

第 124 回数学教育実践研究会

誤差 と ガウス関数

レポート

令和 5 年 1 月 28 日 (土)

Zoom 会議

数実研会員 安田富久一

1 動機

旧版の教科書数学Bの“確率分布と統計的な推測”に、次のような節末コラムがある：

—— ガウス分布 ——

正規分布は「ガウス分布」と呼ばれることもあります。

ドイツの数学者ガウス（1777年～1855年）が、測定誤差の研究中に発見しました。鶏の卵の重さや人間の身長など、自然発生した数量の分布は、近似的に正規分布に従う事が知られています。

また、ある規格の製品について、規格の数値と実際の製品の数値との誤差の分布を調べると、それは正規分布で近似されます。

あなたの身のまわりのデータについて、そのことを確認してみましょう。

正規分布（ガウス分布）の密度関数は $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$ であり、2項分布 ${}_nC_r p^r q^{n-r}$ の n が非常に大きい場合に近似になるという、中心極限定理：

$$\sqrt{npq} {}_nC_x p^x q^{n-x} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}} \right)^2}$$

の証明はいろいろ見かけるが、誤差との関係から密度関数をどのように導出するか不明であった。ネット検索していて、新潟大学工学部技術職員の野本隆宏氏による説明を見つけた¹⁾。非常に小気味よい導出であった。自分流に書き換えて以下に紹介する。

2 ガウス分布の導出

2.1 誤差の公理

真の値 X をもつある量の測定を行う。測定に伴う誤差について経験にもとづく次のガウスの公理がある：

—— ガウスの公理 ——

- (i) 大きさの等しい正と負の誤差は等しい確率で生じる。
- (ii) 小さい誤差は大きい誤差より起こりやすい。
- (iii) ある限界値より大きな誤差は実際上起こらない。

1) <https://www.eng.niigata-u.ac.jp/nomoto/7.html>

ある測定をして得られた測定値を x とする。誤差 ε は $\varepsilon = x - X$ である。誤差が発生する確率を誤差 ε の関数とし、その確率密度関数を $f(\varepsilon)$ と置く。誤差が $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ に入る確率は $f(\varepsilon)d\varepsilon$ である。 $d\varepsilon = dx$ なので、確率は $f(x - X)dx$ である。

目標は確率密度関数 $f(x)$ を求めることである。

2.2 n 回試行

同じ条件で測定を n 回行い、測定値が x_1, x_2, \dots, x_n から dx の範囲に入る確率は

$$f(x_1 - X)dx \cdot f(x_2 - X)dx \cdots f(x_n - X)dx$$

であり確率密度関数は $P = f(x_1 - X) \cdot f(x_2 - X) \cdots f(x_n - X)$ である。真の値 X は観測値の平均 \bar{x} として推定する。つまり、 \bar{x} は

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \quad (1)$$

である。ガウスの公理 (i),(ii) より、 $P = f(x_1 - X) \cdot f(x_2 - X) \cdots f(x_n - X)$ は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = X$ のときに最大値を取る。

P の X を変数と見て、経験則：“ $P(X)$ は $X = \bar{x}$ で最大値を取る”を適用しよう。つまり $P'(\bar{x}) = 0$ を条件に課す。

$$\begin{aligned} P'(X) &= -P(X) \sum_{k=1}^n \frac{f'(x_k - X)}{f(x_k - X)} \\ \therefore \sum_{k=1}^n \frac{f'(x_k - \bar{x})}{f(x_k - \bar{x})} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

2.3 関数方程式

ここで、 $F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ とおき、 $X_k = x_k - \bar{x}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) とおくと、(2) は $\sum_{k=1}^n F(X_k) = 0$ と表せる。(1) は $\sum_{k=1}^n X_k = 0$ と同値である。つまり、 F は次の関数方程式を満たすことがわかった。

$$\sum_{k=1}^n X_k = 0 \implies \sum_{k=1}^n F(X_k) = 0 \quad (3)$$

関数方程式 (3) を満たす関数がどんな関数かが決定できれば良い。

関数 $F(x)$ が連続であることも条件に課して話しを進めることにする。

2.4 関数方程式を解く

任意の n について (3) は成り立つので、必要条件として $n = 3$ の場合を考えてみる。つまり、次のことが成り立つ。

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0 \implies F(X_1) + F(X_2) + F(X_3) = 0 \quad (4)$$

(4) で $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ のときを考えると、 $3F(0) = 0$ つまり

$$F(0) = 0 \quad (5)$$

がわかる。また、(4) で $X_1 = X$, $X_2 = -X$, $X_3 = 0$ のときを考えると、(5) を加味して、任意の X に対して

$$F(-X) = -F(X) \quad (6)$$

が成り立つことがわかる。(4) の条件は $X_3 = -(X_1 + X_2)$ と同値であるから、今得た(6) から、(4) は次と同値である。

$$F(X_1 + X_2) = F(X_1) + F(X_2) \quad (7)$$

(7) は有名なコーシーの関数方程式で、 $F(X)$ が連続であれば、定数 a が存在して $F(x) = ax$ となる (大学入試に出されたりする。解の導出例：p.5 を参照)。

2.5 $f(x)$ の実像浮揚

$F(x) = ax$ であることがわかったので、 $F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ であったことを思い出すと

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= ax \\ (\log f(x))' &= \frac{f'(x)}{f(x)} \\ \therefore \log f(x) &= \frac{a}{2}x^2 + C \\ \therefore f(x) &= C'e^{\frac{a}{2}x^2} \quad (\text{但し、} C' = e^C) \end{aligned} \quad (8)$$

次に、(8) は $n \neq 3$ の場合にも (3) の元の条件である $P'(x) = 0$ を満たすことを調べる。

$$\begin{aligned} P(X) &= \prod_{k=1}^n C'e^{\frac{a}{2}(x_k - X)^2} \\ P'(X) &= \sum_{i=1}^n \left\{ -a(x_i - X) \prod_{k=1}^n C'e^{\frac{a}{2}(x_k - X)^2} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \{-a(x_i - X)\} \prod_{k=1}^n C'e^{\frac{a}{2}(x_k - X)^2} \\ &= -a \{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - nX\} \prod_{k=1}^n C'e^{\frac{a}{2}(x_k - X)^2} \end{aligned}$$

よって、 $P'(\bar{x}) = 0$ である (任意の自然数 n について)。

$f(x)$ がどんな関数か臆気ながら (8) という姿を見せてきた (まだ、必要条件でしかない)。十分条件の確認作業：ガウスの公理を満たすかどうかのチェックが残っている。

2.6 $f(x)$ の結像

(8) のとき、 $f(x)$ は偶関数であり、ガウスの公理 (i) は満たされている。公理 (ii) については $f(x)$ が単調減少関数であることを要求されるが、(8) の場合 $a < 0$ であることと同値。また、 $a < 0$ であれば、 $\lim_{|x| \rightarrow 0} f(x) = 0$ であり、ガウスの公理 (iii) は自動的に満たされる。この後の式変形等で見やすくする為に、 $a < 0$ を考慮して $f(x)$ を次のように表しておく。

$$f(x) = C' e^{-\frac{a}{2} x^2} \quad (\text{但し、} a > 0) \quad (9)$$

最後に、密度関数であるための条件を調べよう。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} C' e^{-\frac{a}{2} x^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{a}} C' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (x = \sqrt{\frac{2}{a}} t \text{ と置換}) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{a}} C' \quad (\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} : p.6 \text{付録を参照}) \end{aligned} \quad (10)$$

密度関数である為に $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ が条件となる。

$$\sqrt{\frac{2\pi}{a}} C' = 1 \quad \therefore C' = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \quad (11)$$

以上で $f(x)$ の姿が明らかになった。 $f(x)$ は (9),(11) より、

$$f(x) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} e^{-\frac{a}{2} x^2} \quad (\text{但し、} a > 0) \quad (12)$$

この分布の平均が 0 であるのは明らかで、分散 σ^2 を計算すると、

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a}{2} x^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow -\infty}} \left\{ \left[-\frac{2}{a} x e^{-\frac{a}{2} x^2} \right]_q^p - \int_q^p \left(-\frac{1}{a} e^{-\frac{a}{2} x^2} \right) dx \right\} \\ &= \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \cdot \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2} x^2} dx \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

よって、(12) を σ で表し直すと $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ であり、分布の平均が m の場合： $N(m, \sigma^2)$ のときの密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

誤差と正規分布密度関数の関係は以上で終わる。

最後に (7) の所で使ったコーシーの関数方程式について記す。

2.7 コーシーの関数方程式

\mathbb{R} で定義された連続関数 $f(x)$ で、任意の x, y に対して

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (13)$$

を満たす関数は $f(x) = ax$ (但し、 a は定数) というタイプのものしかないことが示せる (このタイプの関数が (13) を満たすことは明らか)。(13) は “コーシーの関数方程式” と呼ばれている。

(コーシーの関数方程式の解が $f(x) = ax$ であることの証明)

(13) で $y = 0$ の場合を考えると $f(x) = f(x) + f(0)$ なので、

$$f(0) = 0 \quad (14)$$

が成り立つ。(13) で $y = -x$ の場合を考えると $f(0) = f(x) + f(-x)$ であり、(14) より

$$f(-x) = -f(x) \quad (15)$$

が成り立つ。(13) を利用すると、数学的帰納法により任意の実数 x と任意の自然数 n について、

$$f(nx) = nf(x) \quad (16)$$

が成り立つことがわかる。このことから、任意の自然数について、 $f(n) = f(1) \cdot n$ が成り立つ。ここで、 $f(1) = a$ とおくと、 $f(n) = an$ となるが、(14),(15) から n が全ての整数のときにもなり立つことは明らかなので、任意の整数 n について

$$f(n) = an \quad (n \text{ は任意の整数}) \quad (17)$$

がなりたつ。(16) で $x = \frac{1}{n}$ とすると $a = nf\left(\frac{1}{n}\right)$ となり、任意の自然数 n について

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = a \cdot \frac{1}{n} \quad (18)$$

がなりたつ。 m を任意の自然数として、(16) において $x = \frac{1}{m}$ を考えると、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n}{m}\right) &= nf\left(\frac{1}{m}\right) \\ &= a \cdot \frac{n}{m} \quad (\because (18)) \end{aligned}$$

が得られ、任意の正の有理数 p について、 $f(p) = ap$ が成り立ち、(15) より

$$f(p) = ap \quad (p \text{ は任意の有理数}) \quad (19)$$

であることがわかる。

x を任意の実数とする。このとき、数列 $\{x_n\}$ で、どの x_n も有理数であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ となるものがある。

$$f(x_n) = ax_n \quad (\because (19)) \quad (20)$$

f は連続関数であったから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \\ &= f(x) \end{aligned} \quad (21)$$

(20) の両辺において $\lim_{n \rightarrow \infty}$ をとると、(21) より、

$$f(x) = ax$$

がわかり、証明された。

(注) $f(x)$ が微分可能だとわかっていた場合は証明は次のようにずっと簡単になる。

p を任意の定数として (13) において $y = p$ とすると、

$$f(x+p) = f(x) + f(p)$$

となる。ここで、両辺は x の微分可能な関数であり、両辺を微分すると、

$$f'(x+p) = f'(x)$$

p は任意の定数であったので、上式は $f'(x)$ が定数関数であることを示している。よって、 $f'(x) = a$ (a : 定数) とおくと、 $f(x) = ax + b$ (a, b : 定数) がわかる。(14) より $b = 0$ がわかり、

$$f(x) = ax$$

が示される。

2.8 付録 (ガウス積分の値を高校で)

(10) で、 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ を使った。広義積分で高校の範囲を超えるが、積分範囲に ∞ が登場するだけで、入試問題としては逸脱事項になったとしても、高校数学の (極く自然な) 延長線上の理解可能事項だと思う。運算自身にそう面倒や厄介はなさそうなので、探求・考究として扱えると思っている。

xy 平面と曲面 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ で囲まれた体積 V を二つの方法: ある方向を軸として、軸に垂直な平面で切った切り口の断面積を積分する方法であり、その方向を 2 種類用意して求める。

< z 軸に垂直な平面 $z = t$ ($0 < t \leq 1$) の切り口面積を t で積分 >

平面 $z = t$ での局面 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ の切り口は

$$e^{-(x^2+y^2)} = t \quad \therefore x^2 + y^2 = -\log t$$

で、半径 $\sqrt{-\log t}$ の円であり、切り口の面積は $-\pi \log t$ となる。よって、

$$V = \int_0^1 (-\pi \log t) dt = -\pi \left[t \log t - t \right]_0^1 = \pi - \lim_{r \rightarrow +0} r \log r = \pi \quad (22)$$

< x 軸に垂直な平面 $x = t$ の切り口面積を t で積分 >

平面 $x = t$ での局面 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ の切り口は $z = e^{-(t^2+y^2)}$ でその面積は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+y^2)} dy = e^{-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

となる。よって、

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 \quad (23)$$

(22),(23) より

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 = \pi \quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$