

第 119 回数学教育実践研究会

こんな授業をしてみたい
芳賀の定理（折り紙）

レポート

令和 3 年 11 月 27 日 (土)

Zoom 会議

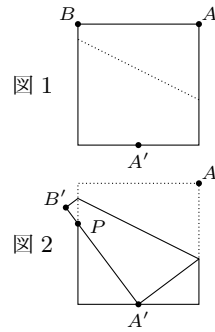
数実研会員 安田富久一

本レポートは、折り紙で3等分点を求める芳賀の定理に関して当時勤務していた大学生へのレポート課題(2016年6月4日(土)第97回本研究会で紹介してある)を大学受験を終えた進学者に行う授業を想定して作成したものである。

芳賀の第1定理<3等分点：折り紙>

正方形の折り紙の頂点 A を、 A が乗っていない辺の中点 A' に重ねる。右図で言うと、図1の折り紙があり、図1の A を A' に重ねるように点線で折ると図2になる(元の辺 AB が折った後に辺 $A'B'$ になっている)。

このとき、辺 $A'B'$ と折り紙の左端の辺との交点を P とすると、点 P は元の折り紙の左端の辺の3等分点になっている。



【授業の流れ】(上記内容は授業開始時には伏せておく)

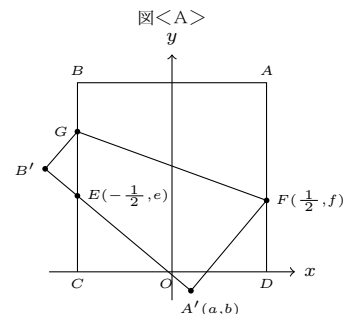
- (1) A4の紙から1辺15cmの正方形を切り出させる。(15cm:下記(3)を有効に進めるための作戦)
- (2) 図1、図2を折らせ、点Pを打たせ、BPの長さを測らせる。
- (3) この折り紙で数学の図形としてどんな点が見つけられることになると思うか予想させる。
- (4) 証明を一緒に考える
(切り抜いて折った紙に色ボールで補筆等、気づくことを発言させ、等辺や比、相似など見つけて遊ぶ)。
- (5) 芳賀の定理に関係する話(発見はいつ頃等)を紹介する。
- (6) 『ある線分を3等分したいとき、この折り紙の手法できっちり3等分が作図出来るねえ』と言う。
 - (i) 『きっちり言い過ぎ』という生徒がいた場合
「そやなあ、 A を A' にきっちり置くのほとんど無理やなあ」と言い、次の誤差の話に進む。
 - (ii) 生徒が皆頷いた場合
少し間をとり『ほんまかあ?』と聞き返し、上記(i)の内容に話しを持って行く。
- (7) 「芳賀の定理凄いけど、実際に折り紙してきっちり3等分になってくれるのは望み薄やなあ」
- (8) その場の雰囲気次のように進んでいくようにする: 科学者になった気分で、遊んでみひんか? 実際にこの A が A' からちょっとずれたら P はどれくらいずれるんやろ?
- (9) 『ちょっとしかずれない』, 『ちょっとってどれくらい』, 『1mmくらいはずれるかなあ』, ... などの発言があれば嬉しい。
- (10) 『どれくらいずれるか計算出来ないんだろうか?』という発言が出てきたら最高に嬉しい。少ししても出て来ないときは自分の方から言う。
- (11) 次のような問題を生徒と一緒に作る(難しい→小問を作って本題に迫る問題解決方法を味わわせる)

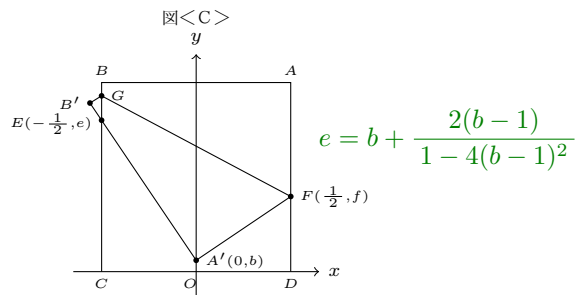
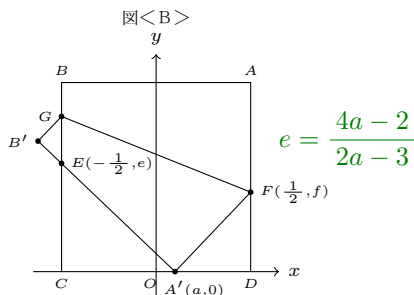
【問題】折ったときに頂点が辺の中点からずれた時の3等分点の誤差を調べよう(右図<A>)。

1辺の長さ1の正方形 $ABCD$ 。 E の y 座標 e を a, b で表せ。

いきなりこれだと難しい → 簡単な場合を考えてみよう。

- (i) A' は O からずれたが、辺 CD 上にある: 下図
 $A'(a, 0)$ のとき、 e を a で表せ。
- (ii) A' は O からずれたが、 y 軸上にある: 下図<C>
 $A'(0, b)$ のとき、 e を b で表せ。





(iii) 一般の位置に A' がある：前ページ図<A>

$A'(a, b)$ のとき、 e を a, b で表せ。

(ちょっとずれた処 → ぼやかして → 一般の位置：大らかさが時に処理しやすさを提供する)

(答) $e = b - \frac{2(b-1)(4a^2-1)}{(2a-1)^2-4(b-1)^2}$

(12) e の場所が数式化された。我々の興味・関心の対象は何だったか生徒に問いかける。

(13) 3等分点とどれだけずれるか：誤差、が興味・関心の対象

上記 (i), (ii), (iii) の答と $\frac{2}{3}$ の差： $\left| e - \frac{2}{3} \right|$

(i) $e(a, 0) = \left| \frac{8a}{6a-9} \right| = \frac{4}{3} \left| \frac{a}{2a-3} \right|$

(ii) $e(0, b) = \left| \frac{12b^3 - 32b^2 + 19b}{3(4b^2 - 8b + 3)} \right|$

(iii) $e(a, b) = \left| \frac{12(b^3 + ba^2) - 4(8b^2 - 3ba + 4a^2) + (19b - 8a)}{3\{4(b^2 - a^2) - 4(2b - a) + 3\}} \right|$

『うわあ、絶対値だ、嫌だなあ』と誰かが行ってくれない場合は、

「絶対値や、嫌やないかあ」とこちらが**作戦的**に言う。

(14) 『ちなみに、(iii) の $e(a, b)$ の式の右辺に $b = 0$ 代入したら、(i) の右辺の式になってるやろか。』確認させる。

『もし、そうなってへんかったら、どういうことなんやろ?』 (『(i) か (iii) のどちらかで考え違いか、計算ミスしたと言うことです』という回答を期待)：検算というものを教えた

(15) (i) 絶対値をはずすために、 $\frac{a}{2a-3} > 0$ の不等式を解く。

$\frac{3}{2} < a$ のときが解の一部として出てくるが、 a の正負のみで場合分けしたい。

(『 O の近くを考えてるから、 $\frac{3}{2} < a$ の場合を考える必要はないのじゃないか』という意見が出てくることを期待したい。出て来なければ自分が語る)

$$e(a, 0) = \begin{cases} \frac{8a}{6a-9} & (a > 0: A' \text{ が } O \text{ の右に少しずれたとき}) \\ -\frac{8a}{6a-9} & (a < 0: A' \text{ が } O \text{ の左に少しずれたとき}) \end{cases}$$

(16) (ii) 絶対値をはずす事を考える。 $e(0, b) = \left| \frac{b(12b^2 - 32b + 19)}{3(4b^2 - 8b + 3)} \right|$ より、 $\frac{12b^2 - 32b + 19}{4b^2 - 8b + 3}$ の分母、分子の正負を考えさせる。

($b = 0$ のとき分数は $\frac{19}{3} > 0$ なので、 b が 0 に近いなら正の数だと気づいて欲しい)

$$e(0, b) = \begin{cases} \frac{12b^3 - 32b^2 + 19b}{3(4b^2 - 8b + 3)} & (b > 0: A' \text{ が } O \text{ の上に少しずれたとき}) \\ -\frac{12b^3 - 32b^2 + 19b}{3(4b^2 - 8b + 3)} & (b < 0: A' \text{ が } O \text{ の下に少しずれたとき}) \end{cases}$$

(17) 「ところで、ずれてしまうんやったら、横にずれた方がええんやろか、縦の方がええんやろか?」

“ O からの横ずれ・縦ずれに関する**誤差の増え方** (スピード) に注目する生徒の会話を期待”。

(18) $e(a, 0) = \frac{8a}{6a-9}$, $e(0, b) = \frac{12b^3 - 32b^2 + 19b}{3(4b^2 - 8b + 3)}$ それぞれについて、 $a = 0$ での微分係数、 $b = 0$ での

微分係数を求めさせ、横にずれる方が良いか、縦にずれる方が良いか、考えさせる。

$e'(a, 0)$, $e'(0, b)$ の分数の微分計算をして $a = 0$, $b = 0$ を代入して求めるだろう：私の予想。生徒が計算した後で、微分係数の定義にしたがって計算した方が楽なことがあるのを知らす。もし、微分係数で計算した生徒がいれば、その方法を紹介し、賞める。

(i) $e(a, 0)$ の微係数 $= \frac{8}{9}$ 、(ii) $e(0, b)$ の微係数 $= \frac{19}{9}$ 。

縦の方が横より $\frac{19}{8} \doteq 2.4$ で 2 倍以上速く誤差が増える。

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\frac{12b^3 - 32b^2 + 19b}{3(4b^2 - 8b + 3)} - 0}{b - 0} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{12b^2 - 32b + 19}{3(4b^2 - 8b + 3)} = \frac{19}{3}$$

<以降、具体的な計算や計算結果等は示さない。2016 年 6 月 4 日（土）第 97 回本研究会での私のレポート>

(19) 「これで折り紙で 3 等分見つけるとき、横より縦にずれへんようにして折るのが大事ということがわかったんやねえ」

『横と縦だけではなく、斜め方向も考えるべきじゃないだろうか』という意見、期待したい

(i) 斜め方向はどうやって考える？

(ii) 例えば、 x 軸と 30° の方向にずれる場合、どんなことを考えていく？

(iii) $(r \cos 30^\circ, r \sin 30^\circ)$ は今考えている方向にスピード 1 で点に変化するから、 $e\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r, \frac{1}{2}r\right)$ の $r = 0$ での微分係数を求めたら、この方向での誤差のスピードが出てくる。

(iv) 一般に $e(r \cos \theta, r \sin \theta)$ の $r = 0$ での微分係数を求めたら、 x 軸と角 θ の方向にずれる場合の誤差の増えるスピードがわかる。

(v) (iv) で得たスピードは θ の関数である。その最小値を求めれば、一番誤差が増えづらい方向になる。
 $\left(\theta = \tan^{-1} \frac{8}{19} \doteq 22.8^\circ\right)$

(20) 全レポートでは扱っていなかった問題

「毎回毎回、そのときの折り方で 3 等分点に誤差がでるんやけど、人から、どれくらい誤差って出るもんなんですか？ と尋ねられたら、何と答える？」

O からの距離 r に A' が置かれる可能性を、 r の正規分布（誤差分布）として期待値を求めさせるのが良いと当初考えたが、式が大変な式になる。そこで、 O から半径 $0.5 \cdot 10^{-2}$ 内に A' が置かれる可能性があるとして、その円内の $e(a, b)$ を足し集め（重積分）、円の面積 $0.25 \cdot 10^{-4}\pi$ で割った平均値を質問者に答える、という設定をして計算する。

（積分は累次積分、実際の計算は数式処理ソフトに頼る。数式処理ソフトというものの存在にも触れさせたい）。

<注>

- (18) で、 $e(a, 0)$ や $e(0, b)$ の微分係数を計算するが、これを将来的に大学で学ぶ偏微分というものだということを知らせ、 $\frac{\partial e}{\partial a}(0, 0)$ 及び $\frac{\partial e}{\partial b}(0, 0)$ という記号を用いて表したりするが、何のことはない、普通に考えたいことを考えていくと自然に出てくるものだということを伝えたい。
- (19) で考えたことも、大学で学習する方向微分と呼ばれるものだ伝える。

<依頼>

(20) についてですが、確率分布等を私はつい最近勉強し始めました。非常にトンチンカンなことを書いているかもしれませんが。

私が実際にこの授業が出来るチャンスが今後できるかもしれません。その授業をする前に、私の勘違いや注意した方が良く、このようにしてはどうか、などご教示頂けると幸いです。