最大のものを得る（フーリエで等周問題）

NPO 数学みえる化プロジェクト
安田富久一

【等周問題】

与えられた一本の紐で可能な限り大きな面積を囲みたい。どんな形にすれば良いか？

この問いの答えが次の等周不等式と呼ばれる不等式と等号条件で与えられる。

【等周不等式】

全長が 2π に等しい単純閉曲線 C が囲む領域の面積を S とすると

$$S \leqq \pi$$

が成り立つ。等号が成立するのは C が円のときに限る。

等周不等式はフーリエ級数を使うと見事に証明されるが、フーリエ級数は高校では取り扱わない。取り扱わなくても、正しいことを感覚的に掴むことが出来れば、厳密な証明は将来のお楽しみに残して数学しましょう。

次に等周不等式の証明を示すが、高校生に伝えるフーリエに関する準備や予備知識等は、証明の後に補足として付記しておく。

（証明）

C 上に 1 点 A をとり、A を始点として C の弧長パラメータ表示を $P(x(t), y(t))$ とする。

$$C : (x(t), y(t)) \quad -\pi \leqq t \leqq \pi \quad （但し、x(-\pi) = x(\pi)\ ,\ y(-\pi) = y(\pi)）$$

$x(t), y(t)$ にフーリエ級数を適用する。

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad （但し、b_0 = 0） & (1) \\ y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt) \quad （但し、d_0 = 0） & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 \right\} dt \\ &= \pi \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nt - a_n \sin nt) \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} n(d_n \cos nt - c_n \sin nt) \right)^2 \right\} dt \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) \qquad (3) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) = 2 \quad \left(\because \ x'(t)^2 + \left(y'(t)\right)^2 = 1\ ,\ 弧長パラメーター \right) \qquad (4)$$

ここで、面積Sを計算する。

$$S=\int_{-\pi}^{\pi}\{-y(t)x'(t)\}dt=-\pi\sum_{n=0}^{\infty}n(c_nb_n-a_nd_n)=-\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(c_nb_n-a_nd_n)$$

$$\therefore\ \pi-S=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left((a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2\right)+\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(c_nb_n-a_nd_n)$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2\right)+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left\{(a_n-d_n)^2+(b_n+c_n)^2)\right\} \tag{5}$$

$$\geqq 0 \tag{6}$$

$$\therefore\ S\leqq\pi$$

よって不等号の成立は示された。等号成立条件は、(5),(6) より、

$$^{\forall}n\geqq 2\ ,\ a_n=b_n=c_n=d_n=0\quad ;\quad a_1=d_1,b_1=-c_1 \tag{7}$$

(4),(7) より、

$$a_1^2+b_1^2=1$$

$$\therefore\ a_1=\cos\theta\ ,\ b_1=\sin\theta \text{ とおける}$$

これと (7) より、単純閉曲線Cは

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{a_0}{2}+\cos\theta\cos t+\sin\theta\sin t=\dfrac{a_0}{2}+\cos(t-\theta) \\ y(t)=\dfrac{c_0}{2}-\sin\theta\cos t+\cos\theta\sin t=\dfrac{c_0}{2}+\sin(t-\theta) \end{cases}$$

とパラメータ表示され、中心$\left(\dfrac{a_0}{2},\dfrac{c_0}{2}\right)$半径 1 の円である。　（証明終わり）

＜補足・付記＞

【フーリエ級数】　高校生が出会う普通の周期関数が、(1) や (2) のようにフーリエ級数に表せることを、高校生に感じさせる材料（概要）：

(i) 周期2πを持つ連続な関数$f(x)$は、必ず次のように三角関数の和で表せる。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad \text{（但し、}b_0=0\text{）} \tag{8}$$

$$\left(\text{但し、}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ ,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad (n=0,1,2,\cdots)\right) \tag{9}$$

本当にこれで表せるか実例で確認。

＜例 1＞　$f(x)=x^2$について、$a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\dfrac{2}{3}\pi^2$, $b_0=0$、$n\neq 0$のときは、

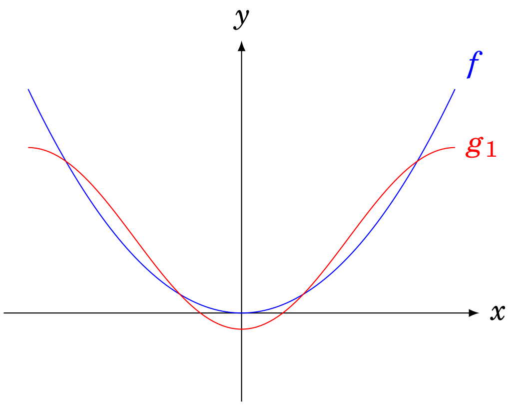
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}\cos n\pi=(-1)^n\frac{4}{n^2}\quad ,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0$$

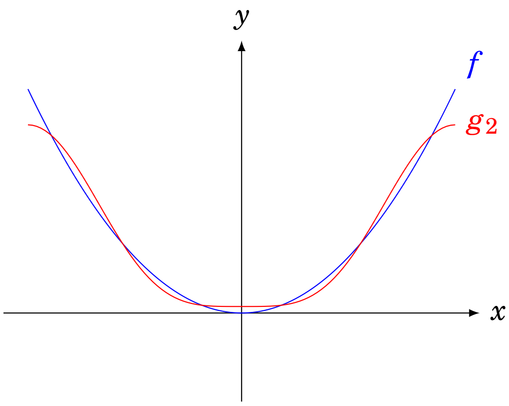
$$\therefore \quad f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx$$

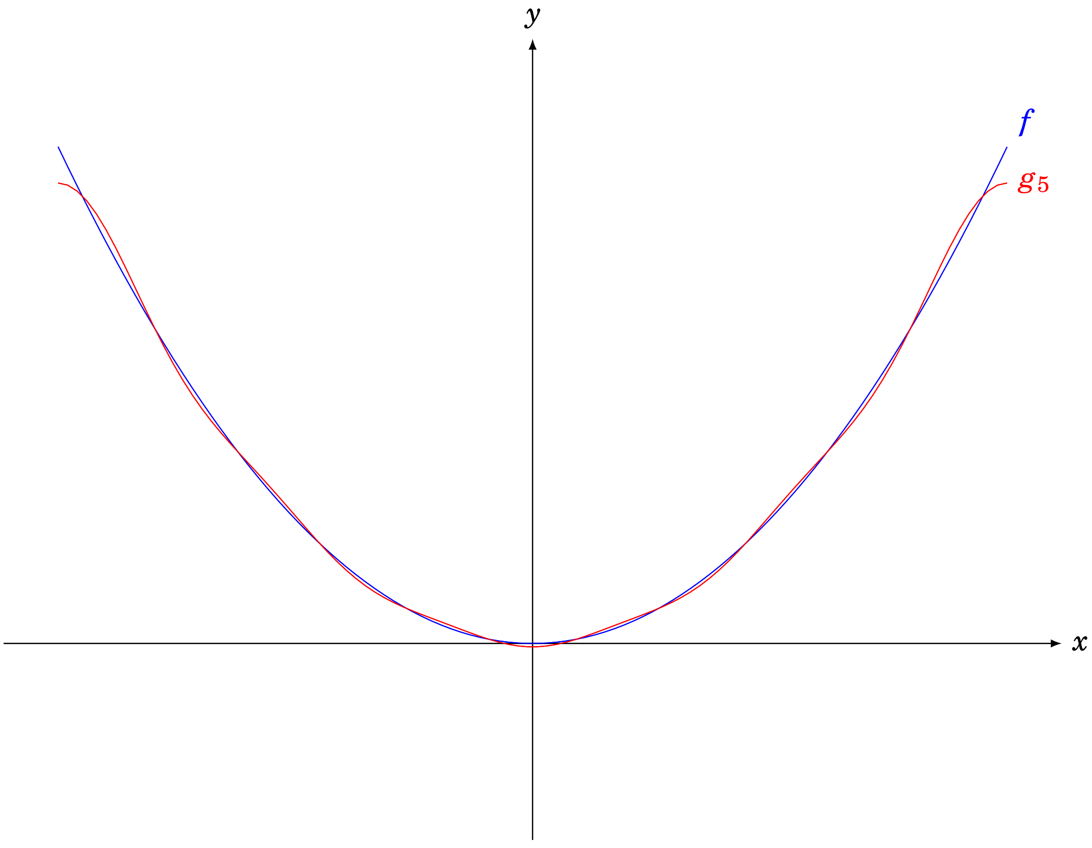
となるはず。この級数の部分和を $g_n(x)$ つまり

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4\left\{ -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos nx \right\} \end{aligned}$$

とおいて、グラフで近づいていく様子を確認してみよう。







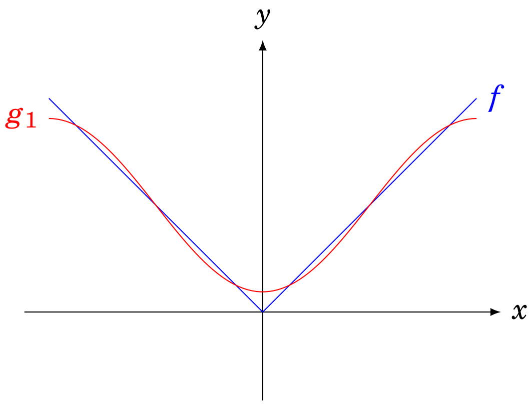
＜例 2＞　$f(x)=|x|$ について、$a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\pi$, $b_0=0$、$n\neq 0$ のときは、

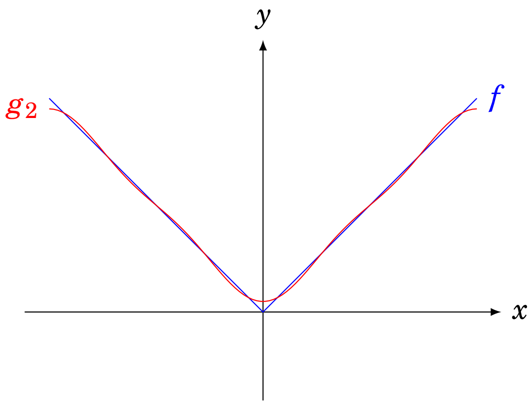
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}\left\{(-1)^n-1\right\}\quad , \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,dx=0$$

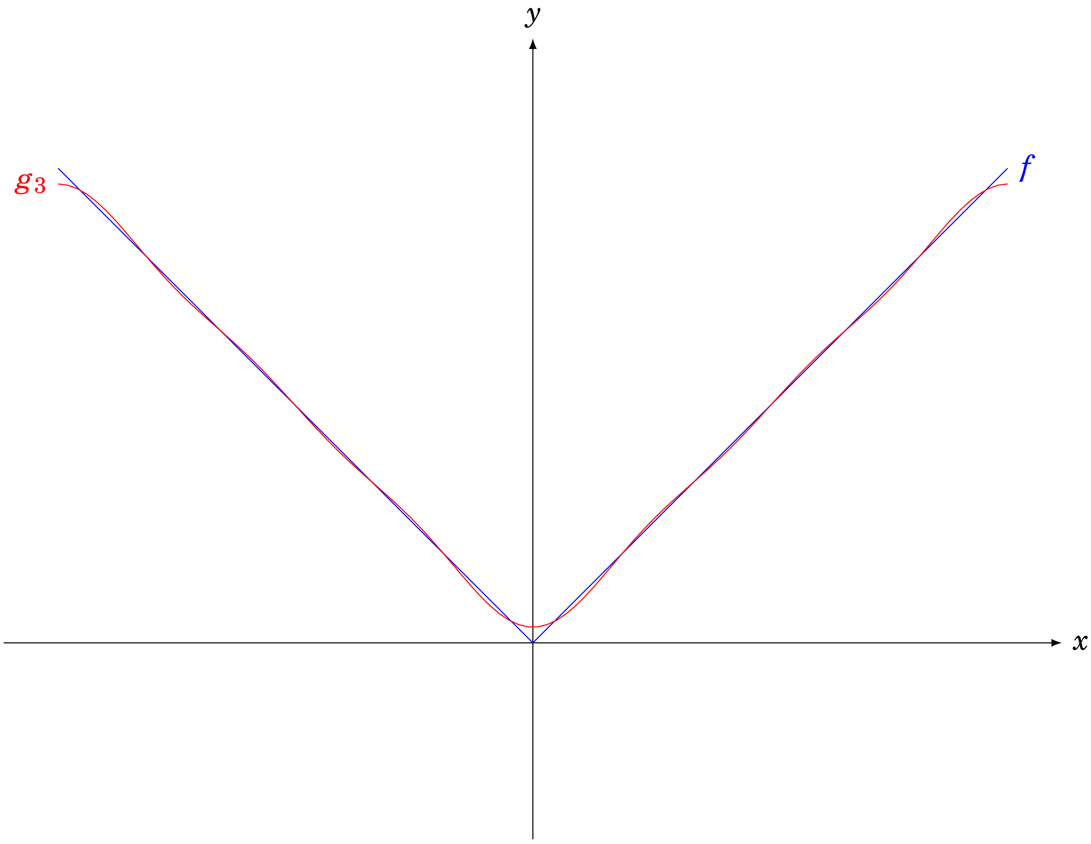
$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left\{\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\cdots\right\}$$

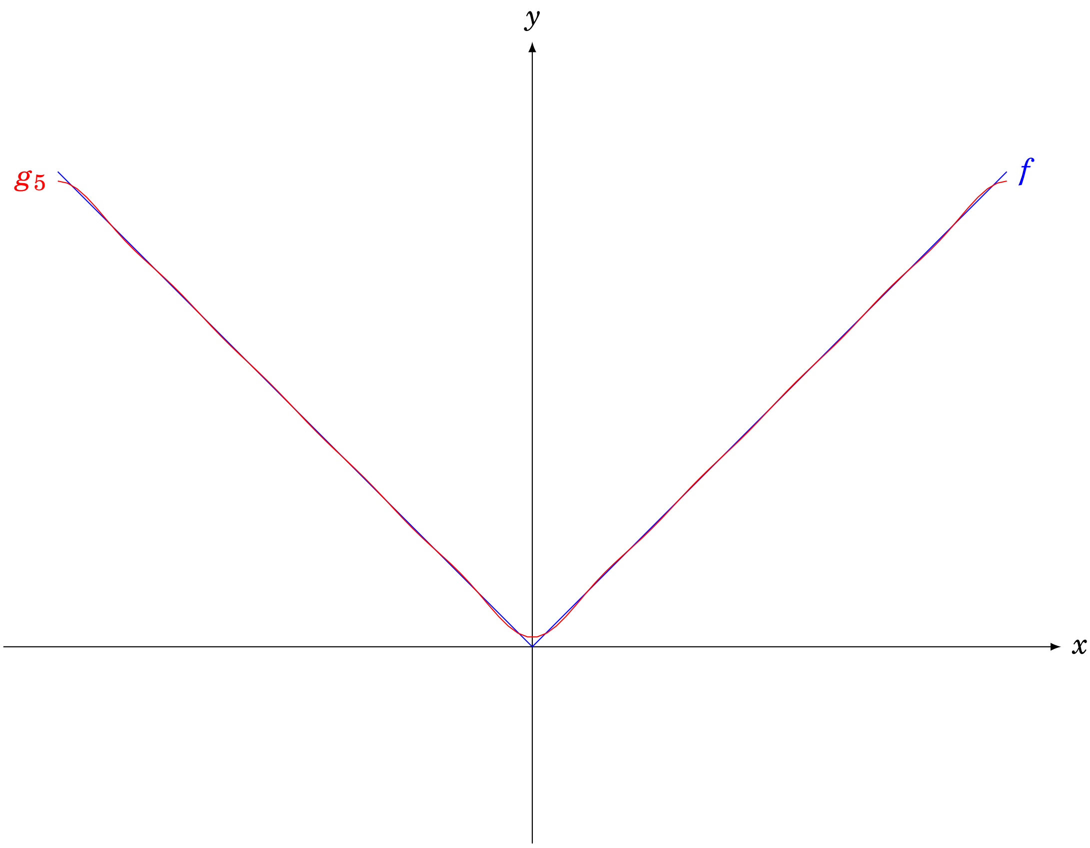
部分和 $g_n(x)$ は

$$g_n(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$



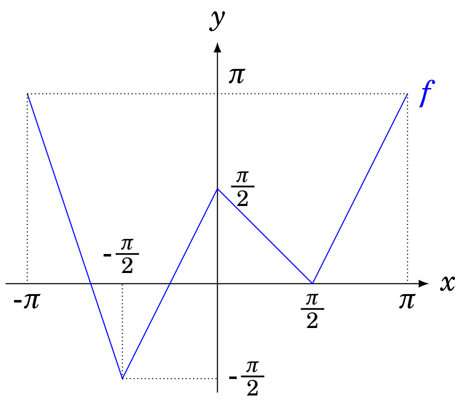






＜例 3 ＞

$$f(x)=\begin{cases} -3x-2\pi & \left(-\pi \leqq x \leqq -\dfrac{\pi}{2}\right) \\ 2x+\dfrac{1}{2}\pi & \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 0\right) \\ -x+\dfrac{1}{2}\pi & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 2x-\pi & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right) \end{cases}$$



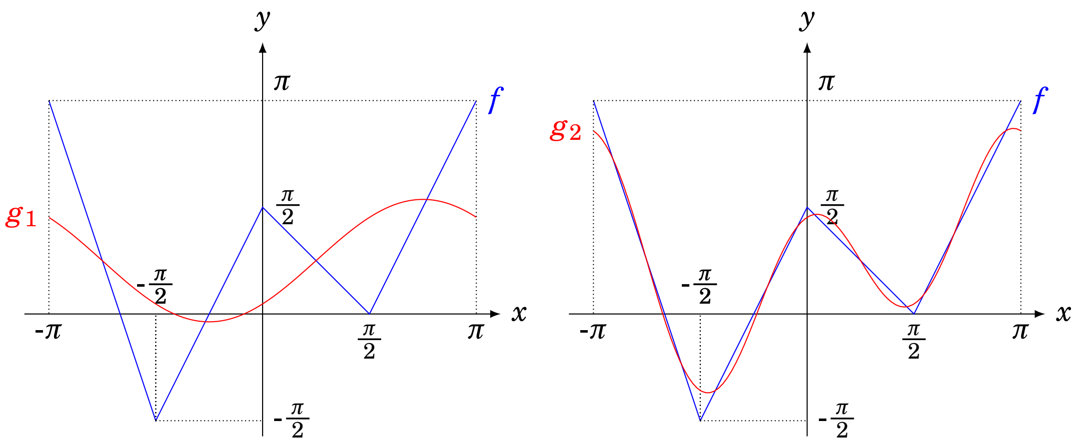
について、$a_0=\dfrac{\pi}{2}$, $b_0=0$、$n\neq 0$ のときは、

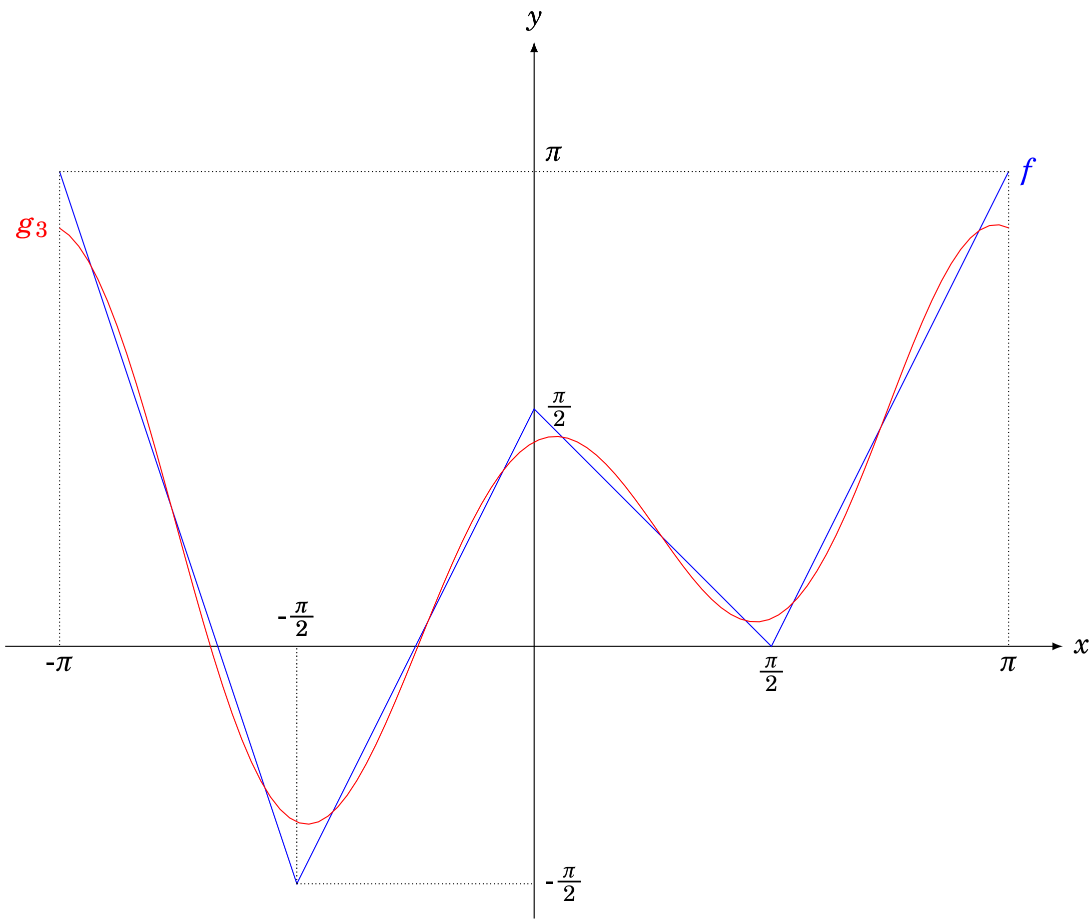
$$a_n=\frac{5\cos n\pi-8\cos\dfrac{n\pi}{2}+3}{n^2\pi}=\begin{cases} 0 & (0 \pmod 4) \\ -\dfrac{2}{n^2\pi} & (1 \pmod 4) \\ \dfrac{16}{n^2\pi} & (2 \pmod 4) \\ -\dfrac{2}{n^2\pi} & (3 \pmod 4) \end{cases}$$

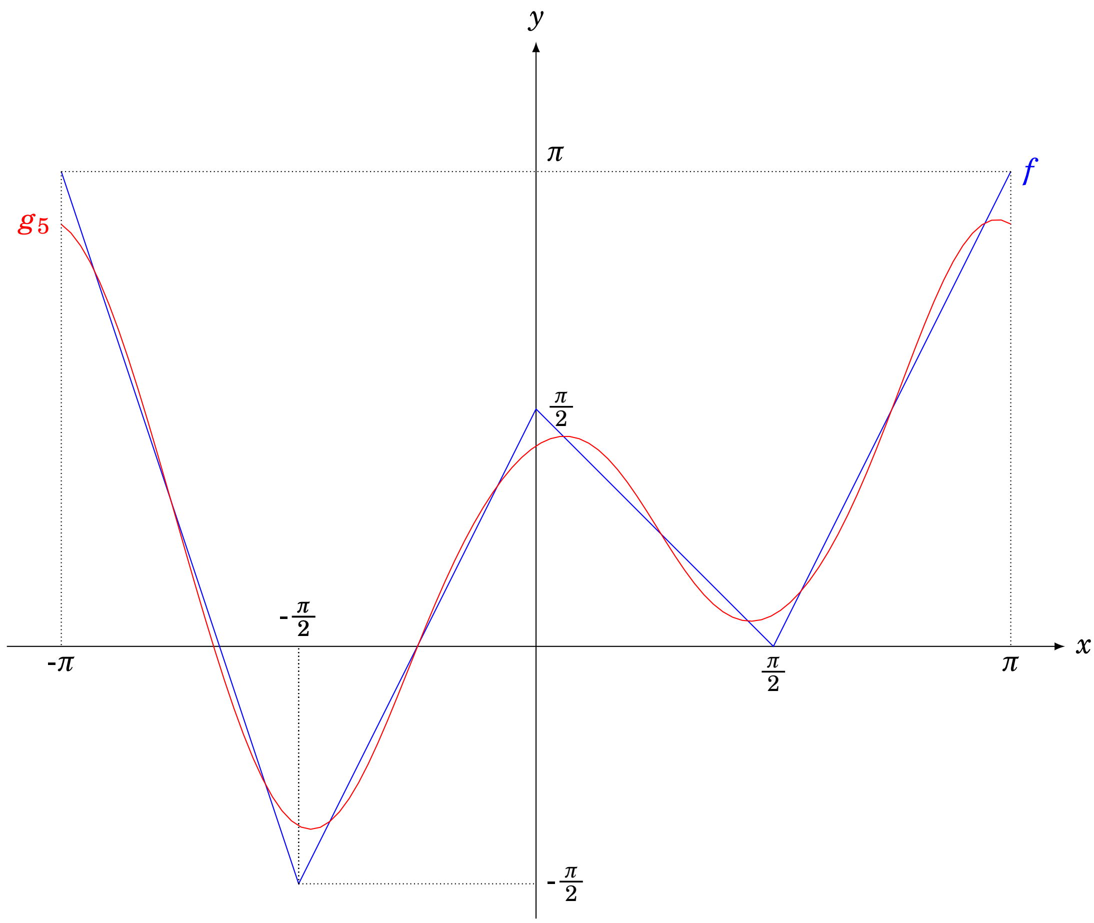
$$b_n=\frac{2\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n^2\pi}=\begin{cases} 0 & (0 \pmod 4) \\ \dfrac{2}{n^2\pi} & (1 \pmod 4) \\ 0 & (2 \pmod 4) \\ -\dfrac{1}{n^2\pi} & (3 \pmod 4) \end{cases}$$

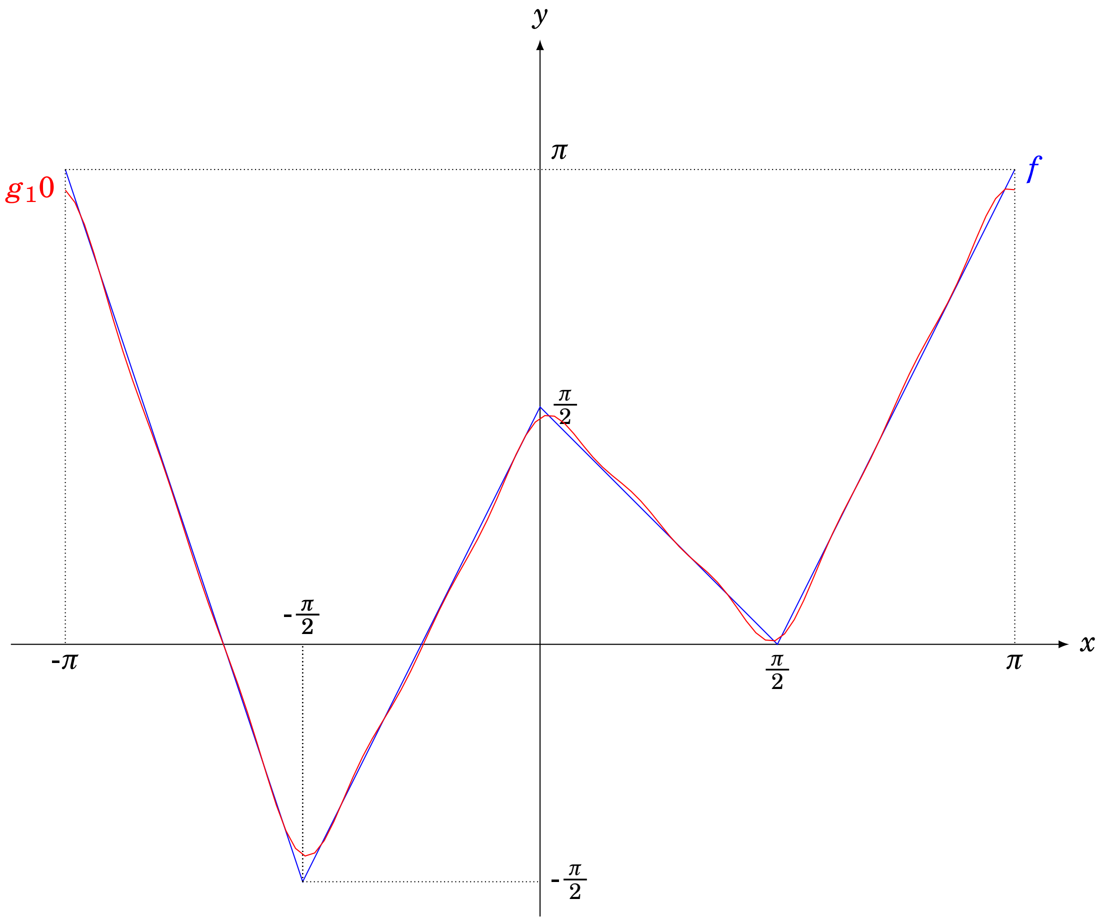
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - 2\cos x + 2\sin x + 4\cos 2x - \frac{2}{9}\cos 3x - \frac{1}{9}\sin 3x - \frac{2}{25}\cos 5x + \frac{2}{25}\sin 5x + \cdots$$

部分和 $g_n(x)$ は






y
π
f
g_5
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
x
$-\pi$
$\frac{\pi}{2}$
π
$-\frac{\pi}{2}$


y
π
f
g_10
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
x
$-\pi$
$\frac{\pi}{2}$
π
$-\frac{\pi}{2}$

(ii)　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x)-\sum_{k=0}^{n}(p_k\cos kx+q_k\sin kx)\right\}^2dx$ の値を最小にする $\{p_k\}_{k=0,1,2,\cdots,n}$, $\{q_k\}_{k=1,2,\cdots,n}$ は、$p_k=a_k$, $q_k=b_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ である（参照：a_k,b_k は (8))。

（証明）

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x)-\sum_{k=0}^{n}(p_k\cos kx+q_k\sin kx)\right\}^2dx\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx+\pi({p_k}^2+{q_k}^2)-2\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx\right)p_k-2\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\right)q_k\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx+\pi({p_k}^2+{q_k}^2-2a_kp_k-2b_kq_k)\\
&=\pi\left\{(p_k-a_k)^2+(q_k-b_k)^2\right\}+\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx-\sum_{k=0}^{n}({a_k}^2+{b_k}^2)
\end{aligned}$$

よって、$p_k=a_k$, $q_k=b_k$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$ のときに最小値

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx-\sum_{k=0}^{n}({a_k}^2+{b_k}^2) \tag{10}$$

をとる。　（証明終わり）

（注）　(10) から、任意の自然数 n について

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx \geqq \sum_{k=0}^{n}{a_k}^2+\sum_{k=0}^{n}{b_k}^2$$

が成り立つ。このことから、更に次のベッセルの不等式が成り立つことが解る。

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx \geqq \sum_{k=0}^{\infty}{a_k}^2+\sum_{k=0}^{\infty}{b_k}^2 \tag{11}$$

(iii)　また、上記の流れから得られる性質があるので見ておく。(10) より

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x)-\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right\}^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx-\sum_{k=0}^{n}({a_k}^2+{b_k}^2)$$

であるが、$n\to\infty$ を考えると、$f(x)$ が連続なら (i) から上式の左辺は 0 に収束するので、

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx=\sum_{n=0}^{\infty}({a_n}^2+{b_n}^2) \tag{12}$$

となる。この等式 (12) をパーセバルの等式と言う。

また、特にこれから次の事実も分かる。

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

【 弧長パラメーター 】

曲線 C は、始点が C_0、終点が C_1 であり長さが c であるとする。曲線 C 上の点 C_s は弧

CC_s の長さがちょうど s となる点であるとする。このときの C_s の座標を $(x(s), y(s))$ とおく。このとき、曲線 C は $(x(t), y(t))$ $(0 \leqq t \leqq c)$ とパラメータ表示される。これを曲線 C の弧長パラメータ表示と言う。弧長パラメータについて、次のことが成り立つ。

弧長パラメーターの性質

> $(x(t), y(t))$ $\quad 0 \leqq t \leqq c$ $\quad$ が弧長パラメーターとすると、$0 \leqq t \leqq c$ である任意の s について次が成り立つ
>
> $$\{x'(s)\}^2 + \{y'(s)\}^2 = 1$$

（証明）

弧長パラメータなので、C_0 から C_s までのこの長さは s であるから

$$\int_0^s \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = s$$

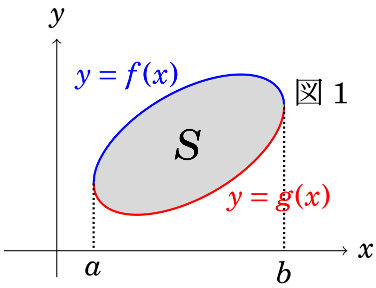
が成り立つ。この両辺を s について微分すると、$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$ 。よって、証明された。

【 単純閉曲線の面積 $= \int_0^{2\pi} \{-y(t)x'(t)\}dt$ の説明 】

＜Ⅰ＞先ず簡単な場合

曲線 C で囲まれた面積 S について考える。

右図１は、曲線 C の上側が $y = f(x)$、下側が $y = g(x)$ で表示されている場合を図で示したものである。



$f(a) = g(a)$
$f(b) = g(b)$

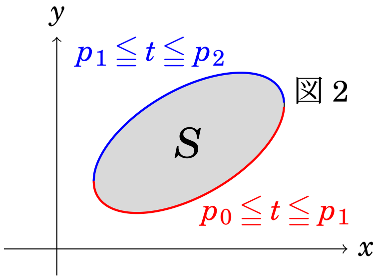
右図２はその同じ曲線 C が

$$C : (x(t), y(t)) \quad (p_0 \leqq t \leqq p_2)$$

とパラメーター表示されていて、

$p_0 \leqq t \leqq p_1$ が下側：$g(x)$

$p_1 \leqq t \leqq p_2$ が上側：$f(x)$



$x(p_0) = a\,, y(p_0) = g(a)$
$x(p_1) = b\,, y(p_1) = g(b)$
$x(p_1) = b\,, y(p_1) = f(b)$
$x(p_2) = a\,, y(p_2) = f(a)$

と表示されていることを示す図である。

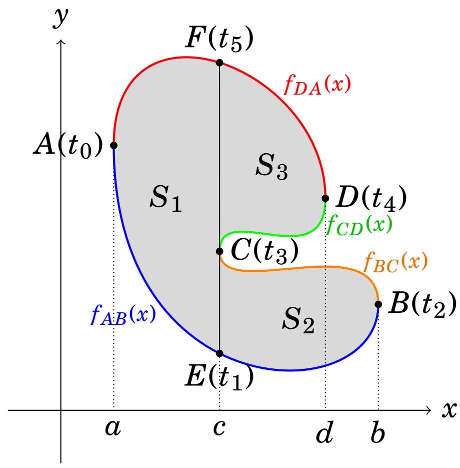
$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$

である。この右辺の積分を $x = x(t)$ と置換積分してみる。

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_{p_2}^{p_1} f(x(t)) \cdot x'(t)dt - \int_{p_0}^{p_1} g(x(t)) \cdot x'(t)dt \\ &= \int_{p_2}^{p_1} y(t) \cdot x'(t)dt - \int_{p_0}^{p_1} y(t) \cdot x'(t)dt = -\int_{p_0}^{p_2} y(t) \cdot x'(t)dt \end{aligned}$$

よって、証明された。

＜Ⅱ＞複雑な場合



右図のような場合を考える。点 A,B,C,D は接線が y 軸と平行になる点である。また、点 E,F は点 C における曲線 C の接線と曲線との交点である。

図形を囲む曲線 C はパラメータ表示で

$$C:(x(t),y(t)) \quad (t_0 \leqq t \leqq t_6)$$

とパラメーター表示されており、点 A,E,B,C,D,F はこの順に $t=t_0,t_1,\cdots,t_5$ とそれぞれ対応しているとする（但し、$t=t_6$ は終点として点 A に対応)。

また曲線 C を弧 AB,BC,CD,DA に分割し、この順に

$$y=f_{AB}(x),\ y=f_{BC}(x),\ y=f_{CD}(x),\ y=f_{DA}(x)$$

と表示されているとする。　$S=S_1+S_2+S_3$ なので面積を計算すると、

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_a^c \{f_{DA}(x)-f_{AB}(x)\}dx = \int_{t_6}^{t_5} f_{DA}(x(t))\cdot x'(t)d - \int_{t_0}^{t_1} f_{AB}(x(t))\cdot x'(t)dt \\
&= -\int_{t_5}^{t_6} y(t)\cdot x'(t)d - \int_{t_0}^{t_1} y(t)\cdot x'(t)dt \\
S_2 &= \int_c^b \{f_{BC}(x)-f_{AB}(x)\}dx = \int_{t_3}^{t_2} f_{BC}(x(t))\cdot x'(t)d - \int_{t_1}^{t_2} f_{AB}(x(t))\cdot x'(t)dt \\
&= -\int_{t_2}^{t_3} y(t)\cdot x'(t)d - \int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt \\
S_3 &= \int_c^d \{f_{DA}(x)-f_{CD}(x)\}dx = \int_{t_5}^{t_4} f_{DA}(x(t))\cdot x'(t)d - \int_{t_3}^{t_4} f_{CD}(x(t))\cdot x'(t)dt \\
&= -\int_{t_4}^{t_5} y(t)\cdot x'(t)d - \int_{t_3}^{t_4} y(t)\cdot x'(t)dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ S =& S_1+S_2+S_3 \\
=& \int_{t_0}^{t_6} \{-y(t)x'(t)\}dt
\end{aligned}$$

よって複雑な場合も証明された。