二度美味しいニュートン法

NPO 数学みえる化プロジェクト
安田富久一

$\sqrt{2}$ に収束し、$\sqrt{2}$ の近似値を求めるのに使える次の漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right) \\ a_1 = \dfrac{3}{2} \end{cases} \tag{1}$$

はニュートン法という名で知られる方程式の解を求める方法の特別の場合である。これまで、この漸化式に関して数実研で何度もその側面を紹介してきた。

今回は、次の二つについて紹介する。

(I) 数 I の教科書にある $\sqrt{2} = 1.41421356237309$ の確認の面倒臭さに関する報告

(II) デデキントの切断（or 区間縮小法）での使い道の報告

【 I 】

a_1	$\dfrac{3}{2}$	1.5
a_2	$\dfrac{17}{12}$	$1.41\dot{6}$
a_3	$\dfrac{577}{408}$	$1.4142156862745\cdots$
a_4	$\dfrac{665857}{470832}$	$1.4142135623746\cdots$
a_5	$\dfrac{886731088897}{627013566048}$	$1.41421356237309\cdots$

第 123 回の本研究会で『近似値遊び』というタイトルで同じ漸化式について、初期値を $a_1 = \dfrac{7}{5}$ にとると非常に良い速さで $\sqrt{2}$ に近づき、しかもその確認（誤差の不等式評価）がうまくいくことを報告した。速さは少し劣るが、$a_1 = \dfrac{3}{2}$ の方が更に見易いことがわかったので報告する。上記 a_4 では暗記語呂合わせの所まで正確であることが次のようにわかる。

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{{a_n}^2 - 2\sqrt{2}a_n + 2}{2a_n} = \frac{1}{2a_n}(a_n - \sqrt{2})^2$$

$$a_2 - \sqrt{2} = \frac{1}{2a_1}(a_1 - \sqrt{2})^2$$

$$a_3 - \sqrt{2} = \frac{1}{2a_2}(a_2 - \sqrt{2})^2 = \frac{(a_1 - \sqrt{2})^4}{2a_2 \cdot 4{a_1}^2}$$

$$a_4 - \sqrt{2} = \frac{1}{2a_3}(a_3 - \sqrt{2})^2 = \frac{(a_1 - \sqrt{2})^8}{2a_3 \cdot 4{a_2}^2 \cdot 16{a_1}^4}$$

$0 < a_1 - \sqrt{2} < 1.5 - 1.4 = 0.1$ であり、相加平均相乗平均の関係を漸化式に適用すると $a_n \geqq \sqrt{2}$ 。

$$\left|a_4-\sqrt{2}\right|<\frac{(1.5-1.4)^4}{2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}^2}=\frac{0.1^8\cdot\sqrt{2}}{4\cdot 8\cdot 4\cdot 16}<\frac{0.1^9}{128}<\frac{0.1^9}{100}<0.1^{11}$$

$$0<a_4-\sqrt{2}<0.1^{11}=0.00000000001$$

$$a_4-0.00000000001<\sqrt{2}<a_4 \quad , \quad a_4=1.41421356237469$$

$$1.41421356236469<\sqrt{2}<1.41421356237469$$

$$\therefore\ \sqrt{2}=1.4142135623$$

教科書にある $a_5=1.41421356237309$ も同様。

【 II 】　デデキントの切断による実数の定義は

デデキントの切断

有理数の集合を $\mathbb{Q}$ とし $\mathbb{Q}$ を 2 つの部分集合 A,B に分ける方法として，次の制約を課す。この制約を満たす組分けを (A,B) と表し，デデキントの切断と呼ぶ。

(i) $A\neq\emptyset, B\neq\emptyset$ 。（$\emptyset$：空集合）

(ii) $U=A\cup B \quad , \quad A\cap B=\emptyset$

(iii) 任意の $a\in A$, 任意の $b\in B$ について $a<b$ が成り立つ。

この切断 (A,B) を実数と言う。

というもので、A に最大有理数があるか B に最小有理数がある場合、その切断をこれまでの有理数と同一視し有理数と呼ぶ、そうでない切断を無理数と呼ぶ。として有理数の世界から実数の世界を構成するものであった。

では、デデキントの切断により有理数以外の数無理数が存在することになるのか確認するとき、具体的に無理数を表す切断の例として、

$$A=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2<2\text{ または }x\geqq 0\} \quad , \quad B=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2>2\ ,\ x>0\}$$

が例として挙げられる。この (A,B) が制約 (i),(ii),(iii) を満たしているのは明らか。そこで、A に最大有理数はなく B に最小有理数もないことを確認しよう。

$p\in A$ とする。$p>0$ であることは明らか。(1) で $a_1=p$ として a_2 を求め、$q=\dfrac{2}{a_2}$ とおくと、$q\in\mathbb{Q}$ かつ $p<q$ が簡単にわかり、A に最大数がないことがわかる。

また、$p\in B$ として先ほどと同様に (1) で $a_1=p$ として a_2 を求め、$q=a_2$ とおくと、$q\in\mathbb{Q}$ かつ $p>q$ が簡単にわかり、A に最小数がないことがわかる。

これは、ちょうど正の数 x と $\dfrac{2}{x}$ が $\sqrt{2}$ の積の意味での対称の中心に当たり、この 2 数の相加平均がニュートン法になっていることで思いついた例であり、紹介した。

この対称という視点は、本研究会第 122 回で話した『対称のいろいろの姿』で紹介したが、台湾で買ってきた数学啓蒙書で知ったものである。