

Fenchel 型不等式から U -共役関数へ

和田 文 興

北海道札幌北高等学校

1 はじめに

この節の前半では、Fenchel の不等式を改良したより精度の高い不等式をつくるため、Legendre–Fenchel 変換による共役凸関数と類似した I -共役関数について説明する。

Banach 空間 E 上で定義された $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に値をとる下半連続凸関数 f の (Legendre–Fenchel 変換による) 共役凸関数 f^* は次のように定義される [3]:

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in E} \{\langle x^*, x \rangle - f(x)\} \quad (x^* \in E^*).$$

この定義から、すべての $x^* \in E^*$ とすべての $x \in E$ に対して

$$\langle x^*, x \rangle \leq f^*(x^*) + f(x)$$

が成り立つことがわかる。この不等式は Fenchel の不等式として知られており、Young の不等式の一般化とみなすことができる [5]。しかし、 f^* は拡張された実数を関数値としてとるため、 f が下に有界な連続凸関数や Lipschitz 連続凸関数のときでさえ、 f^* は E^* の広い範囲で $+\infty$ を値にとることがある。

例えば、 $f(x) = e^x$ のとき

$$f^*(x^*) = \begin{cases} x^* \log x^* - x^* & (x^* > 0) \\ 0 & (x^* = 0) \\ +\infty & (x^* < 0) \end{cases}.$$

また、 $f(x) = ax + b$ のとき

$$f^*(x^*) = \begin{cases} -b & (x^* = a) \\ +\infty & (x^* \neq a) \end{cases}.$$

後者の例においては Fenchel の不等式は自明な不等式であり、役に立たない不等式になっている。このような状況を避けるため、次のように I -共役関数を定義して、Fenchel の不等式を改良する。

関数 f^* の定義式の右辺の x が動く範囲を Banach 空間 E 全体から E の有界閉凸集合に制限すれば、 f^* は $+\infty$ を値としてとらなくなり、通常の実数値連続凸関数となる。そこで、下に有界な関数 f に対し、 f^* を改良して次のように連続凸関数 f_r^I を定義する:

$$f_r^I(x^*) := \sup_{x \in B_r(E)} \{\langle x^*, x \rangle - f(x)\}.$$

ここで、 $B_r(E)$ は E の原点を中心とする半径 r の閉球である。この f_r^I の定義から、すべての $x^* \in E^*$ とすべての $x \in E$ に対して、不等式

$$\langle x^*, x \rangle \leq f_{\|x\|}^I(x^*) + f(x)$$

が成り立つことがわかる。 E^* 上で $f_{\|x\|}^I \leq f^*$ となるから、不等式 $\langle x^*, x \rangle \leq f_{\|x\|}^I(x^*) + f(x)$ は Fenchel の不等式をより厳しく評価した不等式になっている。

本稿を通して、 E は実 Banach 空間を表し、 E^{**} の部分空間とみなす。また、閉球 $B_r(E)$ 上で定義された r -Lipschitz 連続凸関数全体がつくる集合を $\mathcal{F}_r(E)$ とする。

第 2 節は、必要な定義と凸解析の基本的な結果を紹介するための準備の節である。以後、 f_r^I の $r \in \mathbb{R}^+$ は任意にとって固定され、簡単のため r を省略して f_r^I を単に f^I と表す (定義 2.1)。

Legendre–Fenchel 変換にはいくつかの研究がある [1, 2, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14]。例えば、 \mathbb{R}^n 上の下半連続凸関数 f に対して $(f^*)^*$ と f が一致することが知られている [12]。それでは、 f^I の場合について $(f^I)^I = f$ となるための条件がどうなるのかが問題になるが、これについては第 3 節で扱う。定理 3.1 において、 $(f^I)^I|_{B_r(E)} = f$ となるための必要十分条件が $f \in \mathcal{F}_r(E)$ であることを証明する。そして、 $f \in \mathcal{F}_r(E)$ のとき、関数 f^I を f の I -共役関数という。Fenchel–Rockafellar の定理 [3, Theorem. 12] は有用な定理であり、 I -共役関数についても Fenchel–Rockafellar 型の定理が成り立つこともわかった：

$f, g \in \mathcal{F}_r(E)$ に対して

$$\inf_{x \in B_r(E)} \{f(x) + g(x)\} = \max_{x^* \in B_r(E^*)} \{-f^I(x^*) - g^I(-x^*)\}$$

が成り立つ (定理 3.4)。この結果は定理 3.1 の一般化になっている (註記 3.6)。

第 4 節では、 reflexive 空間における I -共役関数を扱う。主に、定義式の $\sup_{x \in B_r(E)} \{\langle x^*, x \rangle - f(x)\}$ の sup を実現させる点 $x \in B_r(E)$ 全体の集合を調べる。

第 5 節では、 Hilbert 空間 E における U -共役関数を紹介する。ただし、 U は unitary 作用素である。 U -共役関数の概念は、 I -共役関数の概念の一般化になっている (定義 5.1)。ここでは、 U -共役関数の性質 (定理 5.2) を調べ、 $x^* \in B_r(E)$, $f \in \mathcal{F}_r(E)$, U を unitary 作用素とすると、 $B_r(E)$ の部分集合 $M(x^*, f, U)$ を

$$M(x^*, f, U) := \{x \in B_r(E) \mid f^U(x^*) = \langle Ux^*, x \rangle - f(x)\}$$

によって定義する。集合 $M(x^*, f, U)$ は E の空でない弱 compact 凸部分集合で、任意の $f \in \mathcal{F}_r(E)$ と任意の unitary 作用素 U に対して

$$\bigcup_{x^* \in B_r(E)} M(x^*, f, U) = B_r(E)$$

が成り立つ (命題 5.8)。さらに、 E が有限次元空間のときは、任意の $f \in \mathcal{F}_r(E)$ と任意の unitary 作用素 U, V に対して、 $B_r(E)$ の元 x_0 が存在して、 $\langle Ux_0, Vx_0 \rangle = f^I(Ux_0) + f(Vx_0)$ が成り立つことを示す (例 5.9)。

最後の第 6 節では、 Hilbert 空間において、 U を自己共役な unitary 作用素とすると、 f^U を 3 つの条件で特徴付ける (定理 6.2)。

2 凸解析からの準備

この節では、必要な定義と凸解析の基本的な結果を述べる。

定義 2.1. Banach 空間 E の原点 0 を中心とする半径 r の閉球を $B_r(E)$ とし、 $B_r(E)$ 上で定義された r -Lipschitz 連続凸関数全体の集合を $\mathcal{F}_r(E)$ とする。関数 $f : B_r(E) \rightarrow \mathbb{R}$ が下に有界であるとき、 $B_r(E^*)$ 上の関数 f^I を次のように定義する：

$$f^I(x^*) := \sup_{x \in B_r(E)} \{\langle x^*, x \rangle - f(x)\} \quad (x^* \in B_r(E^*)).$$

このとき, f^I を f の I -共役関数といい, $f \mapsto f^I$ による $\mathcal{F}_r(E)$ から $\mathcal{F}_r(E^*)$ への写像を I -変換という.

註記 2.2. E が Hilbert 空間でないときは, 変換という用語は相応しくないかもしれないが, Legendre–Fenchel 変換という用語と同様に変換という用語を採用した. 定義からただちに $f^I \in \mathcal{F}_r(E^*)$ と $(f^I)^I|_{B_r(E)} \in \mathcal{F}_r(E)$ がわかる. 固定された各 $x \in B_r(E)$ に対して, 関数 $x^* \mapsto \langle x^*, x \rangle - f(x)$ は $B_r(E^*)$ 上のアフィン関数 (より一般に, 凸関数) であるから, これらの関数の上包絡は凸 (なぜなら, 凸関数のクラスは, 関数の族の上限をとる操作について閉じている). また, $x_1^*, x_2^* \in B_r(E^*)$ のとき,

$$f^I(x_1^*) - f^I(x_2^*) \leq \sup_{x \in B_r(E)} \{(\langle x_1^*, x \rangle - f(x)) - (\langle x_2^*, x \rangle - f(x))\} \leq r \|x_1^* - x_2^*\|.$$

ここで, x_1^* と x_2^* を入れかえることにより,

$$|f^I(x_1^*) - f^I(x_2^*)| \leq r \|x_1^* - x_2^*\|$$

がすべての $x_1^*, x_2^* \in B_r(E^*)$ に対して成り立つことがわかる. したがって, $f^I \in \mathcal{F}_r(E^*)$ である. 同様に, $(f^I)^I|_{B_r(E)} \in \mathcal{F}_r(E)$ であることもわかる.

本稿を通して, 劣微分概念は重要な役割を果たす. 関数 f の x_0 における劣微分 $\partial f(x_0)$ は次のように定義される.

定義 2.3. 集合 C を E の空でない凸部分集合とし, 関数 f を C 上で定義された凸関数とする. 元 $z^* \in E^*$ が, すべての $x \in C$ に対して

$$\langle z^*, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0)$$

を満たすとき, この z^* を $x_0 \in C$ における f の劣勾配といい, $x_0 \in C$ における f の劣勾配全体の集合 $\partial f(x_0)$ を x_0 における f の劣微分という.

次の命題 [10, Proposition. 1.11] は第 3 節と第 4 節において基本的である.

命題 2.4. [10] 集合 C を E の空でない凸部分集合, 関数 f を C 上の連続凸関数とする. このとき, 任意の $x_0 \in \text{int}C$ に対し, 劣微分 $\partial f(x_0)$ は E^* の空でない弱*コンパクト凸部分集合である.

定義 2.5. 集合 C を E の空でない部分集合とし, T を C から 2^{E^*} の中への集合値写像とする. また, $x_0 \in C$ とする. Tx_0 を含んでいる各 norm 開集合 [resp. weak 開集合] G に対し, C に含まれる x_0 の norm 開近傍 $N(x_0)$ が存在して, 任意の $x \in N(x_0)$ に対して $Tx \subset G$ となるとき, T は x_0 で norm-to-norm [resp. norm-to-weak] 上半連続という. また, C の各点で T が norm-to-norm [resp. norm-to-weak] 上半連続であるとき, T は C 上で norm-to-norm [resp. norm-to-weak] 上半連続であるという.

次の角谷による結果 [6] を用いると, 第 5 節で扱う方程式 $\langle Ux, Vx \rangle = f^I(Ux) + f(Vx)$ の解 x の存在を示すことができる.

定理 2.6. (角谷の不動点定理) [6] 集合 C を \mathbb{R}^n の空でないコンパクト凸集合とし, T を C から 2^C の中への集合値写像とする. T が C 上で (norm-to-norm) 上半連続で, 各 $x \in C$ に対して集合 Tx が空でない閉凸集合ならば, T は不動点をもつ. すなわち, $x_0 \in Tx_0$ を満たす C の点 x_0 が存在する.

Fan は角谷の不動点定理における全体空間を有限次元空間から局所凸空間に一般化した [4].

3 対合定理と双対定理

この節では、命題 2.4 を用いて I -共役関数の対合定理（定理 3.1）と双対定理（定理 3.4）を証明する。対合定理は第 4 節と第 5 節で利用されることになる。

定理 3.1. (対合定理) 関数 f は $B_r(E)$ 上の実数値関数で下に有界であるとする。このとき、 $(f^I)^I|_{B_r(E)} = f$ が成り立つための必要十分条件は $f \in \mathcal{F}_r(E)$ となることである。

証明. $f \in \mathcal{F}_r(E)$ とする。すべての $x \in B_r(E)$ とすべての $x^* \in B_r(E^*)$ に対して $\langle x^*, x \rangle - f^I(x^*) \leq f(x)$ となるから、 $(f^I)^I|_{B_r(E)} \leq f$ である。逆向きの不等式 $(f^I)^I|_{B_r(E)} \geq f$ を示すために、各 $x_0 \in \text{int}B_r(E)$ に対して $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ という基本的な事実（命題 2.4）を使う。すなわち、任意の $x_0 \in \text{int}B_r(E)$ に対して $z^* \in E^*$ が存在して、任意の $x \in B_r(E)$ に対して

$$\langle z^*, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0).$$

関数 f は r -Lipschitz 連続であるから、すべての $x \in B_r(E)$ に対して

$$\langle z^*, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0) \leq r\|x - x_0\|$$

が成り立つ。したがって、 $z^* \in B_r(E^*)$ である。また、すべての $x \in B_r(E)$ に対して

$$\langle z^*, x_0 \rangle - f(x_0) \geq \langle z^*, x \rangle - f(x)$$

が成り立つので、

$$\langle z^*, x_0 \rangle - f(x_0) = f^I(z^*)$$

となることがわかる。したがって、 $\text{int}B_r(E)$ 上で $(f^I)^I|_{B_r(E)} \geq f$ が成り立つ。 f と $(f^I)^I|_{B_r(E)}$ の連続性から、 $B_r(E)$ 上で $(f^I)^I|_{B_r(E)} = f$ がわかる。

逆に、 $(f^I)^I|_{B_r(E)} = f$ とすると、註記 2.2 から、 $f = (f^I)^I|_{B_r(E)} \in \mathcal{F}_r(E)$ となる。 \square

註記 3.2. 上の証明で示したように、 $f \in \mathcal{F}_r(E)$ のとき、

$$f(x) = (f^I)^I|_{B_r(E)}(x) = \sup_{x^* \in B_r(E^*)} \{\langle x^*, x \rangle - f^I(x^*)\},$$

が成り立ち、各 $x \in \text{int}B_r(E)$ に対して、右辺の \sup はある点 $x^* \in \partial f(x)$ で実現する。（註記 3.6 で見るように、各 $x \in \text{int}B_r(E)$ だけでなく、各 $x \in B_r(E)$ について \sup が実現される。）さらに、 E が reflexive Banach 空間のときは、各 $x^* \in \text{int}B_r(E^*)$ に対し、関数 $f^I(x^*) = \sup_{x \in B_r(E)} \{\langle x^*, x \rangle - f(x)\}$ の \sup は、ある点 $x \in \partial f^I(x^*)$ で実現される。実際、定理 3.1 から

$$f^I(x^*) = \sup_{x \in B_r(E)} \{\langle x^*, x \rangle - (f^I)^I(x)\}.$$

となる。したがって、 $z \in \partial f^I(x^*)$ が存在して

$$f^I(x^*) = \langle x^*, z \rangle - (f^I)^I(z) = \langle x^*, z \rangle - f(z)$$

が成り立つ。

$f \in \mathcal{F}_r(E)$ とする. このとき, すべての $x \in B_r(E)$ に対して $\tilde{f}(x) = f(x)$ が成り立つような, E 全体で定義された r -Lipschitz 連続凸関数 \tilde{f} を関数 f の延長という.

次の補題は定理 3.4 を証明に使われる.

補題 3.3. $f \in \mathcal{F}_r(E)$ のとき, E 全体で定義された r -Lipschitz 連続凸関数 \tilde{f} で f の延長となるものが存在する.

証明. $x \in E$ に対し, $\tilde{f}(x) := \sup_{x^* \in B_r(E^*)} \{\langle x^*, x \rangle - f^I(x^*)\}$ とおく. 註記 2.2 から, \tilde{f} は $f \in \mathcal{F}_r(E)$ の延長である. \square

他のよく知られた r -Lipschitz 連続凸延長関数に, 次のようなものがある (註記 3.6):

$$\tilde{f}(x) := \inf_{y \in B_r(E)} \{r \|x - y\| + f(y)\} \quad (x \in E).$$

定理 3.4. (双対定理) $f, g \in \mathcal{F}_r(E)$ のとき

$$\inf_{x \in B_r(E)} \{f(x) + g(x)\} = \max_{x^* \in B_r(E^*)} \{-f^I(x^*) - g^I(-x^*)\}$$

が成り立つ.

証明. 定数 p, q を

$$p := \inf_{x \in B_r(E)} \{f(x) + g(x)\},$$

$$q := \sup_{x^* \in B_r(E^*)} \{-f^I(x^*) - g^I(-x^*)\}$$

とする. f^I と g^I の定義から明らかに

$$q \leq p \tag{3.1}$$

が成り立つ.

次に, $p \leq q$ を示す. $f \in \mathcal{F}_r(E)$ に補題 3.3 を適用し, $B_r(E)$ 上で \tilde{f} となる E 全体で定義された r -Lipschitz 連続凸関数 \tilde{f} をとる. この関数 \tilde{f} と関数 g に対し, 集合 C, D を

$$C := \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} \mid \tilde{f}(x) \leq y\},$$

$$D := \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} \mid x \in B_r(E) \text{ and } y \leq p - g(x)\}$$

と定める. このとき, $\text{int}C$ と D はともに空でない凸集合であって, $\text{int}C \cap D = \emptyset$ であることもすぐわかる. よって, $\text{int}C$ と D に Hahn-Banach の定理を適用することができる. したがって, $(w^*, \alpha) \in E^* \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ と $c \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \text{int}C$ とすべての $(x, y) \in D$ に対して

$$\langle w^*, x \rangle + \alpha y \leq c \leq \langle w^*, \tilde{x} \rangle + \alpha \tilde{y}$$

が成り立つ. $C = \overline{\text{int}C}$ であるから, すべての $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in C$ とすべての $(x, y) \in D$ に対して

$$\langle w^*, x \rangle + \alpha y \leq c \leq \langle w^*, \tilde{x} \rangle + \alpha \tilde{y}$$

となる. よって, すべての $(x, y) \in C$ に対して

$$\langle w^*, x \rangle + \alpha y \geq c \tag{3.2}$$

が成り立ち, すべての $(x, y) \in D$ に対して

$$\langle w^*, x \rangle + \alpha y \leq c \quad (3.3)$$

が成り立つ. (3.2)において $y \rightarrow +\infty$ とすることで, $\alpha \geq 0$ がわかる. さらに $\alpha > 0$ であることが次のようにわかる. $\alpha = 0$ とすると, (3.2) と (3.3) から, すべての $x \in B_r(E)$ に対して $\langle w^*, x \rangle = c$ となる. したがって, $w^* = 0$ でなければならないが, これは $(w^*, \alpha) \neq (0, 0)$ に矛盾する. よって, $\alpha > 0$. (3.2) と (3.3) において, $z^* := -w^*/\alpha$ とすると, すべての $x \in E$ について

$$\langle z^*, x \rangle - \tilde{f}(x) \leq -c/\alpha \quad (3.4)$$

であり, すべての $u \in B_r(E)$ について

$$\langle -z^*, u \rangle - g(u) \leq -p + c/\alpha \quad (3.5)$$

である.

さらに, p の定義から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$p + \varepsilon > f(x_0) + g(x_0) = \tilde{f}(x_0) + g(x_0). \quad (3.6)$$

を満たす $x_0 \in B_r(E)$ が存在する. (3.4), (3.5), (3.6) を用いると, すべての $x \in E$ とすべての $u \in B_r(E)$ に対し

$$\langle z^*, x - u \rangle < \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0) + g(u) - g(x_0) + \varepsilon$$

となることがわかる. ここで, $u = x_0$ とすると, すべての $x \in E$ に対して

$$\langle z^*, x - x_0 \rangle < \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0) + \varepsilon \leq r \|x - x_0\| + \varepsilon$$

が成り立つ. 特に, $\|x - x_0\| = 1$ のとき,

$$\langle z^*, x - x_0 \rangle \leq r + \varepsilon.$$

となるから, $\|z^*\| \leq r + \varepsilon$ がわかる. $\varepsilon > 0$ は任意であったから, $z^* \in B_r(E^*)$. (3.4) から

$$f^I(z^*) \leq -c/\alpha. \quad (3.7)$$

また, (3.5) から

$$g^I(-z^*) \leq -p + c/\alpha. \quad (3.8)$$

よって, (3.7) と (3.8) から

$$p \leq -f^I(z^*) - g^I(-z^*) \leq q. \quad (3.9)$$

したがって, (3.1) と (3.9) から

$$\begin{aligned} \inf_{x \in B_r(E)} \{f(x) + g(x)\} &= \sup_{x^* \in B_r(E^*)} \{-f^I(x^*) - g^I(-x^*)\} \\ &= \max_{x^* \in B_r(E^*)} \{-f^I(x^*) - g^I(-x^*)\} \end{aligned}$$

がわかり, 定理は証明された. □

註記 3.5. 定理 3.4 から, 任意の $f, g \in \mathcal{F}_r(E)$ に対して

$$\sup_{x \in B_r(E)} \{-f(x) - g(x)\} = \min_{x^* \in B_r(E^*)} \{f^I(x^*) + g^I(-x^*)\}$$

が成り立つこともわかる.

註記 3.6. Artstein-Avidan と Milman は, 対合性と下限合成積を使って, Legendre–Fenchel 変換に関するある関数のクラスを特徴付けた [1, Theorem. 11]. I -共役関数はこのクラスには属さない. 開凸集合 $D \subset E$ で定義された任意の連続凸関数 f において, $n \|\cdot\|$ と f の下限合成積に関する等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{y \in D} \{n \|x - y\| + f(y)\} = f(x) \quad (x \in D)$$

が成り立つ. これは, [10, Lemmma. 2.31] の証明からわかる. 一方で, $f \in \mathcal{F}_r(E)$ のとき, $r \|\cdot\|$ と f の下限合成積は f に一致する. すなわち,

$$\min_{y \in B_r(E)} \{r \|x - y\| + f(y)\} = f(x) \quad (x \in B_r(E)).$$

$u \in B_r(E)$ を任意にとり固定する. $g(x) := r \|u - x\|$ とおくと, 明らかに $g^I(x^*) = \langle x^*, u \rangle$ である. 定理 3.4 から

$$\begin{aligned} f(u) &= \inf_{x \in B_r(E)} \{r \|u - x\| + f(x)\} \\ &= \max_{x^* \in B_r(E^*)} \{\langle x^*, u \rangle - f^I(x^*)\} \\ &= (f^I)^I(u) \end{aligned}$$

がわかるので, 定理 3.4 は定理 3.1 の一般化になっていることがわかる.

4 Reflexive 空間における I -共役関数

この節を通して E は reflexive Banach 空間を表す. この節では次に定義する集合 $M(x^*, f)$ について調べていく.

定義 4.1. $f \in \mathcal{F}_r(E)$ と $x^* \in B_r(E^*)$ に対し, 集合 $M(x^*, f)$ を

$$M(x^*, f) := \{x \in B_r(E) \mid f^I(x^*) = \langle x^*, x \rangle - f(x)\}$$

と定める.

註記 3.6 から, 各 $x^* \in B_r(E^*)$ に対し, $M(x^*, f)$ は空でない.

$f(\cdot) - \langle x^*, \cdot \rangle$ は弱下半連続で, $B_r(E)$ は弱コンパクト凸集合だから, 次の補題を得る.

補題 4.2. $f \in \mathcal{F}_r(E)$, $x^* \in B_r(E^*)$ のとき, $M(x^*, f)$ は空でない弱コンパクト凸集合である.

また, 次の補題も成り立つ.

補題 4.3. $f \in \mathcal{F}_r(E)$, $x \in B_r(E)$ のとき, $M(x, f^I)$ は空でない弱コンパクト凸集合である.

註記 4.4. 補題 4.2 から, 各 $x^* \in \text{int}B_r(E^*)$ に対して $M(x^*, f) = \partial f^I(x^*)$ が成り立つ. より一般には, 各 $x^* \in B_r(E^*)$ に対して $M(x^*, f) = \partial f^I(x^*) \cap B_r(E)$ が成り立つ. さらに, 各 $x \in \text{int}B_r(E)$ [resp. $x \in B_r(E)$] に対して $M(x, f^I) = \partial f(x)$ [resp. $M(x, f^I) = \partial f(x) \cap B_r(E^*)$] が成り立つ.

次の註記の内容は $M(x^*, f)$ と $M(x, f^I)$ の定義から明らかである.

註記 4.5. $x \in B_r(E)$, $x^* \in B_r(E^*)$, $f \in \mathcal{F}_r(E)$ とする. このとき, 次の2つの条件は同値である.

- (i) $x \in M(x^*, f)$
- (ii) $x^* \in M(x, f^I)$

註記 4.4 と註記 4.5 から次を得る.

註記 4.6. $x \in B_r(E)$, $x^* \in B_r(E^*)$, $f \in \mathcal{F}_r(E)$ とする. このとき, 次の2つの条件は同値である.

- (i) $x \in \partial f^I(x^*)$
- (ii) $x^* \in \partial f(x)$

E は reflexive であるから, 劣微分写像 $x^* \mapsto \partial f^I(x^*)$ は norm-to-weak 上半連続である [10, Prop 2.5].

註記 4.4 の等式 $M(x^*, f) = \partial f^I(x^*) \cap B_r(E)$ から, 次の補題を得る.

補題 4.7. $f \in \mathcal{F}_r(E)$ のとき, $M(\cdot, f)$ は $B_r(E^*)$ 上の norm-to-weak 上半連続写像である.

$M(x^*, f)$ は次の性質をもつ.

命題 4.8. $f \in \mathcal{F}_r(E)$ のとき, 次の等式が成り立つ.

$$\bigcup_{x^* \in B_r(E^*)} M(x^*, f) = B_r(E).$$

証明. $M(x^*, f)$ の定義から明らかに

$$\bigcup_{x^* \in B_r(E^*)} M(x^*, f) \subset B_r(E).$$

その逆の包含関係

$$B_r(E) \subset \bigcup_{x^* \in B_r(E^*)} M(x^*, f)$$

を示すために, 任意の $x_0 \in B_r(E)$ をとる. 補題 4.3 より, $M(x_0, f^I)$ は空でないから $x^* \in M(x_0, f^I)$ がとれる. したがって, 註記 4.5 から

$$x_0 \in M(x^*, f) \subset \bigcup_{x^* \in B_r(E^*)} M(x^*, f).$$

$x_0 \in B_r(E)$ は任意であったから

$$B_r(E) \subset \bigcup_{x^* \in B_r(E^*)} M(x^*, f).$$

を得る. □

5 Hilbert 空間における U -共役関数

この節を通して、 E は実 Hilbert 空間とする。また、 E 上のユニタリ作用素全体の集合を $\mathcal{U}(E)$ で表す。

定義 5.1. $f \in \mathcal{F}_r(E)$, $U \in \mathcal{U}(E)$ に対し、 f の U -関数 f_U を

$$f_U(x) := f(Ux) \quad (x \in B_r(E))$$

で定義し、 f の U -共役関数 f^U を

$$f^U(x) := \sup_{t \in B_r(E)} \{\langle Ux, t \rangle - f(t)\} \quad (x \in B_r(E))$$

で定義する。ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は E の標準的な内積を表す。

I が恒等作用素のときは、明らかに $f_I = f$ である。

定理 5.2. $f \in \mathcal{F}_r(E)$, $U, V \in \mathcal{U}(E)$ のとき、 $f_U, f^U \in \mathcal{F}_r(E)$ であり、次の等式が成り立つ。

$$(f_U)^V = (f^U)_V = f^{UV}, \quad (f^U)^V = (f_U)_V = f_{UV}$$

証明. $f \in \mathcal{F}_r(E)$, $U, V \in \mathcal{U}(E)$ とする。 $f_U, f^U \in \mathcal{F}_r(E)$ であることは、定義からすぐにわかる。

(5.1), (5.2), ..., (5.6) を示すため、定理 3.1 と f_U, f^U の定義を使う。

$$(f^I)_U(x) = f^I(Ux) = \sup_{t \in B_r(E)} \{\langle Ux, t \rangle - f(t)\} = f^U(x)$$

から

$$(f^I)_U = f^U. \tag{5.1}$$

次に、

$$(f_U)_V(x) = (f_U)(Vx) = f(UVx) = f_{UV}(x),$$

から

$$(f_U)_V = f_{UV}. \tag{5.2}$$

(5.1) と (5.2) を用いることにより

$$(f^U)_V = ((f^I)_U)_V = (f^I)_{UV} = f^{UV}.$$

よって

$$(f^U)_V = f^{UV}. \tag{5.3}$$

また、 $U, V \in \mathcal{U}(E)$ であるから

$$\begin{aligned} (f_U)^V(x) &= \sup_{t \in B_r(E)} \{\langle Vx, t \rangle - f_U(t)\} \\ &= \sup_{t \in B_r(E)} \{\langle UVx, Ut \rangle - f(Ut)\} \\ &= \sup_{t \in B_r(E)} \{\langle UVx, t \rangle - f(t)\} \\ &= (f^{UV})(x). \end{aligned}$$

よって

$$(f_U)^V = f^{UV}. \quad (5.4)$$

$U, V \in \mathcal{U}(E)$ であることと, (5.1) から

$$\begin{aligned} (f^I)^U(x) &= \sup_{t \in B_r(E)} \{\langle Ux, t \rangle - f^I(t)\} \\ &= \sup_{t \in B_r(E)} \{\langle Ux, Ut \rangle - f^I(Ut)\} \\ &= \sup_{t \in B_r(E)} \{\langle x, t \rangle - (f^I)_U(t)\} \\ &= \sup_{t \in B_r(E)} \{\langle x, t \rangle - (f^U)(t)\} \\ &= (f^U)^I(x). \end{aligned}$$

よって

$$(f^I)^U = (f^U)^I. \quad (5.5)$$

(5.4), (5.5), (5.4), 定理 3.1, (5.2) をこの順に用いると

$$(f^U)^V = ((f_U)^I)^V = ((f_U)^V)^I = ((f_U)_V)^I = (f_U)_V = f_{UV}.$$

よって

$$(f^U)^V = f_{UV}. \quad (5.6)$$

これで等式はすべて証明された. □

系 5.3. $f \in \mathcal{F}_r(E)$, $U \in \mathcal{U}(E)$ のとき, 次の等式が成り立つ.

$$(f_U)^I = f^U, \quad (f^U)^I = f_U, \quad (f^U)^{U^*} = (f_U)_{U^*} = f$$

ただし, U^* は U の共役作用素である.

ここで, 集合 $M(x^*, f, U)$ を次のように定義する.

定義 5.4. $f \in \mathcal{F}_r(E)$, $x^* \in B_r(E)$, $U \in \mathcal{U}(E)$ に対し, 集合 $M(x^*, f, U)$ を

$$M(x^*, f, U) := \{x \in B_r(E) \mid f^U(x^*) = \langle Ux^*, x \rangle - f(x)\}$$

と定める.

I が恒等作用素のときは, $M(x^*, f, I) = M(x^*, f)$ である.

定理 5.2 から

$$\begin{aligned} M(x^*, f, U) &= \{x \in B_r(E) \mid f^U(x^*) = \langle Ux^*, x \rangle - f(x)\} \\ &= \{x \in B_r(E) \mid (f^I)_U(x^*) = \langle Ux^*, x \rangle - f(x)\} \\ &= \{x \in B_r(E) \mid (f^I)(Ux^*) = \langle Ux^*, x \rangle - f(x)\} \\ &= M(Ux^*, f). \end{aligned}$$

したがって, 次を得る.

補題 5.5. $x^* \in B_r(E)$, $f \in \mathcal{F}_r(E)$, $U \in \mathcal{U}(E)$ のとき, $M(x^*, f, U) = M(Ux^*, f)$.

註記 5.6. 定理 5.2 から $M(x^*, f, U) = U[M(x^*, f_U)]$ もわかる. 実際,

$$\begin{aligned} M(x^*, f, U) &= \{x \in B_r(E) \mid f^U(x^*) = \langle Ux^*, x \rangle - f(x)\} \\ &= \{Ux \in B_r(E) \mid f^U(x^*) = \langle Ux^*, Ux \rangle - f(Ux)\} \\ &= U[\{x \in B_r(E) \mid (f_U)^I(x^*) = \langle x^*, x \rangle - f_U(x)\}] \\ &= U[M(x^*, f_U)]. \end{aligned}$$

補題 5.7. $f \in \mathcal{F}_r(E)$, $U \in \mathcal{U}(E)$ のとき, $M(\cdot, f, U)$ は $B_r(E)$ 上の *norm-to-weak* 上半連続写像である.

証明. $f \in \mathcal{F}_r(E)$, $U \in \mathcal{U}(E)$ とする. $Tx^* = M(x^*, f)$ ($x^* \in B_r(E)$) によって集合値写像 T を定義する. 定義 2.5 と補題 4.7 から TU は $B_r(E)$ 上の *norm-to-weak* 上半連続写像である. さらに, 補題 5.5 から

$$M(x^*, f, U) = M(Ux^*, f) = TUx^* \quad (x^* \in B_r(E)).$$

したがって, $M(\cdot, f, U)$ は $B_r(E)$ 上の *norm-to-weak* 上半連続写像である. □

さらに, 次も成り立つ.

命題 5.8. $x^* \in B_r(E)$, $f \in \mathcal{F}_r(E)$, $U \in \mathcal{U}(E)$ のとき, $M(x^*, f, U)$ は E の空でない弱コンパクト凸部分集合であり,

$$\bigcup_{x^* \in B_r(E)} M(x^*, f, U) = B_r(E)$$

が成り立つ.

証明. $x^* \in B_r(E)$, $f \in \mathcal{F}_r(E)$, $U \in \mathcal{U}(E)$ とする. 補題 5.5 と補題 4.2 から, $M(x^*, f, U)$ は E の空でない弱コンパクト凸部分集合である. さらに, 補題 5.5 と命題 4.8 から

$$\begin{aligned} \bigcup_{x^* \in B_r(E)} M(x^*, f, U) &= \bigcup_{x^* \in B_r(E)} M(Ux^*, f) \\ &= \bigcup_{x^* \in B_r(E)} M(x^*, f) \\ &= B_r(E). \end{aligned}$$

が成り立つ. □

これまでの結果の利用例として, 方程式 $\langle Ux, Vx \rangle = f^I(Ux) + f(Vx_0)$ の解 x の存在を示そう.

例 5.9. E を有限次元空間とし, $f \in \mathcal{F}_r(E)$, $U, V \in \mathcal{U}(E)$ とする. このとき,

$$\langle Ux_0, Vx_0 \rangle = f^I(Ux_0) + f(Vx_0)$$

を満たす点 $x_0 \in B_r(E)$ が存在する.

証明. 補題 5.7 と命題 5.8 から, 写像 $M(\cdot, f, UV^{-1})$ に定理 2.6 (Kakutani [6]) を適用することができるので, 写像 $M(\cdot, f, UV^{-1})$ は不動点 $z_0 \in M(z_0, f, UV^{-1})$ をもつことがわかる. すなわち,

$$f^{UV^{-1}}(z_0) = \langle UV^{-1}z_0, z_0 \rangle - f(z_0)$$

を満たす元 $z_0 \in B_r(E)$ が存在する. $x_0 := V^{-1}z_0$ とおくことにより,

$$\langle Ux_0, Vx_0 \rangle = f^I(Ux_0) + f(Vx_0)$$

を得る. □

6 U -共役関数の特徴付け

この節を通して、 E は実 Hilbert 空間とする。

補題 6.1. 変換 $\mathcal{T} : \mathcal{F}_r(E) \rightarrow \mathcal{F}_r(E)$ は

$$(1) \mathcal{T}\mathcal{T}f = f,$$

$$(2) f \leq g \implies \mathcal{T}f \geq \mathcal{T}g,$$

を満たし、任意の α に対して $f_\alpha \in \mathcal{F}_r(E)$ かつ $\inf_\alpha(f_\alpha) \in \mathcal{F}_r(E)$ とする。

このとき、 $\mathcal{T}(\inf_\alpha(f_\alpha)) = \sup_\alpha(\mathcal{T}f_\alpha)$ が成り立つ。

証明. $h := \mathcal{T}(\sup_\alpha(\mathcal{T}f_\alpha))$ とおく。(1) から $\sup_\alpha(\mathcal{T}f_\alpha) = \mathcal{T}h$. よって、すべての α に対し $\mathcal{T}f_\alpha \leq \mathcal{T}h$. (1) と (2) を用いると、すべての α に対し $f_\alpha \geq h$ となるから、 $\inf_\alpha(f_\alpha) \geq h$ がわかる。再び (2) を用いると $\mathcal{T}(\inf_\alpha(f_\alpha)) \leq \mathcal{T}h$. よって、

$$\mathcal{T}(\inf_\alpha(f_\alpha)) \leq \sup_\alpha(\mathcal{T}f_\alpha). \quad (6.1)$$

一方、すべての α に対して $\inf_\alpha(f_\alpha) \leq f_\alpha$ であるから、(2) を用いると、すべての α に対して $\mathcal{T}(\inf_\alpha(f_\alpha)) \geq \mathcal{T}f_\alpha$. よって、

$$\mathcal{T}(\inf_\alpha(f_\alpha)) \geq \sup_\alpha(\mathcal{T}f_\alpha). \quad (6.2)$$

したがって、(6.1) と (6.2) から

$$\mathcal{T}(\inf_\alpha(f_\alpha)) = \sup_\alpha(\mathcal{T}f_\alpha).$$

□

最後に、 U を自己共役なユニタリ作用素とすると、 f^U を 3 つの条件で特徴付ける。

定理 6.2. 変換 $\mathcal{T} : \mathcal{F}_r(E) \rightarrow \mathcal{F}_r(E)$ は

$$(1) \mathcal{T}\mathcal{T}f = f,$$

$$(2) f \leq g \implies \mathcal{T}f \geq \mathcal{T}g,$$

(3) $U \in \mathcal{U}(E)$ が存在して、任意の $y \in B_r(E)$ と任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{T}(r\|\cdot - y\| + c) = \langle Uy, \cdot \rangle - c$. を満たすものとする。

このとき、 $U^* = U$ かつ $\mathcal{T}f = f^U$ が成り立つ。

証明. 註記 3.6 と補題 6.1 から

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}f)(x) &= \sup_{y \in B_r(E)} \mathcal{T}(r\|x - y\| + f(y)) \\ &= \sup_{y \in B_r(E)} \{\langle Uy, x \rangle - f(y)\} \\ &= \sup_{y \in B_r(E)} \{\langle U^*x, y \rangle - f(y)\}. \end{aligned}$$

よって、

$$\mathcal{T}f = f^{U^*}. \quad (6.3)$$

系 5.3 から

$$(\mathcal{T}f)^I = (f^{U^*})^I = f_{U^*}. \quad (6.4)$$

(1), (6.3), (6.4) を用いると

$$f = \mathcal{T}\mathcal{T}f = (\mathcal{T}f)^{U^*} = ((\mathcal{T}f)^I)_{U^*} = f_{U^*U^*}.$$

$f \in \mathcal{F}_r(E)$ は任意であるから, $U^*U^* = I$ がわかる. よって,

$$U^* = U. \tag{6.5}$$

したがって, (6.3) と (6.5) から

$$\mathcal{T}f = f^U$$

が成り立つ. □

参考文献

- [1] S. Artstein-Avidan and V. Milman, *A characterization of the concept of duality*, Electron. Res. Announc. Math. Sci. 14 (2007), 42–59.
- [2] G. Beer, *On the Young–Fenchel transform for convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988), 1115–1123.
- [3] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.
- [4] K. Fan, *Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 38 (1952), 121–126.
- [5] W. Fenchel, *On conjugate convex functions*, Canad. J. Math. 1 (1949), 73–77.
- [6] S. Kakutani, *A generalization of Brouwer’s fixed point theorem*, Duke Math. J. 8 (1941), 457–459.
- [7] J. J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace Hilbertien*, Bull. Soc. Math. France. 93 (1965), 273–299.
- [8] J. J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Séminaire Leray, Collège de France, 1966.
- [9] U. Mosco, *On the continuity of the Young–Fenchel transform*, J. Math. Anal. Appl. 35 (1971), 518–535.
- [10] R. R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Lecture Notes in Math. 1364, Springer-Verlag, N.Y., 1989.
- [11] R. T. Rockafellar, *Conjugates and Legendre transforms of convex functions*, Canad. J. Math. 19 (1967), 200–205.
- [12] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton Univ. Press, 1970.
- [13] F. Wada, *Conjugate Convex Functions without Infinity*, J. Conv. Anal. 28 (2021), 55–66.
- [14] C. Zalinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific Pub Co Inc, 2002.