

第 111 回数学教育実践研究会

変形症候群（2）

レポート

令和元年 11 月 30 日 (土)

札幌市教育文化会館

数実研会員 安田富久一

《 使用上の注意を良くお読み下さい 》 マニュアルはよく読んで注意に従って!!

パターン反動的に形を見て直ぐにマニュアル変形したがる学生が多い。基本的に見ればそれほど難しくないのに、パターンのきつと反応して解いてしまうのではないかと思う問題を作って出してみた。

【 問題 】

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + c)}{x} = 56$ が成り立つように、1桁の自然数 a, b 及び正の数 c の値を定めよ。

但し、 $a > b > c$ とする。

【 この様な解答がいくつも 】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + c)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(bx + c)}{x} \frac{\sin (bx + c)}{bx + c} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(bx + c)}{x} \quad (\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin (bx + c)}{bx + c} = 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(ab + \frac{ac}{x} \right) \end{aligned}$$

もし、 $ac \neq 0$ なら発散するので、 $ac = 0$ 。.....

公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ には使用上の注意がある。

使用上の注意

- $\frac{\sin B}{A}$ のスタイルかつ $A = B$ である
- $A \rightarrow 0$ である

この2つが満たされているときにこの公式は益があること、またこの2つが満たされていないときには、一切の保証がないこと。今回の問題では $\lim_{x \rightarrow 0} (bx + c) = 0$ の確認をしないと使えない。

もっと言えば、公式以前に、分数やから分母、分子がそれぞれどうなっていくか気になるでしょ!!

【 解答 】

$\lim_{x \rightarrow 0}$ 分母 $= \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ であるから、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + c)}{x}$ が極限値を持つためには、 $\lim_{x \rightarrow 0}$ 分子 $= 0$ であることが必要である。 $\lim_{x \rightarrow 0} a \sin (bx + c) = a \sin c$ なので、

$$a \sin c = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

であることが必要。

$a > 0$ なので $\textcircled{1}$ は $\sin c = 0$ と同値。 $9 \geq a > b > c > 0$ であるから、 $c = \pi, 2\pi$ である。

(1) $c = \pi$ のとき、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + c)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + \pi)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -ab \cdot \frac{\sin (bx)}{bx} \right\} = -ab < 0$$

であるから、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + c)}{x} = 56$ に不適。

(2) $c = 2\pi$ のとき、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + c)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin (bx + 2\pi)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ ab \cdot \frac{\sin (bx)}{bx} \right\} = ab$$

より、 $ab = 56$ である。 $9 \geq a > b > c = 2\pi$ なので $a = 8, b = 7$ である。

以上、(1)(2) より求める a, b, c の値は、 $a = 8, b = 7, c = 2\pi$ (答)