

第 121 回数学教育実践研究会

ヘロンの公式で何を教える！

レポート

令和4年6月4日(土)

Zoom 会議

数実研会員 安田富久一

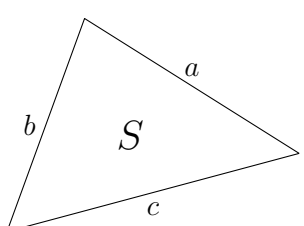
ヘロンの公式で何を教える！

『阿草の瓢箪－文化としての数学』という本（台湾で買った本であり、正式名称は本レポート最後）にあった、ヘロンの公式でいろんな教育が出来る話題を私流にまとめ直して、（私のサングラスを通して？）紹介する。

章の扉にこんな言葉があった：

数学学習での最重要事は解答の過程であり、解答それ自身ではない

ヘロンの公式

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$\left(\text{但し } s = \frac{a+b+c}{2} \right)$$


ヘロンの公式は上記であるが、話しを見易くするため、

$$S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \quad (1)$$

もヘロンの公式と呼んで話題を進める。ヘロンの公式は次のような教材になる。

危機意識・予想 & 予測・拡張精神

1 危機感覚をつける

何かを求めているとき、何かを思いついたとき、チェックをして、齟齬そごがあれば「それが正しい」という主張を棄却できる。

【次元チェック】（面積次元 = (長さ次元)²）

面積の公式を導こうとして（or 思いついて）、次の式を得た

$$S^2 = (s-a)(s-b)(s-c) \quad (2)$$

左辺は (長さ次元)⁴ なのに、右辺は (長さ次元)³。間違いにすぐ気付く。

【対称性チェック】

$$S^2 = s(s+a)(s-b)(s-c) \quad (3)$$

次元チェックは合格。

a, b, c の文字を相互に取り替えても面積は不変のはずなのに、 a と b を取り替えると異なる→間違いとわかる。

【特殊状況チェック】(正三角形など)

1 辺の長さ a の正三角形面積 = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 。(2),(3) で b, c に a を代入 $\rightarrow \neq \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 。間違いに気づく。

【極限状況チェック】(一辺を 0 に近づける)

$c \rightarrow 0$ としてみる。一辺が 0 に縮めば面積は 0 に。ヘロンの公式 (1) で $c \rightarrow 0$ とすると、

$$S^2 = \frac{(a+b)^2(a-b)^2}{16} \neq 0 ! \quad (4)$$

ヘロンの公式 ついに馬脚を露呈!

ヘロンの公式間違ってたんかあ・・・ 今まで使ってたでえ 先生の嘘つきいー!

<なんていうのを題材にしてグループ討議させても面白いかもしれません>

三角形の 2 辺の長さの和は他の一辺の長さより小さかった。

$|a-b| < c$ なので $c \rightarrow 0$ なら (4) の右辺 $\rightarrow 0$ 。ヘロンの公式は極限状況チェックでもセーフ!

2 ヘロンの公式で拡張精神を

2.1 単純拡張

4 辺の長さが a, b, c, d の四角形の面積は、次元・対称性・ヘロンの公式から次のように期待できる。

$$S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \quad \left(\text{但し, } s = \frac{a+b+c+d}{2} \right) \quad (5)$$

これは、極限状況チェックにも合格している：4 辺のうちの一つを 0 とするよう収縮させると、三角形のヘロンの公式 (1) になる。

特殊状況：正方形でチェック：4 辺の長さを等しく (5) の b, c, d に a を代入、 $S^2 = a^4 =$ (正方形面積) となって合格。

合格と思ったが、4 辺の長さが全て等しい \rightarrow 菱形 \rightarrow 面積変わる \rightarrow 不合格! : (5) は間違い。

2.2 挫折・失敗は深い研究への第 1 歩

正方形・菱形：4 辺の長さが決まっても形は定まらない (三角形との違い)。つまり、四角形の面積が 4 つの辺の長さだけで決まるはずがない。これで四角形面積のお話は一件落着?

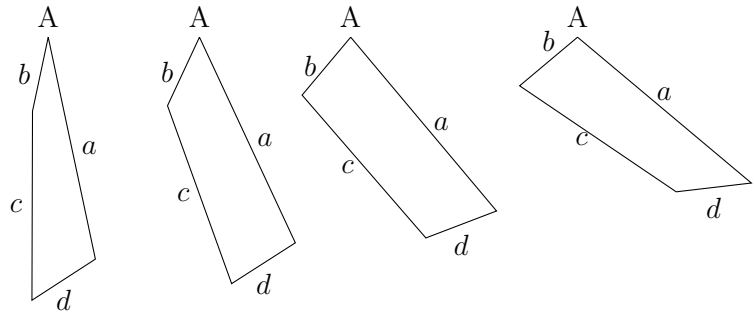
そうじゃないでしょ! 挫折はより深い研究の起点

a, b, c, d で四角形の面積は定まらないが、どんなことなら分かるだろう?

2.3 新予想：最大面積

2辺 a, b に挟まれた角を A とし A を可能な最小角度から大きくしていく（右図）と、面積は始め増加するが、ある角度を境に減少に転じる。

増加から減少に代わる所で面積は最大になる。その最大値は a, b, c, d により決まる。



特殊状況“菱形”の面積が最大になるのは正方形のときであり、隣り合う2辺の長さを固定した“平行四辺形”の面積が最大になるのは長方形のときである。そして、どちらの特殊状況の場合も拡張公式(5)はチェックに合致。

そこで、大胆に次のように予測：

予測：『(5)式は4辺の長さが a, b, c, d である四角形の最大面積を与える式である』

2.4 本当は円の内接四角形

最大面積を与える四角形はどんな特別な形だろうか？ 前節で述べた特殊例では、角 A はその向かい合う角 C と補角の関係にある。つまり、最大面積の四角形は円に内接する。問題は次のように変わる：

『円に内接する四角形の面積公式は三角形のヘロンの公式の拡張になるか？』

この主張は正しい。

右図において、

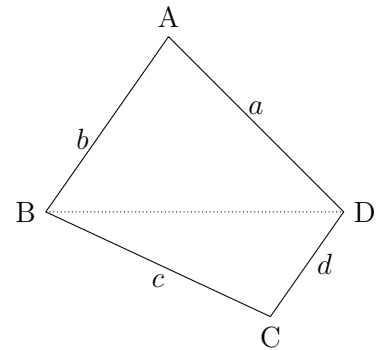
$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle A \quad (6)$$

$$\begin{aligned} BD^2 &= c^2 + d^2 - 2cd \cos \angle C \\ &= c^2 + d^2 + 2cd \cos \angle A \quad (\because \angle A + \angle C = 180^\circ) \end{aligned} \quad (7)$$

(7)-(6)より、 $\cos \angle A = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$ が得られ、

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \angle A + \frac{1}{2}cd \sin \angle C = \frac{ab + cd}{2} \sin \angle A \quad \therefore S^2 = \frac{(ab + cd)^2}{4} (1 - \cos^2 \angle A)$$

に代入して変形すれば(5)となる。



2.5 一般の四角形の面積公式（拡張公式）

$\angle A + \angle C = 180^\circ$ ではない場合も上述の方法を真似て一般の四角形の面積公式が得られる。

$$S^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \cdot \cos^2 \frac{A + C}{2}$$

これから、4辺の長さが与えられた四角形の中で最大面積がヘロンの公式拡張版(5)だとわかる。

3 ヘロンの公式を作りだそう！

(1) 【対称性・因子次元】

- S は a, b, c についての 2 次対称式である。
- 2 次の基本となる対称式は、 $a^2 + b^2 + c^2$ と $ab + bc + ca$ 。
- 一般に 2 次対称式は次のように表せる。

$$\alpha(a^2 + b^2 + c^2) + \beta(ab + bc + ca) \tag{8}$$

(2) 【特殊状況】

面積 = 0 となる特殊状況： $a = b = 1, c = 0$ と $a = b = 1, c = 2$ を考え、(8) に代入すると、

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 6\alpha + 5\beta = 0 \end{cases} \tag{9}$$

連立方程式を解くと、 $\alpha = \beta = 0$ となる。

2 次対称式ではヘロンの公式は表現できない！

(3) 【諦めない！】

一歩進めて、 a, b, c の 4 次対象式に根号を付けたもの

$$S^2 = \alpha(a^2bc + ab^2c + abc^2) + \beta(a^3b + a^3c + ab^3 + cb^3 + c^2b^2) + \gamma(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2) + \delta(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)$$

としてやってみよう。

特殊状況： $(a, b, c) = (1, 1, 0), (1, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 2, 3)$ を考えてみる。

$$\begin{cases} \beta + 2\gamma + 2\delta = 0 \\ 8\alpha + 9\beta + 22\gamma + 18\delta = 0 \\ 3\alpha + 3\beta + 6\gamma + 3\delta = \frac{3}{16} \\ 36\alpha + 49\beta + 118\gamma + 98\delta = 0 \end{cases} \tag{10}$$

この連立方程式を解くと、 $\alpha = 0, \beta = \frac{2}{16}, \gamma = 0, \delta = -\frac{1}{16}$

$$\begin{aligned} \therefore S^2 &= \frac{2}{16}(a^3b + a^3c + ab^3 + cb^3 + c^2b^2) - \frac{1}{16}(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \\ &= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16} \\ &= s(s-a)(s-b)(s-c) \end{aligned}$$

これはまさしくヘロンの公式。

4 何を学んだ！

ヘロンの公式の議論は我々に幾つもの学びを与えてくれる。

- (1) 因子次元・対称性・特殊状況・極限などのチェック法がある。また、それはどう使うか。
- (2) 予想に対称性・因子次元・特殊状況・極限を利用し齟齬を生じさせない。
- (3) 拡張をしよう。
- (4) 失敗は、“より深く研究する” 起点とし、頑張ろう！

5 本書について

このような議論は、公式の導出・暗記に比べ、明らかに面白く、かつまた大切である。

と本では語っている。この本の正式名称等は以下の通り。

『阿草的葫蘆－文化活動中の数学』曹亮吉(著)

財団法人遠哲科学教育基金会（出版）2000年4月 第2版