

第 111 回数学教育実践研究会

タルタリアの三角形

レポート

令和元年 11 月 30 日 (土)

札幌市教育文化会館

数実研会員 安田富久一

## 《 タルタリアの三角形 》

タルタリアの三角形と呼ばれる等式の列がある。

タルタリアの三角形< 1 >

$$\begin{array}{r} 1 + 2 = 3 \\ 4 + 5 + 6 = 7 + 8 \\ 9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15 \\ 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array}$$

タルタリアの三角形< 2 >

$$\begin{array}{r} 3^2 + 4^2 = 5^2 \\ 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 \\ 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2 \\ 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array}$$

タルタリアの三角形は設問作りを工夫すると良い学習教材になる気がしたので、設問作りを試作してみた。「気がした」の部分についてレポート最後の《注》に詳しく書いた

## 《 試作教材 》

次の【問題 1】【問題 2】を一連の問題として取り組むことで、難しい問題を解く時に問題を簡単または単純にした問題を解いたときの経験が示唆を与えてくれる感覚を醸成出来るのではないかと考えた。

### 【問題 1】

- (1) 右の等式列 1 の各行の等式が正しいことを、各行の両辺の値を計算することで確認したい。計算の答えを次の空欄に埋めよ。

2 行目の両辺の値 =

3 行目の両辺の値 =

<等式列 1 >

$$\begin{array}{r} 1 + 2 = 3 \\ 4 + 5 + 6 = 7 + 8 \\ 9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array}$$

- (2) 4 行目はどんな等式を書くと最適か述べよ（当然、等式であることを確認すること）。
- (3) 一般に  $n$  行目はどんな等式を書くと最適か予想をたてよ。
- (4) 上記 (3) の予想が正しいことを証明せよ。
- (5)  $n$  行目について、左辺が  $n + 1$  項の連続する自然数の和、右辺がそれに続く  $n$  項の連続する自然数の和であるような等式列の三角形を、等式列 1 以外に作る事が出来るかどうか調べよ。

【問題 2】

- (1) 右の等式列 2 の各行の等式が正しいことを各行の両辺の値を計算することで確認したい。

計算の答えを次の空欄に埋めよ。

2 行目の両辺の値 =

3 行目の両辺の値 =

<等式列 2>

$$\begin{array}{r} 3^2 + 4^2 = 5^2 \\ 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 \\ 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{array}$$

- (2) 4 行目はどんな等式を書くと最適か述べよ（当然、等式であることを確認すること）。
- (3) 一般に  $n$  行目はどんな等式を書くと最適か予想をたてよ。
- (4) 上記 (3) の予想が正しいことを証明せよ。
- (5)  $n$  行目について、左辺が  $n + 1$  項の連続する自然数の平方の和、右辺がそれに続く  $n$  項の連続する自然数の平方の和であるような等式列の三角形を、等式列 2 以外に作る事が出来るかどうか調べよ。

《 想定解答 》

生徒の解答を予想してみた。気付き・発見・理解を更に浄化して他人に伝えるための表現を考える教材になり得るのではないかと思った。

【問題 1 の解答】

(1) 2 行目の両辺の値 =       3 行目の両辺の値 =

(2)  $16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24 (= 90)$

- (3) <解 1：推測の不確定さは残るが、法則性を見抜く力を感じる予想>

各行の左端の項は上の行から順に、1, 4, 9, 16, ... である。 $n$  行目の左端の数は  $n^2$  であるから、 $n$  行目の等式は

$$n^2 + (n^2 + 1) + \dots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) + \dots + (n^2 + n + n)$$

- <解 2：推測の不確定さは残るが、法則性を見抜く力を感じる予想>

各行の左端の項は上の行から順に、1, 4, 9, 16, ... であり、この階差数列は初項 3、公差 2 の等差数列である。よって、 $n$  行目の左端の数は

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1) = 1 + n(n - 1) + (n - 1) = n^2$$

である。よって、 $n$  行目の等式は

$$n^2 + (n^2 + 1) + \dots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) + \dots + (n^2 + n + n)$$

- <解 3：論理を感じる予想>

$k$  行目の左辺及び右辺にある項の数は  $(k + 1) + k = 2k + 1$  個。よって、 $n$  行目の左端の数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1) + 1 = (n - 1)n + (n - 1) + 1 = n^2$$

である。よって、 $n$  行目の等式は

$$n^2 + (n^2 + 1) + \dots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) + \dots + (n^2 + n + n)$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_{k=0}^n (n^2 + k) = n^2(n+1) + \sum_{k=0}^n k \\ \text{右辺} &= \sum_{k=1}^n (n^2 + n + k) = n(n^2 + n) + \sum_{k=0}^n k = n^2(n+1) + \sum_{k=0}^n k \end{aligned}$$

より、左辺 = 右辺がわかり、(3)の予想は正しいことが証明された。

(5)  $n$  行目の左辺の最初の数を  $m$  とすると、

$$m + (m+1) + \cdots + (m+n) = (m+n+1) + (m+n+2) + \cdots + (m+n+n)$$

となる整数  $m$  があることが等式列 1 になるための条件である。

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_{k=0}^n (m+k) = (n+1)m + \sum_{k=1}^n k \\ \text{右辺} &= \sum_{k=1}^n (m+n+k) = n(m+n) + \sum_{k=1}^n k \end{aligned}$$

$$\therefore (n+1)m = n(m+n) \quad \therefore m = n^2$$

よって、等式列 1 以外にない。

### 【問題 2 の解答】

(1) 2 行目の両辺の値 =       3 行目の両辺の値 =

(2)  $36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 = (7230)$

【注】 問題 1(3) <解 2>の予想をした経験が役に立つ。

問題 1(3) <解 2>のようになっていけばモウケ!! の気持ちで、やってみた。一番左端の数は上の列から順に  $3^2, 10^2, 21^2$  である。このままではなくまずは、3, 10, 21 で実験的にやってみるのが手順。この階差は 7, 11。これが等差数列になってくれたらモウケ!!。

等差数列としたら、公差は 4 ということになり、階差は 7, 11, 15。階差がこのようになるということは、4 列目の一番左端の数は  $21 + 15 = 36$  ということになる。

(3) 初項が 3 であり、その階差数列が初項 7 公差 4 の等差数列となるものは、その第  $n$  項は

$$3 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k+3) = 3 + 2n(n-1) + 3(n-1) = 2n^2 + n$$

である。よって、 $n$  行目の等式は

$$\begin{aligned} &(2n^2 + n)^2 + \{(2n^2 + n) + 1\}^2 + \cdots + \{(2n^2 + n) + n\}^2 \\ &= \{(2n^2 + n) + n + 1\}^2 + \{(2n^2 + n) + n + 2\}^2 + \cdots + \{(2n^2 + n) + n + n\}^2 \end{aligned}$$

(4)(3) で予想した解答の式の両辺をそれぞれ計算してみよう。

$$\begin{aligned} \text{右辺} - \text{左辺} &= \sum_{k=1}^n \{(2n^2 + 2n) + k\}^2 - \sum_{k=0}^n (2n^2 + n + k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n n(4n^2 + 3n + 2k) - (2n^2 + n)^2 \\ &= n^2(4n^2 + 3n) + 2n \cdot \frac{n(n+1)}{2} - (2n^2 + n)^2 \\ &= n^2(4n^2 + 4n + 1) - n^2(2n+1)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、(3)の予想は正しいことが証明された。

(5)  $n$  行目の左辺の最初の数を  $m$  とすると、

$$m^2 + (m+1)^2 + \cdots + (m+n)^2 = (m+n+1)^2 + (m+n+2)^2 + \cdots + (m+n+n)^2$$

となる整数  $m$  があることが等式列 2 になるための条件である。

$$\begin{aligned} \text{左辺} - \text{右辺} &= \sum_{k=0}^n (m+k)^2 - \sum_{k=1}^n (m+n+k)^2 \\ &= m^2 + \sum_{k=1}^n -n(2m+n+2k) \\ &= m^2 - n^2(2m+n) - 2n \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= m^2 - 2n^2m - n^2(2n+1) \\ &= (m+n)(m-2n^2-n) \end{aligned}$$

$$\therefore (m+n)(m-2n^2-n) = 0$$

$m > 0$  なので、 $m = 2n^2 + n$  である。つまり、等式列 2 以外にないことがわかった。

## 《 注：レポートに到った経緯 》

「数学が生まれる物語 第3週 式と方程式」志賀浩二（著）岩波書店 24・25 ページにレポート最初に示した「タルタリアの三角形<2>」の話題があった。【問題2】のような設問をすると良い教材になると思った。そして、タルタリアの三角形をネット検索してみたところ、ヒットしたのはほとんどが「タルタリアの三角形<1>」だった。

<1>を同様に教材化してみようとしたところ、<2>の解法を示唆するような点があるので、<1><2>をカップリングすることで、更に面白い教材になると思い今回のレポートにした。