数学でも実験を

安田富久一

問題解決に実験が役立ったことを紹介する。実験するということに意識を置いて生徒に課題を与えて誘導するのに利用すると良いのではないかと思い紹介したい。

月刊雑誌：数学セミナー５月号のエレガントな解答を求む、に次の問題が出題された。

> 出題 1
> $P(x)$ を有理数係数の 3 次多項式とする。このとき、$P(Q(x))$ が可約となるような有理数係数の 2 次多項式 $Q(x)$ が存在することを証明せよ。
>
> ただし、有理数係数の多項式 $R(x)$ が可約であるとは、定数でない有理数係数の多項式 $R_1(x)\,,R_2(x)$ であって、$R(x)=R_1(x)R_2(x)$ を満たすものが存在することをいう。

この問題に挑戦する際、実験が役立った、及びコンピュータが活躍してくれた、という話の紹介である。問題は解けたと思っている私に誤解とミスがあり実は解けていない、ということがあるかもしれないし、私の解答に間違いはないにしても、他のエレガントで良い解答があるかもしれない。エレガントな解答を紹介するのが目的ではなく、数学においても実験するということは課題解決の大切なプロセスだということ、PC を積極的に課題解決に利用することを生徒に伝える教材例の紹介としてお話しする。

本資料の流れは説明の便宜上、最終的に書いた解答、そこに至るプロセス、という順で紹介する。

【 解答 】

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ （a,b,c,d は有理数であり、$a\neq 0$）とする。

$$
\begin{aligned}
&P\left(x-\frac{b}{3a}\right)\\
=&a\left(x^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}x+\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{27a^3}\right)\\
=&a(x^3+sx+t) \qquad \left(\text{但し、}s=\frac{3ac-b^2}{3a^2}\ ,\ t=\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{27a^3}\ \text{とおいた}\right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

であり、s,t は明らかに有理数である。

$t=0$ のとき

$$P\left(x-\frac{b}{3a}\right)=a(x^3+sx)=ax(x^2+s)$$

なので、この両辺の x に x^2 を代入して

$$P\left(x^2-\frac{b}{3a}\right)=ax^2(x^4+s) \qquad (2)$$

となる。$Q(x)=x^2-\dfrac{b}{3a}$ ととれば、$Q(x)$ は有理数係数の 2 次の多項式で、$P(Q(x))$ は (2)

より可約なので、$t=0$ のとき題意は証明された。

$t\neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}P\left(-tx^2+sx-\frac{b}{3a}\right)=&a\left\{(-tx^2+sx)^3+s(-tx^2+sx)+t\right\}\\=&a(-t^3x^6+3st^2x^5-3s^2tx^4+s^3x^3-stx^2+s^2x+t)\\=&-a(tx^3-sx^2-1)(t^2x^3-2stx^2+s^2x+t)\end{aligned}\tag{3}$$

となる。$Q(x)=-tx^2+sx-\dfrac{b}{3a}$ ととれば、$Q(x)$ は有理数係数の 2 次の多項式で、$P(Q(x))$ は (3) より可約なので、$t\neq 0$ のときも題意は証明された。 【 解答 】終わり

【 解答に至るプロセス 】

(I) 既約多項式で知っていることを思い出し、いろいろ考えた。

＜古典代数学での知識＞（参照：『代数学講義』高木貞治 著 ＜共立出版＞）

(i) 有理係数多項式は必ず互いに公約数を持たない整数係数の多項式を有理数倍した形で書ける、つまり

$\alpha(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)$

但し、a_0: 有理数 , 各 a_i: 整数 , $i\neq j\Longrightarrow a_i$ と a_j は互いに素

互いに公約数を持たない整数係数の多項式のことを**原始多項式**と言う。

(ii) 【 定理 】原始多項式の積は原始多項式である（Gauss の定理)。

(iii) 【 定理 】整係数を持つ多項式が可約ならば、その多項式は整係数をもつ因子に分解される。

(iv) 【 **Eisenstein の定理** 】整係数の多項式において最高次の項の係数を除いて、その他の係数は全部ある素数 p で割り切れるとする。もし、定数項が p^2 では割り切れないならば、この多項式は既約である。

(v) n 次多項式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ について、$f(x-\dfrac{a_1}{na_0})$ は $(n-1)$ 次の項が無い n 次多項式である（3・4 次方程式の解の公式では有名な事実)。

(II) x^3+px+q（p,q：整数）の x に 2 次多項式を代入して因数分解：その 6 次多項式はどんな特徴の複素数解を持つか？

(III) 2 週間ほど悶々。

(IV) （実験しなきゃ）このままじゃあ拉致あかない。実際に既約 3 次多項式に代入すると可約になる 2 次多項式 $Q(x)$ を探して、そこから何かヒントを得てみよう！

(V) （どう実験する？）x^3+px+q の p,q に整数を設定

（$(p,q)=(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1),\cdots$）として調べてみよう。

(VI)　因数分解は数式処理ソフトが使える（Maxima を利用：因数分解してくれる)。

(VII)　x^3+x+1 で x に 2 次式を代入するが、ℓx^2+mx+n だと ℓ, m, n と 3 つもパラメーターの指定を要して面倒。まずは x^2+mx+n でやってみて、見つかりそうになかったら $2x^2+m+n, \cdots$ とやって行ってみよう。

(VIII)　$\mathbf{x^2+mx+n}$ に期待を込めて、

PC に命令

> m を -10 から 10 まで、n も -10 から 10 まで変化させて、次の式を因数分解せよ
>
> $$(x^2+mx+n)^3+(x^2+mx+n)+1$$
>
> と Maxima に命令を打ち込み、PC に実行させる。

次に PC が打ち出した結果の $m=0$ の部分を抜き出してみる。

m	n	x^3+x+1
0	-5	$x^6-15x^4+76x^2-129$
0	-4	$x^6-12x^4+49x^2-67$
0	-3	$x^6-9x^4+28x^2-29$
0	-2	$(x^3-2x^2-x+3)(x^3+2x^2-x-3)$
0	-1	$x^6-3x^4+4x^2-1$
0	0	x^6+x^2+1
0	1	$x^6+3x^4+4x^2+3$
0	2	$x^6+6x^4+13x^2+11$
0	3	$x^6+9x^4+28x^2+31$
0	4	$x^6+12x^4+49x^2+69$
0	5	$x^6+15x^4+76x^2+131$

$P(x)=x^3+x+1$ のときには $Q(x)=x^2-2$ で OK だと分かる。更に、$-5 \leqq m \leqq 5$ において可約な部分だけを抜き出すと、

m	n	$P(x)=x^3+x+1$
-4	-2	$(x^3-8x^2+19x-11)(x^3-4x^2+3x-1)$
-2	-1	$(x^3-5x^2+6x+1)(x^3-x^2-2x-1)$
0	-2	$(x^3-2x^2-x+3)(x^3+2x^2-x-3)$
2	-1	$(x^3+x^2-2x+1)(x^3+5x^2+6x-1)$
4	2	$(x^3+4x^2+3x+1)(x^3+8x^2+19x+11)$

以下、$P(x)=x^3+x-1$，x^3-x+1，x^3-x-1 についても情報収集してみると、次ページに示したように、$-5 \leqq m, n \leqq 5$ の範囲では $P(x)=x^3-x+1$ は

$Q(x) = x^2 + mx + n$ について $Q(P(x))$ は可約にはならない。また、$P(x) = x^3 - x - 1$ はかなり多く $Q(x)$ が存在する。

m	n	$P(x) = x^3 + x - 1$
-3	2	$(x^3 - 5x^2 + 8x - 3)(x^3 - 4x^2 + 5x - 3)$
-1	0	$(x^3 - 2x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - 1)$
1	0	$(x^3 + x^2 + 1)(x^3 + 2x^2 + x - 1)$
3	2	$(x^3 + 4x^2 + 5x + 3)(x^3 + 5x^2 + 8x + 3)$

m	n	$P(x) = x^3 - x - 1$
-4	1	$(x^3 - 7x^2 + 12x + 1)(x^3 - 5x^2 + 4x - 1)$
-4	5	$(x^3 - 7x^2 + 18x - 17)(x^3 - 5x^2 + 10x - 7)$
-3	2	$(x^3 - 5x^2 + 8x - 5)(x^3 - 4x^2 + 5x - 1)$
-2	-2	$(x^3 - 4x^2 + x + 7)(x^3 - 2x^2 - 3x - 1)$
-2	2	$(x^3 - 4x^2 + 7x - 5)(x^3 - 2x^2 + 3x - 1)$
-1	0	$(x^3 - 2x^2 + x - 1)(x^3 - x^2 + 1)$
0	-3	$(x^3 - x^2 - 4x + 5)(x^3 + x^2 - 4x - 5)$
0	1	$(x^3 - x^2 + 2x - 1)(x^3 + x^2 + 2x + 1)$
1	0	$(x^3 + x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + x + 1)$
2	-2	$(x^3 + 2x^2 - 3x + 1)(x^3 + 4x^2 + x - 7))$
2	2	$(x^3 + 2x^2 + 3x + 1)(x^3 + 4x^2 + 7x + 5)$
3	2	$(x^3 + 4x^2 + 5x + 1)(x^3 + 5x^2 + 8x + 5)$
4	1	$(x^3 + 5x^2 + 4x + 1)(x^3 + 7x^2 + 12x - 1)$
4	5	$(x^3 + 5x^2 + 10x + 7)(x^3 + 7x^2 + 18x + 17)$

(IX)　方向を変えて：　$P(x) = x^3 - x + 1$ について、$-10 \leqq m, n \leqq 10$ まで範囲を拡げてもうまく見つからないので、方向を少し変えて、$Q(x) = mx^2 + nx$ ではどうかやってみよう。ついでに、既にうまくいっていっていた $P(x) = x^3 + x + 1$, $x^3 + x - 1$, $x^3 - x - 1$ でも $Q(x) = mx^2 + nx$ で大丈夫かやってみよう。

m	n	$P(x) = x^3 - x + 1$
-4	-2	$-(8x^3 + 4x^2 - 1)(8x^3 + 8x^2 + 2x + 1)$
-4	2	$-(8x^3 - 8x^2 + 2x - 1)(8x^3 - 4x^2 + 1)$
-1	-1	$-(x^3 + x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + x + 1)$
-1	1	$-(x^3 - 2x^2 + x - 1)(x^3 - x^2 + 1)$

m	n	$P(x) = x^3 + x + 1$
-4	-2	$-(8x^3 + 4x^2 + 1)(8x^3 + 8x^2 + 2x - 1)$
-4	2	$-(8x^3 - 8x^2 + 2x + 1)(8x^3 - 4x^2 - 1)$
-1	-1	$-(x^3 + x^2 + 1)(x^3 + 2x^2 + x - 1)$
-1	1	$-(x^3 - 2x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - 1)$

m	n	$P(x) = x^3 + x - 1$
1	-1	$(x^3 - 2\text{ů}x^2 + x + 1)\text{ů}(x^3 - x^2 - 1)$
1	1	$(x^3 + x^2 + 1)\text{ů}(x^3 + 2\text{ů}x^2 + x - 1)$
4	-2	$(8\text{ů}x^3 - 8\text{ů}x^2 + 2\text{ů}x + 1)\text{ů}(8\text{ů}x^3 - 4\text{ů}x^2 - 1)$
4	2	$(8\text{ů}x^3 + 4\text{ů}x^2 + 1)\text{ů}(8\text{ů}x^3 + 8\text{ů}x^2 + 2\text{ů}x - 1)$

m	n	$P(x) = x^3 - x - 1$
1	-1	$(x^3 - 2x^2 + x - 1)(x^3 - x^2 + 1)$
1	1	$(x^3 + x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + x + 1)$

大丈夫だ。

(X)　次は $P(x) = x^3 \pm 2x \pm 2$ を調べよう。$Q(x) = mx^2 + nx$ でやっていこう。

$x^3 + x - 2$, $x^3 + x + 2$, $x^3 - 2x - 1$, $x^3 - 2x + 1$ はいずれも $x - 1$ か $x + 1$ を因数

に持つので、$Q(x)$ はどんな 2 次の多項式でも題意を満たしつまらないので、これら以外を調べる。

m	n	$P(x)=x^3-x-2$
2	-1	$(2x^3-x^2+1)(4x^3-4x^2+x-2)$
2	1	$(2x^3+x^2-1)(4x^3+4x^2+x+2)$

m	n	$P(x)=x^3-x+2$
-2	-1	$-(2x^3+x^2-1)(4x^3+4x^2+x+2)$
-2	1	$-(2x^3-x^2+1)(4x^3-4x^2+x-2)$

m	n	$P(x)=x^3+2x-1$
-2	-3	$-(2x^3+7x^2+7x+1)(4x^3+4x^2-x+1)$
-2	3	$-(2x^3-7x^2+7x-1)(4x^3-4x^2-x-1)$
1	-2	$(x^3-4x^2+4x+1)(x^3-2x^2-1)$
1	2	$(x^3+2x^2+1)(x^3+4x^2+4x-1)$
4	-4	$(8x^3-16x^2+8x+1)(8x^3-8x^2-1)$
4	4	$(8x^3+8x^2+1)(8x^3+16x^2+8x-1)$

m	n	$P(x)=x^3+2x+1$
-4	-4	$-(8x^3+8x^2+1)(8x^3+16x^2+8x-1)$
-4	4	$-(8x^3-16x^2+8x+1)(8x^3-8x^2-1)$
-1	-2	$-(x^3+2x^2+1)(x^3+4x^2+4x-1)$
-1	2	$-(x^3-4x^2+4x+1)(x^3-2x^2-1)$
2	-3	$(2x^3-7x^2+7x-1)(4x^3-4x^2-x-1)$
2	3	$(2x^3+7x^2+7x+1)(4x^3+4x^2-x+1)$

ここまで実験してきて再度見返した。或ることに眼が行った。$P(x)=x^3+mx+n$ に対して、OK となる $Q(x)$ の中に必ず $-nx^2\pm mx$ があることだった。

(XI)（夢・推測・予測・希望的観測）

試しに $P(x)=x^3-2x+3$ で $Q(x)=-3x^2-2$ として、$P(Q(x))$ を作ると、

$$\begin{aligned} P(Q(x)) &= -27x^6-54x^5-36x^4-8x^3+6x^2+4x+3 \\ &= -(3x^3+2x^2-1)(9x^3+12x^2+4x+3) \end{aligned}$$

益々期待が高まり、$P(x)=x^3+mx+n$, $Q(x)=-nx^2\pm mx$ で一般にやってみる。

$$\begin{aligned} P(Q(x)) &= -n^3x^6+3mn^2x^5-3m^2nx^4+m^3x^3-mnx^2+m^2x+n \quad (4) \\ &= -(nx^3-mx^2-1)(n^2x^3-2mnx^2+m^2x+n) \quad (5) \end{aligned}$$

ラッキー！　解決した！

(XII) 結果報告作成に向けて、見直しをすると・・・

数学セミナーに解答を送るため、解答作成のために振り返ってみて (4)、(5) は m,n が整数であるということを何処にも使っていないことに気がついた。(I) で見た古典代数学の成果は全く使わずに（高校生で十分理解可能な）証明が出来たことになった。

＜今回の課題解決の要点＞

- 思考・実験を繰り返す（途中推測を立てたり、どんなことを調べたいか等を織り交ぜて）
- データが語りかけてくることに耳を傾け（推測）し実験を重ねる。
- IT は惜しみなく活用する。

今回のことでは、多項式の展開計算、因数分解を手計算で遣り切るのは非常に大変。しかも、(4) を (5) に手計算で因数分解する自信は私には全くない（m,n どちらの文字についても 3 次式で、x に至っては 6 次式)。