第 112 回数学教育実践研究会

とにかくやってみる力
を養成する問題の作成

レポート

令和 2 年 1 月 25 日 (土)
ニッセイ MK ビル

数実研会員　安田富久一

【 やってみる力養成問題 1 】

$$f(x)=\frac{\log x}{x}-\frac{1}{2\sqrt{e}} \quad (1 \leqq x \leqq \sqrt{e^3}) \quad \cdots\cdots ①$$

とする。

2 直線 $x=1$, $x=\sqrt{e^3}$ と、$y=f(x)$ のグラフ 及び x 軸により囲まれた部分の面積を求めよ。

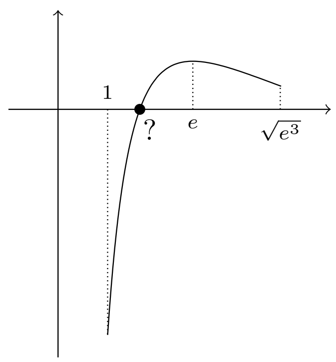
【 やっていってみよう 】

$y=f(x)$ のグラフが何処で x 軸の上になり、何処で x 軸の下になるかを知るために、$y=f(x)$ のグラフを描く。増減表を書いてみよう。

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ となるのは、$\log x=1$ つまり $x=e$。増減表は

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	$\sqrt{e^3}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$\frac{2-\sqrt{e}}{2e}$	$\searrow$	$\frac{3-e}{2\sqrt{e^3}}$



となる。

$e=2.7\cdots$ であり、またこのことから $\sqrt{e}<2$ がわかるので、
$f(1)<0$, $f(e)>0$, $f(\sqrt{e^3})>0$ である。

よって、x 軸との交点の x 座標の値がわかれば、定積分により面積が計算できる。x は方程式

$$\log x=\frac{1}{2\sqrt{e}}x \quad \cdots\cdots ②$$

の解である。どう解けば良い? 試みに対数をはずすと、

$$x=e^{\frac{1}{2\sqrt{e}}x} \quad \cdots\cdots ③$$

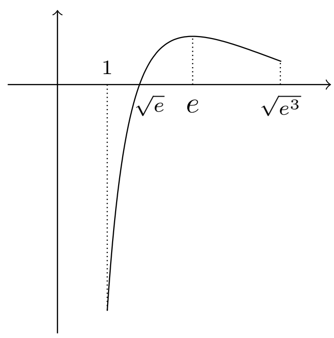
これとてどうしてよい?

しかし、$1<x<e$ では狭義単調増加なので、どんな方法でもよいから一つ見つければそれが求める解。当てずっぽうで構わないから見つけられたらラッキー。x に何個か代入してヒットしたら儲けもの。$\frac{1}{2\sqrt{e}}$ に log がないので、$\frac{\log x}{x}$ も log が残らないような x を考えないといけない。そんな気持ちで①, ②, ③を見ていると、①で分母が気になり、$x=\sqrt{e}$ が解になっているかも知れない気がしてくる。実際計算すると、$f(\sqrt{2})=0$ はすぐ分かり、ＯK!!

以上を整理して次の解答が書ける。

【 解答 】

$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ より、$f'(x)=0$ となるのは $x=e$ である。増減表は



x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	$\sqrt{e^3}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$\frac{2-\sqrt{e}}{2e}$	$\searrow$	$\frac{3-e}{2\sqrt{e^3}}$

となる。$e=2.7\cdots$ より、$\sqrt{e}<2$ がわかり、$f(1)<0$,$f(e)>0$, $f(\sqrt{e^3})>0$ である。また、$f(\sqrt{2})=0$。なので、$y=f(x)$ のグラフの概形は右のグラフになる。よって、求める面積は

$$-\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{\log x}{x}-\frac{1}{2\sqrt{e}}\right)dx+\int_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e^3}}\left(\frac{\log x}{x}-\frac{1}{2\sqrt{e}}\right)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{2}(\log x)^2-\frac{1}{2\sqrt{e}}x\right]_1^{\sqrt{e}}+\left[\frac{1}{2}(\log x)^2-\frac{1}{2\sqrt{e}}x\right]_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e^3}}$$

$$=-\left[\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\right\}-\left(-\frac{1}{2\sqrt{e}}\right)\right]+\left[\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}\right)-\frac{e}{2}\right\}-\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\right\}\right]$$

$$=\frac{15}{8}-\frac{1}{2}e-\frac{1}{2\sqrt{e}}$$

（本教材作成の思い）

x 軸の交点を求める際に、今まで解いたことのないタイプの方程式だからといって諦めるのではなく、理由なんてどうでもいいから何か一つ見つけたらいいだろ、という気持ちでやっていける気力を持てるようになって欲しい。

【 **やってみる力養成問題 2** 】夏季講習問題 (高 1 or 2：指数・対数未学習)

(1) x, y が正の数であるとき、$\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)+\left(1-\frac{1}{y}\right)}{x+y}$ の最大値を求めよ。

(2) x, y, z が正の数であるとき、$\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)+\left(1-\frac{1}{y}\right)+\left(1-\frac{1}{z}\right)}{x+y+z}$ の最大値を求めよ。

【 **（普通に）解答** 】

(1) $$与式=\frac{2}{x+y}-\frac{1}{xy}\leqq\frac{1}{\sqrt{xy}}-\frac{1}{xy}$$ （∵ 相加平均と相乗平均の関係 ） …… ④

ここで $t=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ とおくと、

$$④の右辺=t-t^2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqq\frac{1}{4}$$ …… ⑤

$$\therefore\ \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)+\left(1-\frac{1}{y}\right)}{x+y}\leqq\frac{1}{4}$$ （∵ ④, ⑤ ） …… ⑥

$x=y=2$ のとき、⑥ の等号が成立するのは明らか。

よって、求める最大値は $\dfrac{1}{4}$ 。

(2) $$与式=\frac{3}{x+y+z}-\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{x+y+z}\leqq\frac{3}{x+y+z}-\frac{9}{(x+y+z)^2}$$ …… ⑦

（∵ 相加平均と調和平均の関係 ）

ここで $t=\dfrac{3}{x+y+z}$ とおくと、⑦の右辺は⑤と同じ t の 2 次式になるので、

$$\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)+\left(1-\frac{1}{y}\right)+\left(1-\frac{1}{z}\right)}{x+y+z}\leqq\frac{1}{4}$$ …… ⑧

$x=y=z=2$ のとき、⑥ の等号が成立するのは明らか。

よって、求める最大値は $\dfrac{1}{4}$ 。

【 どこがやってみる力の養成 ？ 】

これは、今から 30 年前、高校教員時代に夏季講習の問題の一つとして出した問題。当時、「夏季講習をするなら難問解決を目指すクラスを設けて講習をしたい」とわがままを言い、普通の講習クラスとは別に特別クラス設置を許して頂いたクラスで出したもの。

この問題、かつて数学セミナーのエレガントな解答を求む、に出題されたことがあり、それほど難しくないので、肩慣らしに解かせてみようと思って出した。

しかし、まだ、指数・対数を学習していない段階の生徒で、2 つの文字の相加平均・相乗平均・調和平均の関係は知っているが、3 つの場合は教えていない。3 乗根を教えて処理することも出来ないわけではないが、時間を取り過ぎる。相加平均・調和平均の関係ならコーシーシュワルツの不等式を使って示せるが、それを小問設定して出していないので、それを使えば解ける、と生徒に言うのはちょっと酷だろう。明日、講習の時間にゴメン、小問付け加える、ということで処理するかと考えていて、次の考えに到った。

これくらいの元気さを持ってくれるのんを期待してええんちゃうか！

【 講習で生徒にした (2) の解説 】

これまで、文字のバランスが綺麗にとれてる式の最大値・最小値はそれらの全ての文字が相等しいときに起こってたと思わへんか。(1) も $x=y$ の時やった。(2) もそうちゃうかなと期待してみよか。そしたら、

$$与式=\frac{3-\dfrac{3}{x}}{3x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$$

ここで $t=\dfrac{1}{x}$ とおいたら、(1) の時と同じ t の 2 次式やから、最大値は $\dfrac{1}{4}$ と期待でける。そこでや、$\dfrac{1}{4}$ が最大値やと断言するには何がわかったらええんや。次の二つやと思うけど、どうや?

- x,y,z が正の数なら

$$\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\left(1-\dfrac{1}{y}\right)+\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}{x+y+z}\leqq\frac{1}{4} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

- ⑨の等号を成立させる正の数 x,y,z がある。

$x=y=z=2$ のとき、与式 $=\dfrac{1}{4}$ なので、⑨ の等号を成立させる x,y,z は存在する。よって、⑨の不等式を示せば、最大値が $\dfrac{1}{4}$ であると断言できる。やってみよう。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}-\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\left(1-\dfrac{1}{y}\right)+\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}{x+y+z}\\&=\frac{yzx^2+zxy^2+xyz^2+4xy+4yz+4zx-12xyz}{4xyz(x+y+z)}\\&=\frac{yz(x-2)^2+zx(y-2)^2+xy(z-2)^2}{4xyz(x+y+z)}\geqq 0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ⑩\end{aligned}$$

これで⑨ が示せた。しかも、⑩の分子の 3 項はいずれも 0 以上であるから、等号成立条件は $x=y=z=2$ であることがわかる。

（本教材紹介の思い）

予測し（仮説を立て）、検証する　が科学では大切と言うなら、上記方法はまさしく科学的。

お行儀の良い求め方ばかりではなく、こんな視点で問題解決できる能力を養成することも時々あって良いのではないか。