)$ から平面 $\alpha : f(x,y,z)=ax+by+cz+d=0$ に下ろした垂線ベクトルは，平面 α の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,b,c)$ とすると，$\overrightarrow{HA} = \dfrac{f(x_1,y_1,z_1)}{\left|\vec{n}\right|^2}\vec{n}$ …⑤　となります．この式から，

$f(x_1,y_1,z_1)>0$ （正領域)のときは，$\overrightarrow{HA}$ と $\vec{n}$ は同じ向き

$f(x_1,y_1,z_1)<0$ （負領域)のときは，$\overrightarrow{HA}$ と $\vec{n}$ は逆の向き

であることが分かるのです．以上のことから，次の問題の平面，点，ベクトルを空間内にレイアウトし，
そのイメージを用いて問題を解いてみましょう．

空間に２点 $A(1,2,3)$，$B(-1,-1,2)$ と
平面 $\alpha : x-y+2z=2$ がある．
このとき，$AP+BP$ が最小となる
平面 α 上の点Ｐの座標を求めよ．



<まなぶが失念した疑問>
空間内では点と直線の距離，
および垂線ベクトルはどう
なるのでしょうか

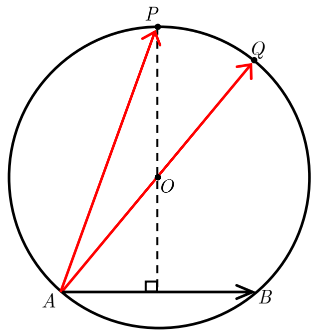
正射影ベクトルの小手技

教科書では内積(dot-product)は図形的な意味から定義されているわけではなく，余弦定理のベクトル表現とか，垂直条件などに読み替えられてしまいます．これを正射影ベクトルで考えると内積の見方はずいぶん変わり，ベクトルの概念が豊かになるのです．

　例として，三角形の五心の位置ベクトルを正射影ベクトルを利用することで統一した解法にしてみましょう．また，空間の異なる３点により定まる平面に垂直なベクトル(法線ベクトル)を垂直条件を用いないで求めてみましょう．

(問題１) 右の図において，$AB=4$であるとき，次の内積の値を求めよ．

　(1) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$　　(2) $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB}$



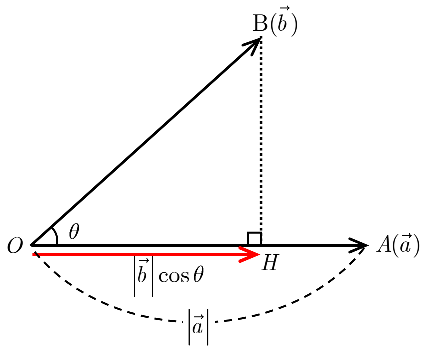
　２つのベクトルはその「方向」を同じにすることで，積の計算が可能になります．
$\vec{a}$に$\vec{b}$の正射影を落とすことで，スカラー積と同様に，ベクトルの積もまた，内積(dot-prodact)として考えることができます．

　また，$\vec{a}$に落とした$\vec{b}$の正射影はベクトルとして表すことができます．

　大きさは正射影$|\vec{b}|\cos\theta$ ($90°<\theta≦180°$ のときは負数)で与え，向きは，

　単位ベクトル$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$で与えることで，正射影ベクトル$\vec{p}=|\vec{b}|\cos\theta\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$が

　得られます．ここで，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$より，$\vec{p}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$となります．



(問題２) 三角形 ABC において，

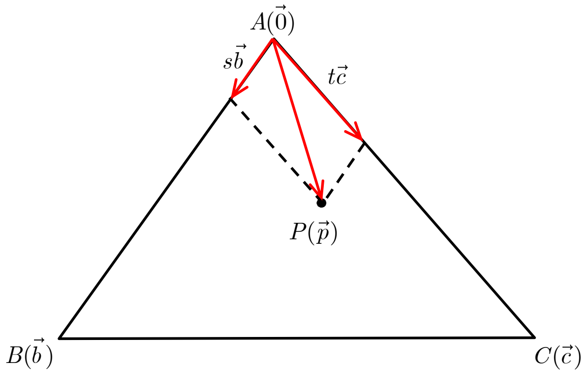
　$AB=5$，$AC=6$，$BC=7$

　である．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$　とする．

　$\overrightarrow{AP}=s\vec{b}+t\vec{c}$

　を満たす点Ｐが次で与えられるとき，sとtの値を求めよ．

　(1) 外心Ｏ　　(2) 垂心Ｈ　　(3) 内心Ｉ



(問題３) 空間で，３点$A(-1,-1,2)$，$B(-2,-1,-2)$，$C(-1,-3,0)$

　を通る平面をαとする．次の問いに答えよ．

　(1) 平面αに垂直なベクトルを１つ求めよ．

　(2) 原点Ｏから平面αに下ろした垂線 OH の長さを求めよ．